Theoretische Teilchenphysik I

Sommersemester 2018

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

gehalten von

Prof. Dr. M. M. Mühlleitner

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Vorbemerkungen

1.1 Organisatorisches

Webseite der Vorlesung: https://www.itp.kit.edu/courses/ss2018/ttp1/start

Vorlesungszeiten: Mo, 14-15h30 und Fr, 14-15h30; Ort: Otto-Lehmann Hörsaal;
Übungen: Mittwoch nachmittags

Übungsleiter: Philipp Basler, Marcel Krause;
Tutorinnen/Tutoren: Jonas Müller, Dr. Shruti Patel, Emma S. Dore

Kriterien für Erhalt des Übungsscheins, Informationen zur Ausfertigung der Übungsblätter, Termine der Übungsgruppen, Übungsblätter zum Download: siehe Webseite

1.2 Literatur

Lehrbücher:

[1] Bailin, David und Love, Alexander: *Introduction to gauge field theory*, Hilger

[2] Bjorken, James D. und Drell, Sidney D.: *Relativistische Quantenfeldtheorie*, BI-Wissenschaftsverlag.

[3] Böhm, M., Denner, A. und Joos, H.: *Gauge Theories of the Strong and Electroweak Interaction*, Teubner Verlag

[4] Cheng, Ta-Pei und Li, Ling-Fong: *Gauge theory of elementary partilce physics*, Oxford Science Publications

[5] Halzen, Francis und Martin, Alan D.: *Quarks and Leptons*, John Wiley & Sons, Inc.

[6] Itzykson, Claude und Zuber, Jean-Bernard: *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill

[7] Kaku, Michio: *Quantum field theory*, Oxford University Press

[8] Kugo, Thaichiro: *Eichtheorie*, Springer

[9] Nachtmann, Otto: *Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik*, Vieweg

[10] Peskin, Michael E. und Schroeder, Daniel V.: *An introduction to quantum field theory*, Addison-Wesley

[11] Pokorski, Stefan: *Gauge field theories*, Cambridge University Press

[12] Ramond, Pierre: *Field theory*, Addison-Wesley

[13] Ryder, L.H.: *Quantum Field theory*, Cambridge University Press

[14] Sterman, George: *An Introduction to Quantum Field Theory*, Cambridge University Press

[15] Weinberg, Steven: *The quantum theory of fields*, Cambridge University Press

Webseiten:

http://pdg.lbl.gov Particle Data Group

http://inspirehep.net Datenbank INSPIRE für Publikationen

http://arxiv.org Preprint-Archiv

http://www.cern.ch CERN

1.3 Vorläufige Inhaltsangabe

1. Vorbemerkungen
2. Einleitung (Konventionen, Lorentzgruppe und Poincarégruppe)
3. Lagrangeformalismus für Felder (Bewegungsgleichungen, Noether Theorem, innere Symmetrien, Gruppentheorie)
4. Quantisierung des skalaren Feldes
5. Quantisierung von Spinorfeldern (Dirac-Feld)
6. Quantisierung von Spin-1 Feldern (Vektorfeldern)
7. Störungstheorie, Feynmanregeln, Feynman-Diagramme
8. Berechnung von Wirkungsquerschnitten
9. ...

Kapitel 2

Einleitung

Elementarteilchenphysik bedeutet Physik bei kleinsten Abständen bzw. höchsten (relavisitischen) Energien. Siehe z.B. Welle-Teilchen-Dualität und die De-Broglie Beziehung

$$E = h\nu \rightsquigarrow E\uparrow \;\Leftrightarrow\; \nu\uparrow \;\Leftrightarrow\; \lambda\downarrow \quad \text{kleinste Abstände}\,. \tag{2.1}$$

Die Grundlage zu Beschreibung der Hochenergiephysik bildet die Quantenfeldtheorie. Bei den Teilchen handelt es sich um Anregungszustände von Quantenfeldern.

Warum aber betreiben wir Hochenergiephysik? Der Grund ist, daß wir Antworten auf unsere grundlegenden Fragen über das Universum suchen:

1. Woraus besteht das Universum?
2. Wie entwickelte sich das Universum?
3. Was sind die Bausteine der Materie, und welche Kräfte halten sie zusammen?

Wie ist der heutige Stand der Elementarteilchenphysik?

1. Die uns bekannte Materie kann durch wenige fundamentale Teilchen beschrieben werden.
2. Die verschiedenen Wechselwirkungen werden durch fundamentale Kräfte zwischen den Teilchen beschrieben.
3. Die herrschenden physikalischen Gesetzmäßigkeiten können mathematisch mithilfe einfacher fundamentaler Prinzipien beschrieben werden. (Mit Ausnahme der Gravitation)

2.1 Konventionen

Natürliche Einheiten In der theoretischen Teilchenphysik werden natürliche Einheiten (Planck Einheiten) gewählt. Dabei werden die Lichtgeschwindigkeit c und das Plancksche Wirkungsquantum $\hbar$ gleich 1 gesetzt. Als Energieeinheit, die dadurch nicht festgelegt wird, wird das Elektronenvolt verwendet: $1\,\text{eV} = 1.6 \cdot 10^{-19}\,\text{J}$.

1. Die Lichtgeschwindigkeit c wird gleich 1 gesetzt:

$$c = 3 \cdot 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \equiv 1 \;\Rightarrow\; 1\text{ s} = 3 \cdot 10^8\text{ m} \tag{2.2}$$

2. Die Plancksche Wirkungskonstante wird gleich 1 gesetzt:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 6.6 \cdot 10^{-25}\,\text{GeV s} \equiv 1 \;\Rightarrow\; 1\,\text{s} = 1.5 \cdot 10^{24}\,\text{GeV}^{-1}\ . \tag{2.3}$$

Und

$$\hbar c = 1 \;\Rightarrow\; 1\,\text{m} = 5.1 \cdot 10^{15}\,\text{GeV}^{-1}\ . \tag{2.4}$$

Sowie

$$m = \frac{E_\text{Ruhe}}{c^2} = E_\text{Ruhe} \tag{2.5}$$

$$m = \frac{1\,\text{eV}}{c^2} = \frac{1.6 \cdot 10^{-19}}{(3 \cdot 10^8)^2}\,\text{kg} = 1.78 \cdot 10^{-36}\,\text{kg} \stackrel{!}{=} 1\,\text{eV} \;\Rightarrow\; 1\,\text{kg} = 5.6 \cdot 10^{26}\,\text{GeV} \tag{2.6}$$

3. Die elektrische Elementarladung $e > 0$ ist gegeben durch die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante α:

$$\frac{e^2}{4\pi} = \alpha \approx \frac{1}{137....} \;\Rightarrow\; e = 0.3. \tag{2.7}$$

Die Ladung e ist dimensionslos!

