

# Theoretische Teilchenphysik I

SOMMERSEMESTER 2018

KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)

GEHALTEN VON

PROF. DR. M. M. MÜHLEITNER



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vorbemerkungen</b>	<b>1</b>
1.1	Organisatorisches . . . . .	1
1.2	Literatur . . . . .	1
1.3	Vorläufige Inhaltsangabe . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
2.1	Konventionen . . . . .	3
2.2	Lorentzgruppe und Poincarégruppe . . . . .	5
2.2.1	Die Lorentztransformation . . . . .	5
2.2.2	Die spezielle Lorentzgruppe und ihre Zerlegung . . . . .	7
2.2.3	Die Poincarégruppe . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Der Lagrangeformalismus für Felder</b>	<b>9</b>
3.1	Quantenfeldtheorie . . . . .	9
3.2	Der Übergang vom diskreten zum kontinuierlichen System . . . . .	10
3.3	Die Euler-Lagrange-Gleichung für Felder . . . . .	11
3.3.1	Relativistische Schreibweise . . . . .	12
3.4	Das Noether-Theorem für Felder . . . . .	14
3.4.1	Beispiele . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Quantisierung der Felder</b>	<b>21</b>
4.1	Wiederholung der Quantenmechanik . . . . .	21
4.1.1	Schödinger-Bild . . . . .	21
4.1.2	Heisenberg-Bild . . . . .	22
4.2	Exkurs: Lagrangedichten für Teilchen mit Spin $0, \frac{1}{2}, 1$ . . . . .	22
4.2.1	Konstruktion von Lagrangedichten . . . . .	23
4.3	Die Quantisierung des skalaren Feldes . . . . .	23
4.3.1	Übergang zum quantisierten Feld . . . . .	25
4.3.2	Konstruktion der Zustände . . . . .	26
4.3.3	Der Kommutator $[\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})]$ . . . . .	32
4.4	Geladenes skalares Feld . . . . .	32
4.5	Die Quantisierung von Spinorfeldern (Dirac-Feldern) . . . . .	36
4.5.1	Quantisierung . . . . .	37
4.5.2	Operatoralgebra . . . . .	37
4.6	Der Feynman-Propagator für ein skalares Feld . . . . .	39
4.7	Der Fermionpropagator . . . . .	42
4.8	Quantisierung von Spin-1-Feldern (Vektorfeldern) . . . . .	43

4.8.1	Massives Vektorfeld . . . . .	43
4.8.2	Masseloses Vektorfeld (Photonfeld) . . . . .	45
4.9	Der Feynman-Propagator für das Photonfeld . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Wechselwirkung, Störungstheorie</b>	<b>51</b>
5.1	Freie Theorie . . . . .	51
5.2	Wechselwirkungsterme . . . . .	51
5.3	Wechselwirkungsbild . . . . .	53
5.4	Die Zeitentwicklung der Zustände - $S$ -Matrix . . . . .	53
5.5	Bestimmung der $S$ -Matrix . . . . .	54
<b>6</b>	<b>Appendix</b>	<b>57</b>
6.1	Die spezielle Lorentzgruppe und ihre Zerlegung . . . . .	57

# Kapitel 1

## Vorbemerkungen

### 1.1 Organisatorisches

Webseite der Vorlesung: <https://www.itp.kit.edu/courses/ss2018/ttp1/start>

Vorlesungszeiten: Mo, 14-15h30 und Fr, 14-15h30; Ort: Otto-Lehmann Hörsaal;  
Übungen: Mittwoch nachmittags

Übungsleiter: Philipp Basler, Marcel Krause;  
Tutorinnen/Tutoren: Jonas Müller, Dr. Shruti Patel, Emma S. Dore

Kriterien für Erhalt des Übungsscheins, Informationen zur Ausfertigung der Übungsblätter,  
Termine der Übungsgruppen, Übungsblätter zum Download: siehe Webseite

### 1.2 Literatur

Lehrbücher:

- [1 ] Bailin, David und Love, Alexander: *Introduction to gauge field theory*, Hilger
- [2 ] Bjorken, James D. und Drell, Sidney D.: *Relativistische Quantenfeldtheorie*, BI-Wissenschaftsverlag.
- [3 ] Böhm, M., Denner, A. und Joos, H.: *Gauge Theories of the Strong and Electroweak Interaction*, Teubner Verlag
- [4 ] Cheng, Ta-Pei und Li, Ling-Fong: *Gauge theory of elementary partilce physics*, Oxford Science Publications
- [5 ] Halzen, Francis und Martin, Alan D.: *Quarks and Leptons*, John Wiley & Sons, Inc.
- [6 ] Itzykson, Claude und Zuber, Jean-Bernard: *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill
- [7 ] Kaku, Michio: *Quantum field theory*, Oxford University Press
- [8 ] Kugo, Thaichiro: *Eichtheorie*, Springer
- [9 ] Nachtmann, Otto: *Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik*, Vieweg

- [10 ] Peskin, Michael E. und Schroeder, Daniel V.: *An introduction to quantum field theory*, Addison-Wesley
- [11 ] Pokorski, Stefan: *Gauge field theories*, Cambridge University Press
- [12 ] Ramond, Pierre: *Field theory*, Addison-Wesley
- [13 ] Ryder, L.H.: *Quantum Field theory*, Cambridge University Press
- [14 ] Sterman, George: *An Introduction to Quantum Field Theory*, Cambridge University Press
- [15 ] Weinberg, Steven: *The quantum theory of fields*, Cambridge University Press

Webseiten:

