QCD und Kolliderphysik

Vorlesung: Prof. Dr. D. Zeppenfeld – Übung: Dr. H. Mantler, Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 6

Ausgabe: Mi, 04.07.2018 – Besprechung: Mi, 18.07.2018

Aufgabe 9: $\gamma^* g \to q\bar{q}$

Wir betrachten zunächst erneut den Prozess $\gamma^* \to q\bar{q}g$. Wie aus Aufgabe 4 auf Übungsblatt 3 bekannt, ist das zugehörige quadrierte Matrixelement in 4 Dimensionen gegeben durch

$$\overline{|\mathcal{M}(\gamma^* \to q\bar{q}g)|^2} = K \cdot \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)}$$

mit den Dalitz-Variablen

$$2p_2 \cdot k = q^2(1-x_1)\,, \quad 2p_1 \cdot k = q^2(1-x_2)$$

und $q = p_1 + p_2 + k$.

(a) Betrachten Sie nun den Prozess $\gamma^* g \to q\bar{q}$. Geben Sie das zugehörige Matrixelemet $\overline{|\mathcal{M}(\gamma^* g \to q\bar{q})|^2}$ an. Wegen der Crossing-Symmetrie kann man dabei auf das Ergebnis aus Aufgabe 4 zurückgreifen. Drücken Sie das Resultat durch die Mandelstam-Variablen s, t und u, sowie die Virtualität $Q^2 = -q^2$ des Photons aus und verwenden Sie den zugehörigen Vorfaktor

$$K = 16\pi^2 e_q^2 \alpha \alpha_S.$$

(b) Berechnen Sie die Verteilung

$$\frac{d\sigma}{dp_T^2} = \frac{1}{16\pi s^2} \overline{|\mathcal{M}(\gamma^* g \to q\bar{q})|^2}.$$

Betrachten Sie den Fall, dass das auslaufende Quark kollinear zum einlaufenden Gluon ist, d.h. $-t \ll s$. Drücken Sie das Ergebnis durch $z = \frac{Q^2}{s+Q^2}$ aus und zeigen Sie, dass sich

$$\frac{d\sigma}{dp_T^2} = e_q^2 \sigma_0 \frac{1}{p_T^2} \frac{\alpha_S}{2\pi} P_{qg}(z)$$

mit $\sigma_0 = 4\pi^2\alpha/s$ ergibt. Wie lautet die Splitting-Funktion $P_{qg}(z)$?

(c) Betrachten Sie auch den Fall, dass das auslaufende Antiquark kollinear zum einlaufenden Gluon ist ($-u \ll s$). Hier ergibt sich

$$\frac{d\sigma}{dp_T^2} = e_q^2 \sigma_0 \frac{1}{p_T^2} \frac{\alpha_S}{2\pi} P_{\bar{q}g}(z).$$

Wie hängen $P_{\bar{q}g}$ und P_{qg} miteinander zusammen?

Aufgabe 10: Plus-Distribution

Eine Plus-Distribution $[F(z)]_+$ ist definiert durch

$$\int_0^1 f(z)\,[F(z)]_+\,dz = \int_0^1 [f(z) - f(1)]\,F(z)dz$$

für jede Testfunktion $f(z)$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\left[\frac{1+z^2}{1-z}\right]_+ = \frac{1+z^2}{[1-z]_+} + \frac{3}{2}\delta(1-z).$$

(b) Zeigen Sie, dass allgemein das Integral über eine Plus-Distribution verschwindet, d.h.

$$\int_0^1 [F(z)]_+\,dz = 0\,.$$