Somit sind also alle physikalischen Einheiten Potenzen der Energie. Der Exponent ist die (Massen-) Dimension. So haben wir also

$$[\text{Länge}] = [\text{Zeit}] = -1\ , \quad [\text{Masse}] = 1\ , \quad [e] = 0\ . \tag{2.8}$$

Minkowski-Metrik Ein metrischer Raum ist ein Vektorraum mit einer Metrik. Wir haben den kontravarianten Vierervektor

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} \quad (\text{kontravariant})\ . \tag{2.9}$$

Der zu dem Vektorraum gehörige Dualraum enthält als Elemente die kovarianten Vierervektoren

$$x_\mu = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -\vec{x} \end{pmatrix} \quad (\text{kovariant})\ . \tag{2.10}$$

Der Übergang zwischen kontra- und kovariant wird durch die Minkowski-Metrik $g_{\mu\nu}$ vermittelt,

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -\vec{x} \end{pmatrix}\ . \tag{2.11}$$

Das Skalarprodukt ist gegeben durch

$$x \cdot y = x_\mu y^\mu = x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y} \ . \tag{2.12}$$

Es ist

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \quad \text{und} \quad g^\nu_\mu = \delta^\nu_\mu \ . \tag{2.13}$$

<u>Levi-Civita-Tensor</u> Der Levi-Civita-Tensor ist definiert durch

$$e^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{für gerade Permutationen} \\ -1 & \text{für ungerade Pemutationen} \\ \ \ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{2.14}$$

Dabei ist

$$\epsilon^{0123} = +1 \quad \Rightarrow \quad \epsilon_{0123} = g_{0\mu} g_{1\nu} g_{2\rho} g_{3\sigma} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = g_{00} g_{11} g_{22} g_{33} \epsilon^{0123} = -\epsilon^{0123} = -1 \ . \tag{2.15}$$

Wir haben auch

$$\epsilon^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_2 \ , \quad \text{d.h. } \epsilon^{12} = 1 \ . \tag{2.16}$$

<u>Einsteinsche Summenkonvention</u> Über doppelt auftretende Indizes wird summiert, d.h.

$$a_i b_i = \sum_i a_i b_i \ . \tag{2.17}$$

Meist haben wir

$$a_\mu b_\mu = \sum_{\mu=0}^{3} a_\mu b^\mu \ . \tag{2.18}$$

Wenn wir es mit Vierervektoren zu tun haben, so laufen griechische Indizes von 0 bis 3 und lateinische von 1 bis 3.

2.2 Lorentzgruppe und Poincarégruppe

2.2.1 Die Lorentztransformation

In der klassischen Physik einschließlich der Relativitätstheorie spielt der Tensorbegriff eine zentrale Rolle. Physikalische Gesetze lassen sich nach dem Kovarianzprinzip durch Tensorgleichungen ausdrücken:

$$\text{physikalische Gesetze} \ \Leftrightarrow \ \text{Tensorgleichungen} \ . \tag{2.19}$$

Die physikalischen Gesetze bleiben bei Koordinatentransformationen invariant. Eine Tensorgleichung verknüpft Vektoren (Tensoren 1. Stufe) und Tensoren höherer Stufe. In der Quantentheorie gibt es auch Fermionen. Sie haben halbzahligen Spin und unterscheiden sich grundlegend von den Bosonen mit ganzzahligem Spin. Beschrieben werden sie durch Spinoren. Das Kovarianzprinzip für Fermionen lautet

$$\text{physikalische Gesetze} \ \Leftrightarrow \ \text{Spinorgleichungen} \ . \tag{2.20}$$

Ein typisches Beispiel ist die Diracgleichung. Wenn man das Transformationsverhalten von Objekten wie Tensoren, Spinoren kennt, dann kann man aus ihnen invariante Größen, d.h. Lorentzinvarianten, konstruieren. So ist die Lagrangedichte eine Lorentzinvariante. Und aus ihr folgen dann die Bewegungsgleichungen.

Alle linearen Transformationen im Minkowskiraum

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu} x^\nu \tag{2.21}$$
$$\text{mit } x'_\mu y'^\mu = x_\mu y^\mu \quad \text{für alle } x, y \tag{2.22}$$

heißen Lorentztransformationen. Sie bilden die Lorentzgruppe. Die entspricht der pseudoorthogonalen Gruppe O(1,3). D.h. für die 4×4 Matrizen gilt $\Lambda \in$ O(1,3). Aus (2.22) folgt

$$g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_{\ \rho} x^\rho \Lambda^\nu_{\ \sigma} x^\sigma = g_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma \quad \Rightarrow \tag{2.23}$$
$$g_{\rho\sigma} = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_{\ \rho} \Lambda^\nu_{\ \sigma} \,. \tag{2.24}$$

Und somit

$$\Lambda^T g \Lambda = g \quad \Rightarrow \quad \det g = \det(\Lambda^T g \Lambda) \quad \Rightarrow \quad \det \Lambda = \pm 1 \,. \tag{2.25}$$

Die Lorentzgruppe lässt sich nach zwei Merkmalen klassifizieren: nach dem Vorzeichen der Determinante $\det \Lambda$ und nach dem Vorzeichen von $\Lambda^0_{\ 0}$. Die Lorentztransformationen aus

1. $L_+^\uparrow = \{\Lambda \in L : \det \Lambda = +1,\ \Lambda^0_{\ 0} > 0\}$ heißen eigentlich orthochron.
2. $L_+^\downarrow = \{\Lambda \in L : \det \Lambda = +1,\ \Lambda^0_{\ 0} < 0\}$ heißen eigentlich nicht-orthochron.
3. $L_-^\uparrow = \{\Lambda \in L : \det \Lambda = -1,\ \Lambda^0_{\ 0} > 0\}$ heißen uneigentlich orthochron.
4. $L_-^\downarrow = \{\Lambda \in L : \det \Lambda = -1,\ \Lambda^0_{\ 0} < 0\}$ heißen uneigentlich nicht-orthochron.

Sie bilden die Lorentzgruppe

$$L = L_+^\uparrow \cup L_+^\downarrow \cup L_-^\uparrow \cup L_-^\downarrow \,. \tag{2.26}$$

Die Lorentzgruppe ist als Mannigfaltigkeit nicht einfach zusammenhängend. Sie besteht aus vier getrennten Stücken, den Zweigen. Beliebige Transformationen aus verschiedenen Zweigen lassen sich nicht stetig ineinander überführen. Nur die eigentliche orthochrone Lorentzgruppe $L_+^\uparrow$ ist eine Untergruppe, da das Hintereinanderschalten zweier Transformationen nicht aus diesem Zweig herausführt. Man bezeichnet sie als spezielle Lorentzgruppe.

Beispiele für die vier Zweige 1.–4. der Lorentzgruppe sind die Identität $\mathbf{1}$ =diag(1,1,1,1), die Spiegelung P =diag(1,-1,-1,-1), die Zeitumkehr T =diag(-1,1,1,1), die Inversion $PT = -\mathbf{1}$. Sie bilden die Gruppe der diskreten Transformationen.

Es sind $L_+^\uparrow$ und

$$L_+ = L_+^\uparrow \cup L_+^\downarrow = \text{SO(1,3)} \tag{2.27}$$

Untergruppen von L. Ebenso $L_+^\uparrow \cup L_-^\uparrow$ und $L_+^\uparrow \cup L_-^\downarrow$. Dabei bedeutet SO spezielle orthogonale Gruppe und (1,3) die Signatur der Metrik. Unter $L_+^\uparrow$ sind Naturgesetze invariant (“lorentzinvariant”).

2.2.2 Die spezielle Lorentzgruppe und ihre Zerlegung

Die eigentlich orthochrone Lorentzgruppe

$$L_+^\uparrow = \{\Lambda \in O(1,3)|\det\Lambda = 1, \Lambda^0_{\ 0} > 0\} \tag{2.28}$$

enthält Rotationen und Boosts. Die Rotationen sind gegeben durch

$$\Lambda(0,\vec{\varphi}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & R(\vec{\varphi}) & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \tag{2.29}$$

mit der Achse $\frac{\vec{\varphi}}{|\vec{\varphi}|}$ und dem Winkel $\varphi = |\vec{\varphi}|$ und den Drehmatrixelementen $R(\vec{\varphi})_{ij}$.