<http://pdg.lbl.gov>    Particle Data Group

<http://inspirehep.net>    Datenbank INSPIRE für Publikationen

<http://arxiv.org>    Preprint-Archiv

<http://www.cern.ch>    CERN

## 1.3 Vorläufige Inhaltsangabe

1. Vorbemerkungen
2. Einleitung (Konventionen, Lorentzgruppe und Poincarégruppe)
3. Lagrangeformalismus für Felder (Bewegungsgleichungen, Noether Theorem, innere Symmetrien, Gruppentheorie)
4. Quantisierung des skalaren Feldes
5. Quantisierung von Spinorfeldern (Dirac-Feld)
6. Quantisierung von Spin-1 Feldern (Vektorfeldern)
7. Störungstheorie, Feynmanregeln, Feynman-Diagramme
8. Berechnung von Wirkungsquerschnitten
9. ...

# Kapitel 2

## Einleitung

Elementarteilchenphysik bedeutet Physik bei kleinsten Abständen bzw. höchsten (relativistischen) Energien. Siehe z.B. Welle-Teilchen-Dualität und die De-Broglie Beziehung

$$E = h\nu \rightsquigarrow E \uparrow \Leftrightarrow \nu \uparrow \Leftrightarrow \lambda \downarrow \quad \text{kleinste Abstände .} \quad (2.1)$$

Die Grundlage zur Beschreibung der Hochenergiephysik bildet die Quantenfeldtheorie. Bei den Teilchen handelt es sich um Anregungszustände von Quantenfeldern.

Warum aber betreiben wir Hochenergiephysik? Der Grund ist, daß wir Antworten auf unsere grundlegenden Fragen über das Universum suchen:

1. Woraus besteht das Universum?
2. Wie entwickelte sich das Universum?
3. Was sind die Bausteine der Materie, und welche Kräfte halten sie zusammen?

Wie ist der heutige Stand der Elementarteilchenphysik?

1. Die uns bekannte Materie kann durch wenige fundamentale Teilchen beschrieben werden.
2. Die verschiedenen Wechselwirkungen werden durch fundamentale Kräfte zwischen den Teilchen beschrieben.
3. Die herrschenden physikalischen Gesetzmäßigkeiten können mathematisch mithilfe einfacher fundamentaler Prinzipien beschrieben werden. (Mit Ausnahme der Gravitation)

### 2.1 Konventionen

**Natürliche Einheiten** In der theoretischen Teilchenphysik werden natürliche Einheiten (Planck Einheiten) gewählt. Dabei werden die Lichtgeschwindigkeit  $c$  und das Plancksche Wirkungsquantum  $\hbar$  gleich 1 gesetzt. Als Energieeinheit, die dadurch nicht festgelegt wird, wird das Elektronenvolt verwendet:  $1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ .

1. Die Lichtgeschwindigkeit  $c$  wird gleich 1 gesetzt:

$$c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \equiv 1 \Rightarrow 1 \text{ s} = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \quad (2.2)$$

2. Die Plancksche Wirkungskonstante wird gleich 1 gesetzt:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 6.6 \cdot 10^{-25} \text{ GeV s} \equiv 1 \Rightarrow 1 \text{ s} = 1.5 \cdot 10^{24} \text{ GeV}^{-1} . \quad (2.3)$$

Und

$$\hbar c = 1 \Rightarrow 1 \text{ m} = 5.1 \cdot 10^{15} \text{ GeV}^{-1} . \quad (2.4)$$

Sowie

$$m = \frac{E_{\text{Ruhe}}}{c^2} = E_{\text{Ruhe}} \quad (2.5)$$

$$m = \frac{1 \text{ eV}}{c^2} = \frac{1.6 \cdot 10^{-19}}{(3 \cdot 10^8)^2} \text{ kg} = 1.78 \cdot 10^{-36} \text{ kg} \stackrel{!}{=} 1 \text{ eV} \Rightarrow 1 \text{ kg} = 5.6 \cdot 10^{26} \text{ GeV} \quad (2.6)$$

3. Die elektrische Elementarladung  $e > 0$  ist gegeben durch die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante  $\alpha$ :

$$\frac{e^2}{4\pi} = \alpha \approx \frac{1}{137\dots} \Rightarrow e = 0.3. \quad (2.7)$$

Die Ladung  $e$  ist dimensionslos!

Somit sind also alle physikalischen Einheiten Potenzen der Energie. Der Exponent ist die (Massen-) Dimension. So haben wir also

$$[\text{Länge}] = [\text{Zeit}] = -1, \quad [\text{Masse}] = 1, \quad [e] = 0. \quad (2.8)$$

**Minkowski-Metrik** Ein metrischer Raum ist ein Vektorraum mit einer Metrik. Wir haben den kontravarianten Vierervektor

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} \quad (\text{kontravariant}) . \quad (2.9)$$

Der zu dem Vektorraum gehörige Dualraum enthält als Elemente die kovarianten Vierervektoren

$$x_\mu = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -\vec{x} \end{pmatrix} \quad (\text{kovariant}) . \quad (2.10)$$

Der Übergang zwischen kontra- und kovariant wird durch die Minkowski-Metrik  $g_{\mu\nu}$  vermittelt,

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -\vec{x} \end{pmatrix} . \quad (2.11)$$



Das Skalarprodukt ist gegeben durch

$$x \cdot y = x_\mu y^\mu = x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y}. \quad (2.12)$$

Es ist

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \quad \text{und} \quad g_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu. \quad (2.13)$$