Ein reiner Boost in ein Bezuggsystem, das sich mit der Relativgeschwindigkeit v in Richtung der x^i-Aches und $\nu = \mathrm{artanh} v/c$ bewegt, ist gegeben durch

$$\Lambda(\vec{\nu},0) = \begin{pmatrix} \cosh\nu & -\sinh\nu \\ -\sinh\nu & \cosh\nu \end{pmatrix} . \tag{2.30}$$

Die Generatoren der Drehung sind gegeben durch J_k $(k = 1, 2, 3)$,

$$\Lambda(0,\vec{\varphi}) = \exp(i\vec{\varphi}\cdot\vec{J}) \tag{2.31}$$

Die Generatoren der Boosts sind K_j $(j = 1, 2, 3)$. Also $(\vec{\nu} = \nu\vec{v}/|\vec{v}|)$

$$\Lambda(\vec{\nu},0) = \exp(i\vec{\nu}\cdot\vec{K}) . \tag{2.32}$$

Die Generatoren erfüllen die folgende Algebra

$$[J_k, J_l] = i\epsilon_{klm}J_m \qquad \text{(Drehimpulsalgebra)} \tag{2.33}$$
$$[K_j, K_n] = -i\epsilon_{jnk}J_k \tag{2.34}$$
$$[J_k, K_l] = i\epsilon_{klm}K_m . \tag{2.35}$$

Bei Glg. (2.33) handelt es sich um eine Liealgebra, die der SO(3). Die Glg. (2.35) zeigt, dass sich K wie ein Dreiervektor transformiert. Die Gleichung (2.34) sagt aus, dass zwei aufeinanderfolgende Boosts in verschiedene Richtungen keinen neuen Boost, sondern eine gewöhliche Drehung bewirken.

2.2.3 Die Poincarégruppe

Tensoren oder (relativistische) Bosonen sind Objekte, die sich nach der Tensordarstellung der Lorentzgruppe transformieren. Spinoren oder (relativistische) Fermionen sind Objekte, die sich nach der Spinordarstellung der Lorentzgruppe transformieren. Somit ist es durch das Studium der Lorentzgruppe möglich, zwischen Bosonen und Fermionen zu unterscheiden und alle Teilchen einer dieser beiden Kategorien zuzuordnen. Um aber die Welt der Elementarteilchen vollständig zu erschließen, bedarf es des Studiums der Poincarégruppe.

Die Poincarégruppe ist die Gruppe der Lorentztransformationen und der Verschiebungen im Minkowskiraum. Sie beschreibt die Struktur unserer Raum-Zeit, und alle ihre irreduziblen Darstellungen sind gekennzeichnet durch Masse und Spin, d.h. durch die fundamentalen

Eigenschaften der Elementarteilchen.

Poincarétransformationen im Minkowskiraum setzen sich aus einer Lorentztransformation mit Λ^μ_ν und aus einer Verschiebung um a^μ zusammen. Also haben wir die Translationsgruppe T und die Poincarégruppe P,

$$T = \{x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + a^\mu \ : \ a^\mu \in \mathbb{R}^4\} \quad (2.36)$$
$$P = \{x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \ : \ \Lambda^\mu_\nu \in L, \ a^\mu \in \mathbb{R}^4\} \quad (2.37)$$

Wir haben folgende Multiplikationsregel

$$(\Lambda_2, a_2)(\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2) \ . \quad (2.38)$$

Damit ist P ein semidirektes Produkt von L und T. Das semidirekte Produkt unterscheidet sich vom direkten Produkt, für das die einfachere Multiplikationsregel $(\Lambda_2, a_2)(\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2\Lambda_1, a_1 + a_2)$ gilt.

Die Generatoren der Translation sind gegeben durch

$$P_\rho = -i\partial_\rho \ , \quad (2.39)$$

denn

$$f(x') = f(x + a) = \exp(ia^\rho P_\rho) f(x) \quad \text{(Taylor-Reihe)} \ . \quad (2.40)$$

Die Generatoren der Lorentztransformation sind gegeben durch die antisymmetrischen Generatoren $M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}$. Mit den 6 Parametern $\alpha_{\mu\nu} = -\alpha_{\nu\mu}$ können wir schreiben

$$\Lambda = \exp(i\alpha_{\mu\nu} M^{\mu\nu}) \ . \quad (2.41)$$

Der Zusammenhang zwischen den Generatoren im Minkowskiraum und den Generatoren im dreidimensionalen euklidischen Raum it

$$J_j = \frac{1}{2}\epsilon_{jkl} M_{kl} \ \Rightarrow \ M_{kl} = \epsilon_{kln} J_n \quad (2.42)$$
$$K_j = M_{0j} \qquad j, k, l \geq 1 \ . \quad (2.43)$$

Die Liealgebra der Poincarégruppe lautet

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \quad (2.44)$$
$$[J_j, P_0] = 0 \quad (2.45)$$
$$[J_j, P_k] = i\epsilon_{jkl} P_l \quad (2.46)$$
$$[K_j, P_0] = -iP_j \quad (2.47)$$
$$[K_j, P_k] = -iP_0 \delta_{jk} \ . \quad (2.48)$$

Hierbei ist $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ und $j, k, l = 1, 2, 3$.

Casimir-Operatoren

Ein Casimir-Operator kommutiert mit allen Elementen der Liealgebra. Wir haben die Casimir-Operatoren

1. $P_\mu P^\mu$. Denn z.B.

$$\begin{aligned}[K_j, P_\mu P^\mu] &= [K_j, P_0^2] - [K_j, P_k \cdot P_k] \\ &\overset{(2.47),(2.48)}{=} -2iP_jP_0 + 2i\delta_{jk}P_0P_k = 0 \ . \end{aligned} \tag{2.49}$$

2. Mit dem Pauli-Lubanski-(Axial-)Vektor (relativistische Verallgemeinerung des Spinvektors)

$$W^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_\nu M_{\rho\sigma} \tag{2.50}$$

ist $W_\mu W^\mu$ ein Casimir-Operator (ohne Beweis).

Alle physikalischen Zustände (Felder, Teilchen) in der Quantenfeldtheorie werden nach den Eigenwerten dieser beiden Casimir-Operatoren klassifiziert. So ist im Ruhesystem eines massiven Teilchens mit $p^\mu = (m,0,0,0)^T$

$$\begin{aligned} W^{k,RS} &= \frac{1}{2}\epsilon^{\mu 0\rho\sigma}P_0M_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\epsilon^{k0lm}P_0M_{lm} = -\frac{1}{2}P_0\epsilon^{0klm}M_{lm} = -\frac{1}{2}P_0\epsilon^{0lmk}\epsilon_{lms}J^s \\ &= -\frac{1}{2}P_0 2\delta^k_s J_s = -mJ^k \ , \end{aligned} \tag{2.51}$$

also

$$\vec{W}^{RS} = -m\vec{J} \ . \tag{2.52}$$

Das heißt, $\vec{W}$ misst den Drehimpuls im Ruhesystem, also den Spin $\vec{S}$. Wir haben für

(a) $P_\mu P^\mu = m^2 > 0$ massives Teilchen:
$W_\mu W^\mu \overset{RS}{=} -m^2\vec{S}^2$, mit den Eigenwerten $W_\mu W^\mu = -m^2 s(s+1)$, mit $s = 0, 1/2, 1, ...$ Dies ist Poincaré-invariant und also in jedem Bezugssystem richtig. Massive Teilchen mit Spin s haben somit $(2s+1)$ Polarisationsfreiheitsgrade.

(b) $P_\mu P^\mu = m^2 = 0$ masseloses Teilchen:
$W_\mu W^\mu = 0$. Aus (2.50) folgt $P^\mu W_\mu = 0$. Somit muss W^μ proportional zu P^μ sein, also $W^\mu = \lambda P^\mu$. Bei λ handelt es sich um die Helizität (Projektion des Spins auf die normierte Flugrichtung des Teilchens) des Teilchens. Sie kann nur die Werte $\lambda = \pm s$ annehmen. Dabei ist $s = 0, 1/2, 1, ...$ der Spin der Darstellung. Daraus folgt also, dass masselose Teilchen mit $s \neq 0$ nur zwei Polarisationsfreiheitsgrade haben.

Kapitel 3

Der Lagrangeformalismus für Felder

3.1 Quantenfeldtheorie

In der klassischen Physik kennt man Teilchen und Felder, so z.B. das elektromagnetische Feld. Ein Teilchen ist durch die Angabe von Ort und Zeit festgelegt, ein Feld hingegen hat eine unendliche Anzahl von Freiheitsgraden. Teilchen werden in der Quantenmechanik durch eine Wellenfunktion beschrieben. Felder treten als äußere Felder, z.B. das Maxwellfeld, auf. Durch die Quantisierung des elektromagnetischen Feldes werden Photonen eingeführt und damit der Welle-Teilchen-Dualismus beim Licht. Aus der Sicht der theoretischen Physik sind Elementarteilchen, also die kleinsten Bausteine der Materie, die geringsten Anregungsstufen bestimmter Felder.

Um Elementarteilchen und ihre Wechselwirkungen zu beschreiben bedient man sich der **Quantenfeldtheorie (QFT)**. In ihr werden die Prinzipien der klassischen Feldtheorie und der Quantenmechanik kombiniert. Diese Theorie geht über die Quantenmechanik hinaus, indem sie Teilchen und Felder einheitlich behandelt. Es werden nicht nur Observablen wie z.B. die Energie quantisiert sondern auch die **wechselwirkenden** (Teilchen-)Felder selbst. Die Quantisierung der Felder wird auch als **Zweite Quantisierung** bezeichnet. Sie ermöglicht es, explizit die Enstehung und Vernichtung von Elementarteilchen (**Paarerzeugung**, **Annihilation**) zu berücksichtigen. **Relativistische Quantenfeldtheorien** berücksichtigen die **spezielle Relativitätstheorie** und finden in der Elementarteilchenphysik Anwendung.[1]

Die Verwendung der Quantenfeldtheorie erlaubt es, ein fundamentales Problem der Quantenmechanik zu lösen: Ihre Unfähigkeit, Systeme mit variierender Teilchenzahl zu beschreiben. Wie aus der relativistischen Quantenmechanik bekannt, gibt es gemäß der relativistischen **Klein-Gordon-Gleichung** und der **Dirac-Gleichung** Lösungen negativer Energie, die als Antiteilchen interpretiert werden. Somit können bei ausreichender Energie, Teilchen-Antiteilchen-Paare erzeugt werden.[2] Dies macht ein System mit konstanter Teilchenzahl unmöglich.

Der erste Schritt zu einer Quantenfeldtheorie besteht im Auffinden der **Lagrangedichten** für die Quantenfelder. Diese müssen als **Euler-Lagrange-Gleichtung** die Differentialgleichung für das Feld liefern. Diese sind für ein **Skalarfeld** die Klein-Gordon-Gleichung, für ein

[1] Nicht-relativistische Quantenfeldtheorien sind z.B. in der Festkörperphysik relevant.

[2] In dem Dirac-Bild entspricht das dem Anheben eines Teilchens aus dem Dirac-See der Zustände negativer Energien in einen Zustand positiver Energie. Dadurch ensteht im Dirac-See ein Loch, das als Positron interpretiert wird, sowie ein Elektron mit positiver Energie, sprich ein Elektron-Positron-Paar.

Spinorfeld die Dirac-Gleichung und für das Photon die **Maxwellgleichungen**. Sie sind die Bewegungsgleichungen für freie Felder, die nicht wechselwirken. Sie sind aus den Lagrangedichten für freie Felder abgeleitet. Um Wechselwirkungen der Felder untereinander einzuführen, müssen die Lagrangedichten um zusätzliche Terme erweitert werden.

3.2 Der Übergang vom diskreten zum kontinuierlichen System

Wir betrachten den Übergang vom diskreten zum kontinuierlichen System am Beispiel einer Kette von Massenpunkten. Die Massenpunkte mit jeweils der Masse m seien durch Federn mit der Federkonstante k miteinander verbunden. Es sei a der mittlere Abstand zweier Massenpunkte und q_i die Auslenkung des $i-$ten Massenpunktes aus der Ruhelage. Wir haben dann die kinetische Energie T

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m \dot{q}_i^2 \ . \tag{3.1}$$

Die potentielle Energie V ist gegeben durch

$$V = \sum_i \frac{1}{2} k (q_{i+1} - q_i)^2 \ . \tag{3.2}$$

Damit lautet die Bewegungsgleichung für den $i-$ten Massenpunkt

$$m\ddot{q}_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} = k(q_{i+1} - q_i) - k(q_i - q_{i-1}) \ . \tag{3.3}$$

Andererseits kann die Bewegungsgleichung auch aus der Lagrangefunktion des Systems abgeleitet werden. Diese lautet

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_i a \left[\frac{m}{a} \dot{q}_i^2 - ka \left(\frac{q_{i+1} - q_i}{a} \right)^2 \right] \ . \tag{3.4}$$

Die Bewegungsgleichung für ein einzelnes Teilchen ergibt sich unter Anwendung der Euler-Lagrangegleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{3.5}$$

zu

$$\frac{m}{a} \ddot{q}_i - ka \frac{q_{i+1} - q_i}{a^2} + ka \frac{q_i - q_{i-1}}{a^2} = 0 \ . \tag{3.6}$$

Wir bilden nun den Grenzwert $a \to 0$. Dabei gilt folgendes

1. Der Quotient m/a geht über in die Massendichte μ.

2. Es ist $\xi = (q_{i+1} - q_i)/a$ proportional zur Kraft $k(q_{i+1} - q_i)$. Die Proportionalitätskonstante ist durch die Materialkonstante y, das Youngsche Modul, gegeben. Wir haben also

$$\frac{q_{i+1} - q_i}{a} y = k(q_{i+1} - q_i) \stackrel{a \to 0}{\to} y = k \cdot a \ . \tag{3.7}$$

3. Wir gehen über vom diskreten Index i zu einem kontinuierlichen Index x. Statt des Index i wird jetzt die Lage im Ruhezustand, x, verwendet. Und statt der q_i haben wir jetzt $q(x)$ als Funktion des Ortes. Somit gilt

$$
\begin{aligned}
q_i &\rightarrow q(x) && (3.8)\\
\frac{q_{i+1}-q_i}{a} &\rightarrow \frac{q(x+a)-q(x)}{a} \overset{a\to 0}{\rightarrow} \frac{\partial q(x+a)}{\partial x} \approx \frac{\partial q(x)}{\partial x} = q'(x)\ . && (3.9)
\end{aligned}
$$

Ferner

$$
a\sum_i \rightarrow \int dx\ . \tag{3.10}
$$

Damit erhalten wir folgende Lagrangefunktion des kontinuierlichen Systems

$$
L = \int dx \left(\frac{1}{2}\mu\, \dot{q}(x)^2 - \frac{y}{2}\left(\frac{\partial q(x)}{\partial x}\right)^2 \right)\ . \tag{3.11}
$$

Der Integrand wird als Lagrangedichte $\mathcal{L}$ bezeichnet. Die Bewegungsgleichung ergibt sich aus Glg. (3.6) zu

$$
\mu\ddot{q} - y\lim_{a\to 0}\left(\frac{q'(x+a)-q'(x)}{a}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu\ddot{q} - yq'' = 0\ . \tag{3.12}
$$

Beachte, dass x <u>keine</u> verallgemeinerte Koordinate, sondern ein Index ist. Die kanonische Variable ist durch $q(x) = q(t,\vec{x})$ gegeben. Man bezeichnet $q = q(t,\vec{x})$ als <u>Feld</u>. Die Bewegungsgleichungen sind partielle Differentialgleichungen.