**Levi-Civita-Tensor** Der Levi-Civita-Tensor ist definiert durch

$$e^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{für gerade Permutationen} \\ -1 & \text{für ungerade Permutationen} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.14)$$

Dabei ist

$$\epsilon^{0123} = +1 \quad \Rightarrow \quad \epsilon_{0123} = g_{0\mu} g_{1\nu} g_{2\rho} g_{3\sigma} e^{\mu\nu\rho\sigma} = g_{00} g_{11} g_{22} g_{33} \epsilon^{0123} = -\epsilon^{0123} = -1. \quad (2.15)$$

Wir haben auch

$$\epsilon^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_2, \quad \text{d.h. } \epsilon^{12} = 1. \quad (2.16)$$

**Einsteinsche Summenkonvention** Über doppelt auftretende Indizes wird summiert, d.h.

$$a_i b_i = \sum_i a_i b_i. \quad (2.17)$$

Meist haben wir

$$a_\mu b_\mu = \sum_{\mu=0}^3 a_\mu b^\mu. \quad (2.18)$$

Wenn wir es mit Vierervektoren zu tun haben, so laufen griechische Indizes von 0 bis 3 und lateinische von 1 bis 3.

## 2.2 Lorentzgruppe und Poincarégruppe

### 2.2.1 Die Lorentztransformation

In der klassischen Physik einschließlich der Relativitätstheorie spielt der Tensorbegriff eine zentrale Rolle. Physikalische Gesetze lassen sich nach dem Kovarianzprinzip durch Tensorgleichungen ausdrücken:

$$\text{physikalische Gesetze} \Leftrightarrow \text{Tensorgleichungen}. \quad (2.19)$$

Die physikalischen Gesetze bleiben bei Koordinatentransformationen invariant. Eine Tensorgleichung verknüpft Vektoren (Tensoren 1. Stufe) und Tensoren höherer Stufe. In der Quantentheorie gibt es auch Fermionen. Sie haben halbzahligen Spin und unterscheiden sich grundlegend von den Bosonen mit ganzzahligem Spin. Beschrieben werden sie durch Spinoren. Das Kovarianzprinzip für Fermionen lautet

$$\text{physikalische Gesetze} \Leftrightarrow \text{Spinorgleichungen}. \quad (2.20)$$

Ein typisches Beispiel ist die Diracgleichung. Wenn man das Transformationsverhalten von Objekten wie Tensoren, Spinoren kennt, dann kann man aus ihnen invariante Größen, d.h. Lorentzinvarianten, konstruieren. So ist die Lagrangedichte eine Lorentzinvariante. Und aus ihr folgen dann die Bewegungsgleichungen.

Alle linearen Transformationen im Minkowskiraum

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (2.21)$$

$$\text{mit } x'_\mu y'^\mu = x_\mu y^\mu \quad \text{für alle } x, y \quad (2.22)$$

heißen Lorentztransformationen. Sie bilden die Lorentzgruppe. Die entspricht der pseudorthogonalen Gruppe  $O(1,3)$ . D.h. für die  $4 \times 4$  Matrizen gilt  $\Lambda \in O(1,3)$ . Aus (2.22) folgt

$$g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho x^\rho \Lambda^\nu_\sigma x^\sigma = g_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma \quad \Rightarrow \quad (2.23)$$

$$g_{\rho\sigma} = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma . \quad (2.24)$$

Und somit

$$\Lambda^T g \Lambda = g \quad \Rightarrow \quad \det g = \det(\Lambda^T g \Lambda) \quad \Rightarrow \quad \det \Lambda = \pm 1 . \quad (2.25)$$

Die Lorentzgruppe lässt sich nach zwei Merkmalen klassifizieren: nach dem Vorzeichen der Determinante  $\det \Lambda$  und nach dem Vorzeichen von  $\Lambda^0_0$ . Die Lorentztransformationen aus

1.  $L_+^\uparrow = \{\Lambda \in L : \det \Lambda = +1, \Lambda^0_0 > 0\}$  heißen eigentlich orthochron.
2.  $L_+^\downarrow = \{\Lambda \in L : \det \Lambda = +1, \Lambda^0_0 < 0\}$  heißen eigentlich nicht-orthochron.
3.  $L_-^\uparrow = \{\Lambda \in L : \det \Lambda = -1, \Lambda^0_0 > 0\}$  heißen uneigentlich orthochron.
4.  $L_-^\downarrow = \{\Lambda \in L : \det \Lambda = -1, \Lambda^0_0 < 0\}$  heißen uneigentlich nicht-orthochron.

Sie bilden die Lorentzgruppe

$$L = L_+^\uparrow \cup L_+^\downarrow \cup L_-^\uparrow \cup L_-^\downarrow . \quad (2.26)$$

Die Lorentzgruppe ist als Mannigfaltigkeit nicht einfach zusammenhängend. Sie besteht aus vier getrennten Stücken, den Zweigen. Beliebige Transformationen aus verschiedenen Zweigen lassen sich nicht stetig ineinander überführen. Nur die eigentliche orthochrone Lorentzgruppe  $L_+^\uparrow$  ist eine Untergruppe, da das Hintereinanderschalten zweier Transformationen nicht aus diesem Zweig herausführt. Man bezeichnet sie als spezielle Lorentzgruppe.

Beispiele für die vier Zweige 1.–4. der Lorentzgruppe sind die Identität  $\mathbf{1} = \text{diag}(1,1,1,1)$ , die Spiegelung  $P = \text{diag}(1,-1,-1,-1)$ , die Zeitumkehr  $T = \text{diag}(-1,1,1,1)$ , die Inversion  $PT = -\mathbf{1}$ . Sie bilden die Gruppe der diskreten Transformationen.