Für dreidimensionale Systeme haben wir

$$
L = \int dx\, dy\, dz\, \mathcal{L}\ . \tag{3.13}
$$

Die Lagrangedichte $\mathcal{L}$ ist eine Funktion von $q, dq/dt$ und $\vec{\nabla} q$. Der kanonische Impuls ist gegeben durch

$$
p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ . \tag{3.14}
$$

3.3 Die Euler-Lagrange-Gleichung für Felder

Wir wenden das Hamiltonsche Prinzip auf die Lagrangediche $\mathcal{L}(q,\dot{q},\vec{\nabla}q)$ an. Dieses besagt, dass die Wirkung S

$$
S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x\, \mathcal{L} \tag{3.15}
$$

minimiert werden soll, wobei die Randpunkte $q(t_1)$, $q(t_2)$ festliegen. Wir betrachten also die Variation

$$
0 \overset{!}{=} \delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x\, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}q)}\delta(\vec{\nabla}q)\ , \text{ mit } \delta\dot{q} = \frac{d}{dt}\delta q\ ,\ \delta(\vec{\nabla}q) = \vec{\nabla}\delta q \tag{3.16}
$$

Es wird eine partielle Integration durchgeführt, wobei die Randterme festgehalten werden, so dass ihre Variationen verschwinden, d.h. $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$. Wir fordern weiter, dass $q(t, \vec{x}) = 0$ für $|\vec{x}| \to \infty$. Damit erhalten wir

$$0 \stackrel{!}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \vec{\nabla} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\nabla} q} \right) \delta q \tag{3.17}$$

Dies muss für alle Variationen δq gelten. Damit erhalten wir die Euler-Lagrange-Gleichung für Felder

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \vec{\nabla} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\nabla} q} = 0 \; . \tag{3.18}$$

Die Hamiltondichte $\mathcal{H}$ ist gegeben durch

$$\mathcal{H} = \pi \dot{q} - \mathcal{L} \; , \quad \text{mit } \pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \; . \tag{3.19}$$

Wir betrachten als Beispiel die folgende Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2}\dot{q}^2 - \frac{y}{2}q'^2 \; . \tag{3.20}$$

Wir haben mit

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \; , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \mu \dot{q} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'} = -yq' \tag{3.21}$$

die Bewegungsgleichung

$$\mu \ddot{q} - yq'' = 0 \; . \tag{3.22}$$

3.3.1 Relativistische Schreibweise

Wir definieren

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad \text{und} \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} \quad \text{sowie} \tag{3.23}$$

$$\int dx \equiv \int dt \int d^3x \; . \tag{3.24}$$

Dabei ist $\int dx$ Lorentz-invariant (die Lorentzkontraktion wird durch die Zeitdilatation kompensiert). Mit dieser Schreibweise wird das Feld $\phi(t, \vec{x})$ dann mit $\phi(x)$ bezeichnet und die Lagrangedichte mit

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \; . \tag{3.25}$$

Die Euler-Lagrangegleichungen lassen sich dann schreiben als

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0 \qquad \text{mit} \quad \pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} \; . \tag{3.26}$$

Falls die Lagrangedichte $\mathcal{L}$ Lorentz-invariant ist, sind die Feldgleichungen kovariant.

Wir betrachten folgende Beispiele:

1. Reelles skalares Feld ohne Wechselwirkung. Die Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2 \; . \tag{3.27}$$

Damit haben wir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi \tag{3.28}$$

und somit die Bewegungsgleichung

$$-m^2\phi - \partial_\mu \partial^\mu \phi = 0 \quad \Rightarrow \quad (\Box + m^2)\phi = 0 \quad \text{mit } \partial_\mu \partial^\mu = \partial_0^2 - \vec{\nabla}^2 = \partial_0^2 - \Delta \; . \tag{3.29}$$

Hierbei handelt es sich um die aus der relativistischen Quantenmechanik bekannte Klein-Gordon-Gleichung.

2. Komplexes skalares Feld ohne Wechselwirkung. Die Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L}(\phi, \phi^*, \partial_\mu \phi, \partial_\mu \phi^*) = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \; . \tag{3.30}$$

Die Felder ϕ und ϕ^* können formal unabhängig voneinander variiert werden. Das heißt, wir haben

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} = -m^2 \phi \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} = \partial^\mu \phi \tag{3.31}$$

$$\Rightarrow \partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0 \qquad \text{und analog} \quad \partial_\mu \partial^\mu \phi^* + m^2 \phi^* = 0 \; . \tag{3.32}$$

3. Spin-1/2 Feld (Dirac-Feld) ohne Wechselwirkung. Die Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}) = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi \; , \tag{3.33}$$

wobei

$$a\!\!\!/ \; := \; a^\mu \gamma_\mu = a_\mu \gamma^\mu \tag{3.34}$$

$$\partial\!\!\!/ \; := \; \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \gamma^\mu \partial_\mu \; . \tag{3.35}$$

Es ist

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = (i\partial\!\!\!/ - m)\psi \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} = 0 \; . \tag{3.36}$$

Damit erhalten wir die Bewegungsgleichung

$$(i\partial\!\!\!/ - m)\psi = 0 \; . \tag{3.37}$$

3.4 Das Noether-Theorem für Felder

Wir wollen im folgenden zeigen: Zu jeder Symmetrie des Wirkungsintegrals gegenüber einer kontinuierlichen Transformation existiert ein Erhaltungssatz, der sich aus der Lagrangedichte bestimmen lässt.

Beweis: Wir betrachten $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$. Dabei ist φ ein Feld (ein skalares Feld φ oder $\varphi = A^\mu$ oder ein Multiplett von Feldern $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$). Wir betrachten eine infinitesimale Transformation bezüglich einer Lie-Gruppe

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \tag{3.38}$$

mit

$$\delta x^\mu = A_k^\mu \delta\omega^k \; . \tag{3.39}$$

Bei $\delta\omega^k$ handelt es sich um die Parameter der Transformation (z.B. die Eulerschen Drehwinkel). Bei einer Drehung um $\delta\vec{\omega}$ ($\exp(i\delta\omega^k J_k)$) haben wir zum Beispiel

$$\vec{x}' = \vec{x} + i\delta\omega^k J_k \vec{x} \; , \tag{3.40}$$

so dass also

$$A_k^0 = 0 \; , \quad A_k^j = i(J_k \vec{x})^j \; , j = 1, 2, 3 \; . \tag{3.41}$$

Ferner haben wir die Transformation des Feldes

$$\varphi(x) \to \varphi'(x') = \varphi(x) + \delta\varphi(x) = \varphi(x) + \Phi_k(x)\delta\omega^k \; . \tag{3.42}$$

(Zum Beispiel haben wir bei einem Skalar $\varphi'(x') = \varphi(x)$ und also $\delta\varphi(x) = 0$ und bei einem Vektor $\varphi'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu \varphi^\nu(x)$ etc.) Wir finden

$$\begin{aligned} \varphi'(x') &= \varphi'(x + \delta x) \\ &= \varphi'(x) + \delta x^\nu \partial_\nu \varphi \\ &= \varphi(x) + \delta_0\varphi(x) + \delta x^\nu \partial_\nu \varphi \; , \end{aligned} \tag{3.43}$$

mit

$$\delta_0\varphi(x) = \varphi'(x) - \varphi(x) \; . \tag{3.44}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \delta_0\varphi(x) &\overset{(3.43)}{=} \varphi'(x') - \varphi(x) - \delta x^\nu \partial_\nu \varphi \\ &\overset{(3.42)}{=} \Phi_k(x)\delta\omega^k - \delta x^\nu \partial_\nu \varphi \\ &\overset{(3.39)}{=} [\Phi_k(x) - (\partial_\nu\varphi)A_k^\nu]\delta\omega^k \; . \end{aligned} \tag{3.45}$$

Für die Variation der Lagrangedichte haben wir

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \mathcal{L}'[\varphi'(x'), \partial_\nu\varphi'(x')] - \mathcal{L}[\varphi(x), \partial_\mu\varphi(x)] \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta_0\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \underbrace{\partial^\mu\delta_0\varphi}_{=\delta_0\partial^\mu\varphi} \; . \end{aligned} \tag{3.46}$$

Anwendung der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \tag{3.47}$$

und Verwendung von (3.45) und (3.46) liefert

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\delta_0\varphi\right) \\
&= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}A_k^\mu(x)\delta\omega^k + \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}[\Phi_k(x) - (\partial_\nu\varphi)A_k^\nu(x)]\delta\omega^k\right] .
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Für die transformierte Wirkung haben wir

$$S' = \int d^4x'\,\mathcal{L}'(\varphi', \partial_\mu\varphi') \tag{3.49}$$

und

$$\delta S = S' - S = \int \delta(d^4x)\mathcal{L} + \int d^4x\,\delta\mathcal{L} . \tag{3.50}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}
d^4x' &= \left|\det\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right)\right| d^4x \\
&= |\det(\delta^\mu_\nu + \partial_\nu A_k^\mu\delta\omega^k)| d^4x \\
&= (1 + \partial_\mu A_k^\mu\delta\omega^k)d^4x ,
\end{aligned} \tag{3.51}$$

wobei wir verwendet haben

$$\det(\mathbf{1} + \epsilon) = 1 + \mathrm{tr}\epsilon + O(\epsilon^2) . \tag{3.52}$$

Damit ist also

$$\delta(d^4x) = d^4x\,\partial_\mu A_k^\mu\delta\omega^k . \tag{3.53}$$

Und somit

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int d^4x\,(\mathcal{L}\partial_\mu A_k^\mu\delta\omega^k + \delta\mathcal{L}) \\
&\overset{(3.48)}{=} \int d^4x\,\partial_\mu\left[\mathcal{L}A_k^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}[\Phi_k - (\partial_\nu\varphi)A^\nu_k]\right]\delta\omega^k .
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Man spricht von globalen Transformationen, wenn $\delta\omega^k$ unabhängig von x ist. Das Integrationsvolumen in $S = \int_V d^4x\,\mathcal{L}$ wählen wir beliebig. Wenn S invariant ist, d.h. $\delta S/\delta\omega_k = 0$, dann folgt aus Glg. (3.54), dass

$$j_k^\mu = -\mathcal{L}A_k^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}(A_k^\nu\partial_\nu\varphi - \Phi_k(x)) \tag{3.55}$$

ein erhaltener Strom ist (Noether-Theorem):

$$\partial_\mu j_k^\mu = 0 . \tag{3.56}$$

Man nennt j_k^μ Noether-Strom. Die Ladung

$$Q_k(x) = \int d^3x\, j_k^0(x) \tag{3.57}$$

ist konstant. Denn

$$\dot{Q}_k(x) = \int d^3x\, \partial_0 j_k^0 \overset{(3.56)}{=} -\int d^3x\, \vec{\nabla}\vec{j}_k = -\oint d\vec{S}\,\vec{j}_k = 0 \tag{3.58}$$

für $\vec{j}_k = 0$ im Unendlichen. Beachte, dass der erhaltene Noether-Strom nicht eindeutig ist. So kann man einen Strom $j_k^{'\mu}$ hinzuaddieren, dessen Divergenz verschwindet, also

$$\partial_\mu j_k^{'\mu} = 0\ . \tag{3.59}$$

Der Noether-Strom Glg. (3.55) kann auf den Fall mehrerer Felder φ^a in $\mathcal{L}$ verallgemeinert werden. Wir haben dann

$$j_k^\mu = -\mathcal{L}A_k^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^a)}(A_k^\nu\partial_\nu\varphi^a - \Phi_k^a(x))\ . \tag{3.60}$$

3.4.1 Beispiele

Reelles Klein-Gordon-Feld: Die Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi) - \frac{m^2}{2}\varphi^2 - V(\varphi)\ , \tag{3.61}$$

wobei $V(\varphi)$ ein beliebiges Potential ist, z.B. $V(\varphi) = \lambda/4!\,\varphi^4$. Die Lagrangedichte ist invariant unter Transformationen,

$$x^\mu \to x^\mu + \underbrace{\epsilon^\mu}_{\delta\omega^k}\quad \text{, so dass also } A_\nu^\mu(x) = \delta_\nu^\mu \tag{3.62}$$

Da φ ein Skalarfeld ist, ist es invariant, also $\delta\varphi(x) = 0$ und somit $\Phi_\nu(x) = 0$. Aus der Lagrangedichte Glg. (3.61) finden wir

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} = \partial^\mu\varphi\ . \tag{3.63}$$

Der erhaltene Strom, den man im Fall der Translationen Glg. (3.62) mit T_ν^μ bezeichnet, ist der Energie-Impuls-Tensor und gegeben durch

$$\begin{aligned} T_\nu^\mu &= -\mathcal{L}\delta_\nu^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\partial_\nu\varphi && (3.64)\\ &= -\mathcal{L}\delta_\nu^\mu + \underbrace{\partial^\mu\varphi}_{(3.63)}\partial_\nu\varphi\ . && (3.65)\end{aligned}$$

Also

$$T_\nu^\mu = \partial^\mu\varphi\,\partial_\nu\varphi - \delta_\nu^\mu\left(\frac{1}{2}(\partial_\alpha\varphi)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^2 - V(\varphi)\right)\ . \tag{3.66}$$

Die erhaltene Ladung, der Viererimpuls, ist damit

$$P_\nu = \int d^3x\, T_\nu^0\ . \tag{3.67}$$

Wir haben

$$T^0_{\ 0} = -\mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi)} \partial_0 \varphi \; . \tag{3.68}$$

In der klassischen Mechanik hatten wir die Hamiltonfunktion

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \; . \tag{3.69}$$

Der Vergleich zeigt: Bei $T^0_{\ 0}$ handelt es sich um die Hamilton-Dichte! Die kanonische Feldimpulsdichte ist gegeben durch