Es sind  $L_+^\uparrow$  und

$$L_+ = L_+^\uparrow \cup L_+^\downarrow = \text{SO}(1,3) \quad (2.27)$$

Untergruppen von  $L$ . Ebenso  $L_+^\uparrow \cup L_-^\uparrow$  und  $L_+^\downarrow \cup L_-^\downarrow$ . Dabei bedeutet SO spezielle orthogonale Gruppe und (1,3) die Signatur der Metrik. Unter  $L_+^\uparrow$  sind Naturgesetze invariant (“lorentzinvariant”).

## 2.2.2 Die spezielle Lorentzgruppe und ihre Zerlegung

Die eigentlich orthochrone Lorentzgruppe

$$L_+^\uparrow = \{\Lambda \in O(1, 3) | \det \Lambda = 1, \Lambda_0^0 > 0\} \quad (2.28)$$

enthält Rotationen und Boosts. Die Rotationen sind gegeben durch

$$\Lambda(0, \vec{\varphi}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & R(\vec{\varphi}) & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

mit der Achse  $\frac{\vec{\varphi}}{|\vec{\varphi}|}$  und dem Winkel  $\varphi = |\vec{\varphi}|$  und den Drehmatrixelementen  $R(\vec{\varphi})_{ij}$ .

Ein reiner Boost in ein Bezugssystem, das sich mit der Relativgeschwindigkeit  $v$  in Richtung der  $x^i = x$ -Achse und  $\nu = \operatorname{artanh} v$  bewegt, ist gegeben durch

$$\Lambda(\vec{\nu}, 0) = \begin{pmatrix} \cosh \nu & -\sinh \nu & 0 & 0 \\ -\sinh \nu & \cosh \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Die Generatoren der Drehung sind gegeben durch  $J_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ),

$$\Lambda(0, \vec{\varphi}) = \exp(i\vec{\varphi} \cdot \vec{J}) \quad (2.31)$$

Die Generatoren der Boosts sind  $K_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Also ( $\vec{\nu} = \nu \vec{v}/|\vec{v}|$ )

$$\Lambda(\vec{\nu}, 0) = \exp(i\vec{\nu} \cdot \vec{K}). \quad (2.32)$$

Die Generatoren erfüllen die folgende Algebra

$$[J_k, J_l] = i\epsilon_{klm} J_m \quad (\text{Drehimpulsalgebra}) \quad (2.33)$$

$$[K_j, K_n] = -i\epsilon_{jnk} J_k \quad (2.34)$$

$$[J_k, K_l] = i\epsilon_{klm} K_m. \quad (2.35)$$

Bei Glg. (2.33) handelt es sich um eine Liealgebra, die der  $SO(3)$ . Die Glg. (2.35) zeigt, dass sich  $K$  wie ein Dreiervektor transformiert. Die Gleichung (2.34) sagt aus, dass zwei aufeinanderfolgende Boosts in verschiedene Richtungen keinen neuen Boost, sondern eine gewöhnliche Drehung bewirken.

## 2.2.3 Die Poincarégruppe

Tensoren oder (relativistische) Bosonen sind Objekte, die sich nach der Tensordarstellung der Lorentzgruppe transformieren. Spinoren oder (relativistische) Fermionen sind Objekte, die sich nach der Spinordarstellung der Lorentzgruppe transformieren. Somit ist es durch das Studium der Lorentzgruppe möglich, zwischen Bosonen und Fermionen zu unterscheiden und alle Teilchen einer dieser beiden Kategorien zuzuordnen. Um aber die Welt der Elementarteilchen vollständig zu erschließen, bedarf es des Studiums der Poincarégruppe.

Die Poincarégruppe ist die Gruppe der Lorentztransformationen und der Verschiebungen im Minkowskiraum. Sie beschreibt die Struktur unserer Raum-Zeit, und alle ihre irreduziblen

Darstellungen sind gekennzeichnet durch Masse und Spin, d.h. durch die fundamentalen Eigenschaften der Elementarteilchen.

Poincarétransformationen im Minkowskiraum setzen sich aus einer Lorentztransformation mit  $\Lambda_\nu^\mu$  und aus einer Verschiebung um  $a^\mu$  zusammen. Also haben wir die Translationsgruppe  $T$  und die Poincarégruppe  $P$ ,

$$T = \{x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + a^\mu : a^\mu \in \mathbb{R}^4\} \quad (2.36)$$

$$P = \{x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu + a^\mu : \Lambda_\nu^\mu \in L, a^\mu \in \mathbb{R}^4\} \quad (2.37)$$

Wir haben folgende Multiplikationsregel

$$(\Lambda_2, a_2)(\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2) . \quad (2.38)$$

Damit ist  $P$  ein semidirektes Produkt von  $L$  und  $T$ . Das semidirekte Produkt unterscheidet sich vom direkten Produkt, für das die einfachere Multiplikationsregel  $(\Lambda_2, a_2)(\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2\Lambda_1, a_1 + a_2)$  gilt.