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}(x) \quad , \text{ wobei } \dot{\varphi} = \partial_0 \varphi \; . \tag{3.70}$$

Damit ist die Hamiltondichte

$$T^0_{\ 0} = \pi(x)\, \dot{\varphi}(x) - \mathcal{L}(x) \; . \tag{3.71}$$

Der Hamilton-Operator, der der Gesamtenergie entspricht, ist gegeben durch,

$$H = P_0 = \int d^3x\, T^0_{\ 0} = \int d^3x\, (\pi \dot{\varphi} - \mathcal{L}) = \int d^3x \, \left(\frac{1}{2} (\dot{\varphi}^2 + (\vec{\nabla}\varphi)^2 + m^2 \varphi^2) + V(\varphi) \right) \tag{3.72}$$

Und der 3er-Impuls lautet

$$\begin{aligned} P_k &= \int d^3x\, T^0_{\ k} = \int d^3x\, \dot{\varphi}\, \partial_k \varphi & (3.73) \\ P^k &= -\int d^3x\, \dot{\varphi}\, \partial_k \varphi & (3.74) \\ \vec{P} &= -\int d^3x\, \dot{\varphi}\, \vec{\nabla}\varphi = -\int d^3x \quad \underbrace{\pi(x)\, \vec{\nabla}\varphi}_{\text{Impulsdichte}} \quad . & (3.75) \end{aligned}$$

Als nächstes Beispiel betrachten wir infinitesimale Drehungen. Das heisst

$$\begin{aligned} \delta\vec{x} &= i\delta\omega^k J_k\, \vec{x} \; , \quad \delta x^0 = 0 & (3.76) \\ A^j_k &= i(J_k \vec{x})^j \; , \quad A^0_k = 0 \; , \qquad j,k = 1,2,3 & (3.77) \\ \delta\varphi &= 0 = \Phi_k \; . & (3.78) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir aus (3.55)

$$\begin{aligned} j^0_k &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_0 \varphi} A^j_k (\partial_j \varphi) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} (\vec{\nabla}\varphi)^T i J_k \vec{x} \\ &\overset{(3.63)}{=} \dot{\varphi} (\vec{\nabla}\varphi)^T i J_k \vec{x} \; . & (3.79) \end{aligned}$$

Die Impulsdichte, siehe Glg. (3.75), ist definiert durch

$$\vec{p} = -\dot{\varphi} \vec{\nabla}\varphi \; , \tag{3.80}$$

und damit

$$\vec{P} = \int d^3x\, \vec{p}(x) \; . \tag{3.81}$$

Somit haben wir

$$\begin{aligned} j^0_k &= -\vec{p}^T iJ_k\vec{x} = -p_m \underbrace{(iJ_k)_{mn}}_{=\epsilon_{kmn}\,(\mathbf{??})} x_n \\ &= -\epsilon_{kmn}p_m x_n = -(\vec{p}\times\vec{x})_k \;. \end{aligned} \tag{3.82}$$

Damit finden wir also, das $-j^0_k$ eine Drehimpulsdichte ist. Die erhaltene Ladung ist also der Drehimpuls, denn mit (3.57) ist

$$L_k = \int d^3x\, j^0_k(x) \tag{3.83}$$

$$\vec{L} = \int d^3x\, (\vec{x}\times\vec{p}) \;. \tag{3.84}$$

Wir betrachten nun das Noether-Theorem für eine innere Symmetrie. Wir wenden dies für ein komplexes Feld mit Selbstwechselwirkung an. Die Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi^* - m|\varphi|^2 - V(|\varphi|) \;. \tag{3.85}$$

Die Lagrangedichte ist invariant unter einer $U(1)$ Symmetrie, d.h. unter der Transformation

$$\varphi \;\to\; \varphi\exp(i\delta\vartheta) = \varphi + i\delta\vartheta\,\varphi \tag{3.86}$$

$$\delta x^\mu \;=\; 0 \;\;\Rightarrow\;\; A^\mu_k = 0 \tag{3.87}$$

$$\left.\begin{aligned} \delta\varphi &= i\delta\vartheta\,\varphi \\ \delta\varphi^* &= -i\delta\vartheta\,\varphi^* \end{aligned}\right\} \;\overset{(3.42)}{\Rightarrow}\; \begin{pmatrix} \delta\varphi \\ \delta\varphi^* \end{pmatrix} = \Phi\,\delta\vartheta\;, \qquad \text{mit} \tag{3.88}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} i\varphi \\ -i\varphi^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \end{pmatrix} \;. \tag{3.89}$$

Der Noether-Strom (3.55) lautet

$$\begin{aligned} j^\mu &= -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\,\Phi^1 - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^*)}\,\Phi^2 \\ &= -i(\partial^\mu\varphi^*)\varphi + i(\partial^\mu\varphi)\varphi^* \;. \end{aligned} \tag{3.90}$$

Die dazu gehörige erhaltene Ladung ist

$$Q = \int d^3x\, j^0 = i\int d^3x\, (\varphi^*\dot{\varphi} - \varphi\dot{\varphi}^*) \;. \tag{3.91}$$

Wir betrachten die $U(1)$ Symmetrie der Dirac-Theorie. Die Dirac-Lagrangedichte ist invariant unter den Transformationen

$$\psi \to \exp(i\theta)\,\psi\;, \qquad \bar{\psi} \to \exp(-i\theta)\,\bar{\psi} \;. \tag{3.92}$$

Die Lagrangedichte ist gegeben durch

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi + e\,\bar{\psi}A\!\!\!/\bar{\psi} \;. \tag{3.93}$$

Sie beinhaltet die Kopplung an das elektromagnetische Feld A^μ. Wir haben für Φ

$$\Phi = \begin{pmatrix} i\psi_a \\ -i\bar{\psi}_a \end{pmatrix} \qquad \text{mit dem Spinorindex } a = 1,2,3,4 \;. \tag{3.94}$$

Damit haben wir den Noetherstrom

$$j^\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_a)}\, i\psi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi}_a)}\, i\bar{\psi}_a = -i\bar{\psi}\gamma^\mu i\psi = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \; . \tag{3.95}$$

Dies ist die $U(1)$-Stromdichte des Dirac-Feldes. Ist ψ das Elektronenfeld, so ist $ej^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ die elektromagnetische Stromdichte. Und es ist

$$Q = e\int d^3x\, j^0 = e\int d^3x\, \bar{\psi}\gamma^0\psi = e\int d^3x\, \psi^\dagger\psi \tag{3.96}$$

die erhaltene elektrische Gesamtladung. Es ist also $e\psi^\dagger\psi$ die Ladungsdichte.

Kapitel 4

Appendix

4.1 Die spezielle Lorentzgruppe und ihre Zerlegung

Die eigentlich orthochrone Lorentzgruppe $L_+^\uparrow$ enthält Rotationen und Boosts. Die Rotationen sind gegeben durch

$$\Lambda(0,\vec{\varphi}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & R(\vec{\varphi}) & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

mit der Achse $\frac{\vec{\varphi}}{|\vec{\varphi}|}$ und dem Winkel $\varphi = |\vec{\varphi}|$ und den Drehmatrixelementen

$$R(\vec{\varphi})_{ij} = \frac{\varphi_i\varphi_j}{\varphi^2} + \left(\delta_{ij} - \frac{\varphi_i\varphi_j}{\varphi^2}\right)\cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{\varphi}\epsilon_{ijk}\varphi_k \; . \tag{4.2}$$

Ein reiner Boost in ein Bezuggsystem, das sich mit der Relativgeschwindigket $\vec{v}$ bewegt, ist gegeben durch

$$\Lambda(\vec{u},0) = \begin{pmatrix} \cosh u & -\frac{\vec{u}^T}{u}\sinh u \\ -\frac{\vec{u}}{u}\sinh u & \mathbf{1}_{3\times 3} + \frac{\vec{u}\cdot\vec{u}^T}{u^2}(\cosh u - 1) \end{pmatrix} \; . \tag{4.3}$$

Dabei ist u die Rapidität, $u = \operatorname{arctanh}|\vec{v}|$, und $\vec{u} = u\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$. Für $\vec{u}_1 \parallel \vec{u}_2$ ist $\Lambda(\vec{u}_1,0)\Lambda(\vec{u}_2,0) = \Lambda(\vec{u}_1+\vec{u}_2,0)$. Die Generatoren der Drehung sind gegeben durch J_k $(k = 1,2,3)$,

$$\Lambda(0,\vec{\varphi}) = \exp(i\vec{\varphi}\cdot\vec{J}) \tag{4.4}$$

$$\text{mit } [J_k]_{lm} = -i\epsilon_{klm} \text{ und } [J_k]_{0\mu} = [J_k]_{\mu 0} = 0 \tag{4.5}$$

$$\Rightarrow \; [J_k]_{\lambda\mu} = -i\epsilon_{0k\lambda\mu} \; . \tag{4.6}$$

In der QMII Vorlesung war $[J_k]_{lm} = w^{(k)}_{lm}$. Die Generatoren der Boosts sind K_j $(j = 1,2,3)$. Also

$$\Lambda(\vec{u},0) = \exp(i\vec{u}\cdot\vec{K}) \tag{4.7}$$

mit

$$[K_j]_{\lambda\mu} = i\delta_{\lambda 0}\delta_{j\mu} + i\delta_{0\mu}\delta_{\lambda j} \; , \tag{4.8}$$

also

$$K_j = i \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \\ 1 & & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & \dots & & 0 \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

Es gilt

$$J_k = J_k^\dagger \qquad \text{und} \qquad K_j = -K_j^\dagger \ . \tag{4.10}$$

Die Generatoren erfüllen die folgende Algebra

$$[J_k, J_l] = i\epsilon_{klm} J_m \qquad \text{(Drehimpulsalgebra)} \tag{4.11}$$
$$[K_j, K_n] = -i\epsilon_{jnk} J_k \tag{4.12}$$
$$[J_k, K_l] = i\epsilon_{klm} K_m \ . \tag{4.13}$$

Bei Glg. (4.11) handelt es sich um eine Liealgebra, die der SO(3). Die Glg. (4.13) zeigt, dass sich K wie ein Dreiervektor transformiert. Die Gleichung (4.12) sagt aus, dass zwei aufeinanderfolgende Boosts in verschiedene Richtungen keinen neuen Boost, sondern eine gewöhliche Drehung bewirken. Mit der Einführung von

$$T_j^+ = \frac{1}{2}(J_j + iK_j) \tag{4.14}$$
$$T_j^- = \frac{1}{2}(J_j - iK_j) \text{ , für die gilt } T_j^{+\dagger} = T_j^+ \quad \text{und} \quad T_j^{-\dagger} = T_j^- \quad \text{(hermitesch)} \tag{4.15}$$

erhalten wir die einfachen Vertauschungsrelationen

$$[T_j^+, T_j^-] = 0 \tag{4.16}$$
$$\left[T_j^+, T_k^+\right] = i\epsilon_{jkl} T_l^+ \tag{4.17}$$
$$\left[T_j^-, T_k^-\right] = i\epsilon_{jkl} T_l^- \ . \tag{4.18}$$

Jeder dieser Operatoren erfüllt also für sich die SU(2) Liealgebra. Damit lässt sich jedes $\Lambda \in L_+^\uparrow$ schreiben als

$$\Lambda = \exp(i\vec{\alpha} \cdot \vec{T}^+) \exp(i\vec{\alpha}^* \cdot \vec{T}^-) = \exp(i(\vec{\alpha} \cdot \vec{T}^+ + \vec{\alpha}^* \cdot \vec{T}^-)) \tag{4.19}$$
$$\text{da} \quad [\vec{\alpha} \cdot \vec{T}^+, \vec{\alpha}^* \cdot \vec{T}^-] = 0 \ . \tag{4.20}$$

Es ist SU(4) $\cong$ SU(2)$\times$SU(2), aber $L_+^\uparrow$ ist einfach. Wenn

$$\vec{\alpha} = \vec{\varphi} \text{ reell} \quad \Rightarrow \quad \vec{\alpha} \cdot \vec{T}^+ + \vec{\alpha}^* \cdot \vec{T}^- = \vec{\varphi} \cdot \vec{J} \tag{4.21}$$
$$\text{Drehung } \Lambda(0, \vec{\varphi})$$
$$\vec{\alpha} = -i\vec{u} \text{ imaginär} \quad \Rightarrow \quad \vec{\alpha} \cdot \vec{T}^+ + \vec{\alpha}^* \cdot \vec{T}^- = \vec{u} \cdot \vec{K} \tag{4.22}$$
$$\text{Boost } \Lambda(\vec{u}, 0) \ .$$

Abgesehen von der trivialen Darstellung $(0, 0)$ mit dem Spin Null sind die einfachsten irreduziblen Darstellungen gegeben durch:

1. Die *linke Fundamentaldarstellung* $(\frac{1}{2}, 0)$. Sie hat den Spin $\frac{1}{2}$ und stellt einen linkshändingen

Spinor Ψ_L dar. Dieser transformiert sich nach einer Spinordarstellung von Λ mit $\vec{T}^+ = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$ und $\vec{T}^- = 0$. D.h.

$$\Psi_L(x) \to \Psi'_L(x') = A_L \Psi_L(x) \ , \tag{4.23}$$

mit

$$A_L := \Lambda^{(\frac{1}{2},0)} = \exp\left\{\frac{i}{2}(\vec{\varphi} - i\vec{u}) \cdot \vec{\sigma}\right\} \ . \tag{4.24}$$

2. Die *rechte Fundamentaldarstellung* $(0, \frac{1}{2})$ beschreibt einen rechsthändigen Spinor Ψ_R mit ebenfalls Spin $\frac{1}{2}$. Er transformiert sich nach einer Spinordarstellung von Λ mit $\vec{T}^+ = 0$ und $\vec{T}^- = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$. D.h.

$$\Psi_R(x) \to \Psi'_R(x') = A_R \Psi_R(x) \ , \tag{4.25}$$

mit

$$A_R := \Lambda^{(0,\frac{1}{2})} = \exp\left\{\frac{i}{2}(\vec{\varphi} + i\vec{u}) \cdot \vec{\sigma}\right\} \ . \tag{4.26}$$

Die beiden Darstellungen A_L und A_R sind nicht unitär. Sie liefern eine Zerlegung in reine Drehungen und Boosts

$$A_{L,R}(\vec{\varphi}, \vec{u}) = U(\varphi) A_{L,R}(0, \vec{u}) \ , \tag{4.27}$$

wobei U eine unitäre Matrix $U \in \mathrm{SU}(2)$ ist,

$$U = \exp\left(-\frac{i}{2}\vec{\varphi}\vec{\sigma}\right) \ . \tag{4.28}$$

Für reine Drehungen ($\vec{u} = 0$) fallen beide Darstellungen zusammen.