Die Generatoren der Translation sind gegeben durch

$$P_\rho = -i\partial_\rho , \quad (2.39)$$

denn

$$f(x') = f(x + a) = \exp(ia^\rho P_\rho)f(x) \quad (\text{Taylor-Reihe}) . \quad (2.40)$$

Die Generatoren der Lorentztransformation sind gegeben durch die antisymmetrischen Generatoren  $M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}$ . Mit den 6 Parametern  $\alpha_{\mu\nu} = -\alpha_{\nu\mu}$  können wir schreiben

$$\Lambda = \exp(i\alpha_{\mu\nu}M^{\mu\nu}) . \quad (2.41)$$

Der Zusammenhang zwischen den Generatoren im Minkowskiraum und den Generatoren im dreidimensionalen euklidischen Raum ist

$$J_j = \frac{1}{2}\epsilon_{jkl}M_{kl} \Rightarrow M_{kl} = \epsilon_{klj}J_j \quad (2.42)$$

$$K_j = M_{0j} \quad j, k, l \geq 1 . \quad (2.43)$$

Die Liealgebra der Poincarégruppe lautet

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \quad (2.44)$$

$$[J_j, P_0] = 0 \quad (2.45)$$

$$[J_j, P_k] = i\epsilon_{jkl}P_l \quad (2.46)$$

$$[K_j, P_0] = -iP_j \quad (2.47)$$

$$[K_j, P_k] = -iP_0\delta_{jk} . \quad (2.48)$$

Hierbei ist  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$  und  $j, k, l = 1, 2, 3$ .

# Kapitel 3

## Der Lagrangeformalismus für Felder

### 3.1 Quantenfeldtheorie

In der klassischen Physik kennt man Teilchen und Felder, so z.B. das elektromagnetische Feld. Ein Teilchen ist durch die Angabe von Ort und Zeit festgelegt, ein Feld hingegen hat eine unendliche Anzahl von Freiheitsgraden. Teilchen werden in der Quantenmechanik durch eine Wellenfunktion beschrieben. Felder treten als äußere Felder, z.B. das Maxwellfeld, auf. Durch die Quantisierung des elektromagnetischen Feldes werden Photonen eingeführt und damit der Welle-Teilchen-Dualismus beim Licht. Aus der Sicht der theoretischen Physik sind Elementarteilchen, also die kleinsten Bausteine der Materie, die geringsten Anregungsstufen bestimmter Felder.

Um Elementarteilchen und ihre Wechselwirkungen zu beschreiben bedient man sich der **Quantenfeldtheorie (QFT)**. In ihr werden die Prinzipien der klassischen Feldtheorie und der Quantenmechanik kombiniert. Diese Theorie geht über die Quantenmechanik hinaus, indem sie Teilchen und Felder einheitlich behandelt. Es werden nicht nur Observablen wie z.B. die Energie quantisiert sondern auch die **wechselwirkenden** (Teilchen-)Felder selbst. Die Quantisierung der Felder wird auch als **Zweite Quantisierung** bezeichnet. Sie ermöglicht es, explizit die Entstehung und Vernichtung von Elementarteilchen (**Paarerzeugung, Anihilation**) zu berücksichtigen. **Relativistische Quantenfeldtheorien** berücksichtigen die **spezielle Relativitätstheorie** und finden in der Elementarteilchenphysik Anwendung.<sup>1</sup>

Die Verwendung der Quantenfeldtheorie erlaubt es, ein fundamentales Problem der Quantenmechanik zu lösen: Ihre Unfähigkeit, Systeme mit variierender Teilchenzahl zu beschreiben. Wie aus der relativistischen Quantenmechanik bekannt, gibt es gemäß der relativistischen **Klein-Gordon-Gleichung** und der **Dirac-Gleichung** Lösungen negativer Energie, die als Antiteilchen interpretiert werden. Somit können bei ausreichender Energie, Teilchen-Antiteilchen-Paare erzeugt werden.<sup>2</sup> Dies macht ein System mit konstanter Teilchenzahl unmöglich.

Der erste Schritt zu einer Quantenfeldtheorie besteht im Auffinden der **Lagrangedichten** für die Quantenfelder. Diese müssen als **Euler-Lagrange-Gleichung** die Differentialgleichung für das Feld liefern. Diese sind für ein **Skalarfeld** die Klein-Gordon-Gleichung, für ein

---

<sup>1</sup>Nicht-relativistische Quantenfeldtheorien sind z.B. in der Festkörperphysik relevant.

<sup>2</sup>In dem Dirac-Bild entspricht das dem Anheben eines Teilchens aus dem Dirac-See der Zustände negativer Energien in einen Zustand positiver Energie. Dadurch entsteht im Dirac-See ein Loch, das als Positron interpretiert wird, sowie ein Elektron mit positiver Energie, sprich ein Elektron-Positron-Paar.

**Spinorfeld** die Dirac-Gleichung und für das Photon die **Maxwellgleichungen**. Sie sind die Bewegungsgleichungen für freie Felder, die nicht wechselwirken. Sie sind aus den Lagrangedichten für freie Felder abgeleitet. Um Wechselwirkungen der Felder untereinander einzuführen, müssen die Lagrangedichten um zusätzliche Terme erweitert werden.

## 3.2 Der Übergang vom diskreten zum kontinuierlichen System

Wir betrachten den Übergang vom diskreten zum kontinuierlichen System am Beispiel einer Kette von Massenpunkten. Die Massenpunkte mit jeweils der Masse  $m$  seien durch Federn mit der Federkonstante  $k$  miteinander verbunden. Es sei  $a$  der mittlere Abstand zweier Massenpunkte und  $q_i$  die Auslenkung des  $i$ -ten Massenpunktes aus der Ruhelage. Wir haben dann die kinetische Energie  $T$

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m \dot{q}_i^2 . \quad (3.1)$$

Die potentielle Energie  $V$  ist gegeben durch

$$V = \sum_i \frac{1}{2} k (q_{i+1} - q_i)^2 . \quad (3.2)$$

Damit lautet die Bewegungsgleichung für den  $i$ -ten Massenpunkt

$$m \ddot{q}_i = - \frac{\partial V}{\partial q_i} = k(q_{i+1} - q_i) - k(q_i - q_{i-1}) . \quad (3.3)$$

Andererseits kann die Bewegungsgleichung auch aus der Lagrangefunktion des Systems abgeleitet werden. Diese lautet

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_i a \left[ \frac{m}{a} \dot{q}_i^2 - ka \left( \frac{q_{i+1} - q_i}{a} \right)^2 \right] . \quad (3.4)$$

Die Bewegungsgleichung für ein einzelnes Teilchen ergibt sich unter Anwendung der Euler-Lagrangegleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (3.5)$$

zu

$$\frac{m}{a} \ddot{q}_i - ka \frac{q_{i+1} - q_i}{a^2} + ka \frac{q_i - q_{i-1}}{a^2} = 0 . \quad (3.6)$$

Wir bilden nun den Grenzwert  $a \rightarrow 0$ . Dabei gilt folgendes

1. Der Quotient  $m/a$  geht über in die Massendichte  $\mu$ .
2. Es ist  $\xi = (q_{i+1} - q_i)/a$  proportional zur Kraft  $k(q_{i+1} - q_i)$ . Die Proportionalitätskonstante ist durch die Materialkonstante  $y$ , das Youngsche Modul, gegeben. Wir haben also

$$\frac{q_{i+1} - q_i}{a} y = k(q_{i+1} - q_i) \xrightarrow{a \rightarrow 0} y = k \cdot a . \quad (3.7)$$

3. Wir gehen über vom diskreten Index  $i$  zu einem kontinuierlichen Index  $x$ . Statt des Index  $i$  wird jetzt die Lage im Ruhezustand,  $x$ , verwendet. Und statt der  $q_i$  haben wir jetzt  $q(x)$  als Funktion des Ortes. Somit gilt

$$q_i \rightarrow q(x) \tag{3.8}$$

$$\frac{q_{i+1} - q_i}{a} \rightarrow \frac{q(x+a) - q(x)}{a} \xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{\partial q(x)}{\partial x} = q'(x) . \tag{3.9}$$

Ferner

$$a \sum_i \rightarrow \int dx . \tag{3.10}$$

Damit erhalten wir folgende Lagrangefunktion des kontinuierlichen Systems

$$L = \int dx \left( \frac{1}{2} \mu \dot{q}(x)^2 - \frac{y}{2} \left( \frac{\partial q(x)}{\partial x} \right)^2 \right) . \tag{3.11}$$

Der Integrand wird als Lagrangedichte  $\mathcal{L}$  bezeichnet. Die Bewegungsgleichung ergibt sich aus Glg. (3.6) zu

$$\mu \ddot{q} - y \lim_{a \rightarrow 0} \left( \frac{q'(x+a) - q'(x)}{a} \right) = 0 \Rightarrow \mu \ddot{q} - y q'' = 0 . \tag{3.12}$$

Beachte, dass  $x$  keine verallgemeinerte Koordinate, sondern ein Index ist. Die kanonische Variable ist durch  $q(x) = q(t, \vec{x})$  gegeben. Man bezeichnet  $q = q(t, \vec{x})$  als Feld. Die Bewegungsgleichungen sind partielle Differentialgleichungen.

Für dreidimensionale Systeme haben wir

$$L = \int dx dy dz \mathcal{L} . \tag{3.13}$$

Die Lagrangedichte  $\mathcal{L}$  ist eine Funktion von  $q, dq/dt$  und  $\vec{\nabla}q$ . Der kanonische Impuls ist gegeben durch

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} . \tag{3.14}$$

### 3.3 Die Euler-Lagrange-Gleichung für Felder

Wir wenden das Hamiltonsche Prinzip auf die Lagrangedichte  $\mathcal{L}(q, \dot{q}, \vec{\nabla}q)$  an. Dieses besagt, dass die Wirkung  $S$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \mathcal{L} \tag{3.15}$$

minimiert werden soll, wobei die Randpunkte  $q(t_1), q(t_2)$  festliegen. Wir betrachten also die Variation

$$0 \stackrel{!}{=} \delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\vec{\nabla}q)} \delta (\vec{\nabla}q) , \text{ mit } \delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q , \delta (\vec{\nabla}q) = \vec{\nabla} \delta q \tag{3.16}$$

Es wird eine partielle Integration durchgeführt, wobei die Randterme festgehalten werden, so dass ihre Variationen verschwinden, d.h.  $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ . Wir fordern weiter, dass  $q(t, \vec{x}) = 0$  für  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ . Damit erhalten wir

$$0 \stackrel{!}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \vec{\nabla} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\nabla} q} \right) \delta q \quad (3.17)$$

Dies muss für alle Variationen  $\delta q$  gelten. Damit erhalten wir die Euler-Lagrange-Gleichung für Felder

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \vec{\nabla} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\nabla} q} = 0. \quad (3.18)$$

Die Hamiltondichte  $\mathcal{H}$  ist gegeben durch

$$\mathcal{H} = \pi \dot{q} - \mathcal{L}, \quad \text{mit } \pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}. \quad (3.19)$$

Wir betrachten als Beispiel die folgende Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2} \dot{q}^2 - \frac{y}{2} q'^2. \quad (3.20)$$

Wir haben mit

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \mu \dot{q} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'} = -y q' \quad (3.21)$$

die Bewegungsgleichung

$$\mu \ddot{q} - y q'' = 0. \quad (3.22)$$

### 3.3.1 Relativistische Schreibweise

Wir definieren

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad \text{und} \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} \quad \text{sowie} \quad (3.23)$$

$$\int dx \equiv \int dt \int d^3x. \quad (3.24)$$

Dabei ist  $\int dx$  Lorentz-invariant (die Lorentzkontraktion wird durch die Zeitdilatation kompensiert). Mit dieser Schreibweise wird das Feld  $\phi(t, \vec{x})$  dann mit  $\phi(x)$  bezeichnet und die Lagrangedichte mit

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \quad (3.25)$$

Die Euler-Lagrangegleichungen lassen sich dann schreiben als

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0 \quad \text{mit} \quad \pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)}. \quad (3.26)$$

Falls die Lagrangedichte  $\mathcal{L}$  Lorentz-invariant ist, sind die Feldgleichungen kovariant.

Wir betrachten folgende Beispiele:



1. Reelles skalares Feld ohne Wechselwirkung. Die Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2 . \quad (3.27)$$

Damit haben wir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi \quad (3.28)$$

und somit die Bewegungsgleichung

$$-m^2 \phi - \partial_\mu \partial^\mu \phi = 0 \quad \Rightarrow \quad (\square + m^2)\phi = 0 \quad \text{mit } \partial_\mu \partial^\mu = \partial_0^2 - \vec{\nabla}^2 = \partial_0^2 - \Delta . \quad (3.29)$$

Hierbei handelt es sich um die aus der relativistischen Quantenmechanik bekannte Klein-Gordon-Gleichung.

2. Komplexes skalares Feld ohne Wechselwirkung. Die Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L}(\phi, \phi^*, \partial_\mu \phi, \partial_\mu \phi^*) = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi . \quad (3.30)$$

Die Felder  $\phi$  und  $\phi^*$  können formal unabhängig voneinander variiert werden. Das heißt, wir haben

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} = -m^2 \phi \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} = \partial^\mu \phi \quad (3.31)$$

$$\Rightarrow \partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0 \quad \text{und analog} \quad \partial_\mu \partial^\mu \phi^* + m^2 \phi^* = 0 . \quad (3.32)$$

3. Spin-1/2 Feld (Dirac-Feld) ohne Wechselwirkung. Die Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}) = \bar{\psi}(i\rlap{\not{\partial}} - m)\psi , \quad (3.33)$$

wobei

$$\rlap{\not{\partial}} := a^\mu \gamma_\mu = a_\mu \gamma^\mu \quad (3.34)$$

$$\rlap{\not{\partial}} := \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \gamma^\mu \partial_\mu . \quad (3.35)$$

Es ist

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = (i\rlap{\not{\partial}} - m)\psi \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} = 0 . \quad (3.36)$$

Damit erhalten wir die Bewegungsgleichung

$$(i\rlap{\not{\partial}} - m)\psi = 0 . \quad (3.37)$$

### 3.4 Das Noether-Theorem für Felder

Wir wollen im folgenden zeigen: Zu jeder Symmetrie des Wirkungsintegrals gegenüber einer kontinuierlichen Transformation existiert ein Erhaltungssatz, der sich aus der Lagrangedichte bestimmen lässt.

Beweis: Wir betrachten  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$ . Dabei ist  $\varphi$  ein Feld (ein skalares Feld  $\varphi$  oder  $\varphi = A^\mu$  oder ein Multipllett von Feldern  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ ). Wir betrachten eine infinitesimale Transformation bezüglich einer Lie-Gruppe

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \quad (3.38)$$

mit

$$\delta x^\mu = A_k^\mu \delta \omega^k . \quad (3.39)$$

Bei  $\delta \omega^k$  handelt es sich um die Parameter der Transformation (z.B. die Eulerschen Drehwinkel). Bei einer Drehung um  $\delta \vec{\omega}$  ( $\exp(i\delta \omega^k J_k)$ ) haben wir zum Beispiel

$$\vec{x}' = \vec{x} + i\delta \omega^k J_k \vec{x} , \quad (3.40)$$

so dass also

$$A_k^0 = 0 , \quad A_k^j = i(J_k \vec{x})^j , j = 1, 2, 3 . \quad (3.41)$$

Ferner haben wir die Transformation des Feldes

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x') = \varphi(x) + \delta \varphi(x) = \varphi(x) + \Phi_k(x) \delta \omega^k . \quad (3.42)$$

(Zum Beispiel haben wir bei einem Skalar  $\varphi'(x') = \varphi(x)$  und also  $\delta \varphi(x) = 0$  und bei einem Vektor  $\varphi'^\mu(x') = \Lambda_\nu^\mu \varphi^\nu(x)$  etc.) Wir finden

$$\begin{aligned} \varphi'(x') &= \varphi'(x + \delta x) \\ &= \varphi'(x) + \delta x^\nu \partial_\nu \varphi \\ &= \varphi(x) + \delta_0 \varphi(x) + \delta x^\nu \partial_\nu \varphi , \end{aligned} \quad (3.43)$$

mit

$$\delta_0 \varphi(x) = \varphi'(x) - \varphi(x) . \quad (3.44)$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \delta_0 \varphi(x) &\stackrel{(3.43)}{=} \varphi'(x') - \varphi(x) - \delta x^\nu \partial_\nu \varphi \\ &\stackrel{(3.42)}{=} \Phi_k(x) \delta \omega^k - \delta x^\nu \partial_\nu \varphi \\ &\stackrel{(3.39)}{=} [\Phi_k(x) - (\partial_\nu \varphi) A_k^\nu] \delta \omega^k . \end{aligned} \quad (3.45)$$

Für die Variation der Lagrangedichte haben wir

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \mathcal{L}'[\varphi'(x'), \partial_\nu \varphi'(x')] - \mathcal{L}[\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)] \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta_0 \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \underbrace{\partial_\mu \delta_0 \varphi}_{= \delta_0 \partial_\mu \varphi} . \end{aligned} \quad (3.46)$$

Anwendung der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \quad (3.47)$$

und Verwendung von (3.45) und (3.46) liefert

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta_0 \varphi \right) \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} A_k^\mu(x) \delta \omega^k + \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} [\Phi_k(x) - (\partial_\nu \varphi) A_k^\nu(x)] \delta \omega^k \right]. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Für die transformierte Wirkung haben wir

$$S' = \int d^4 x' \mathcal{L}'(\varphi', \partial_\mu \varphi') \quad (3.49)$$

und

$$\delta S = S' - S = \int \delta(d^4 x) \mathcal{L} + \int d^4 x \delta \mathcal{L}. \quad (3.50)$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} d^4 x' &= \left| \det \left( \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right) \right| d^4 x \\ &= |\det(\delta_\nu^\mu + \partial_\nu A_k^\mu \delta \omega^k)| d^4 x \\ &= (1 + \partial_\mu A_k^\mu \delta \omega^k) d^4 x, \end{aligned} \quad (3.51)$$

wobei wir verwendet haben

$$\det(\mathbf{1} + \epsilon) = 1 + \text{tr} \epsilon + O(\epsilon^2). \quad (3.52)$$

Damit ist also

$$\delta(d^4 x) = d^4 x \partial_\mu A_k^\mu \delta \omega^k. \quad (3.53)$$

Und somit

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4 x (\mathcal{L} \partial_\mu A_k^\mu \delta \omega^k + \delta \mathcal{L}) \\ &\stackrel{(3.48)}{=} \int d^4 x \partial_\mu \left[ \mathcal{L} A_k^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} [\Phi_k - (\partial_\nu \varphi) A_k^\nu] \right] \delta \omega^k. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Man spricht von globalen Transformationen, wenn  $\delta \omega^k$  unabhängig von  $x$  ist. Das Integrationsvolumen in  $S = \int_V d^4 x \mathcal{L}$  wählen wir beliebig. Wenn  $S$  invariant ist, d.h.  $\delta S / \delta \omega_k = 0$ , dann folgt aus Glg. (3.54), dass

$$j_k^\mu = -\mathcal{L} A_k^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} (A_k^\nu \partial_\nu \varphi - \Phi_k(x)) \quad (3.55)$$

ein erhaltener Strom ist (Noether-Theorem):

$$\partial_\mu j_k^\mu = 0. \quad (3.56)$$

Man nennt  $j_k^\mu$  Noether-Strom. Die Ladung

$$Q_k(x) = \int d^3x j_k^0(x) \quad (3.57)$$

ist konstant. Denn

$$\dot{Q}_k(x) = \int d^3x \partial_0 j_k^0 \stackrel{(3.56)}{=} - \int d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_k = - \oint d\vec{S} \cdot \vec{j}_k = 0 \quad (3.58)$$

für  $\vec{j}_k = 0$  im Unendlichen. Beachte, dass der erhaltene Noether-Strom nicht eindeutig ist. So kann man einen Strom  $j_k^{\prime\mu}$  hinzuaddieren, dessen Divergenz verschwindet, also

$$\partial_\mu j_k^{\prime\mu} = 0. \quad (3.59)$$

Der Noether-Strom Glg. (3.55) kann auf den Fall mehrerer Felder  $\varphi^a$  in  $\mathcal{L}$  verallgemeinert werden. Wir haben dann

$$j_k^\mu = -\mathcal{L} A_k^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^a)} (A_k^\nu \partial_\nu \varphi^a - \Phi_k^a(x)). \quad (3.60)$$

### 3.4.1 Beispiele

Reelles Klein-Gordon-Feld: Die Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi) (\partial^\mu \varphi) - \frac{m^2}{2} \varphi^2 - V(\varphi), \quad (3.61)$$

wobei  $V(\varphi)$  ein beliebiges Potential ist, z.B.  $V(\varphi) = \lambda/4! \varphi^4$ . Die Lagrangedichte ist invariant unter Transformationen,

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \underbrace{\epsilon^\mu}_{\delta\omega^k}, \quad \text{so dass also } A_\nu^\mu(x) = \delta_\nu^\mu \quad (3.62)$$

Da  $\varphi$  ein Skalarfeld ist, ist es invariant, also  $\delta\varphi(x) = 0$  und somit  $\Phi_\nu(x) = 0$ . Aus der Lagrangedichte Glg. (3.61) finden wir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} = \partial^\mu \varphi. \quad (3.63)$$

Der erhaltene Strom, den man im Fall der Translationen Glg. (3.62) mit  $T_\nu^\mu$  bezeichnet, ist der Energie-Impuls-Tensor und gegeben durch

$$T_\nu^\mu = -\mathcal{L} \delta_\nu^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial_\nu \varphi \quad (3.64)$$

$$= -\mathcal{L} \delta_\nu^\mu + \underbrace{\partial^\mu \varphi}_{(3.63)} \partial_\nu \varphi. \quad (3.65)$$

Also

$$T_\nu^\mu = \partial^\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \delta_\nu^\mu \left( \frac{1}{2} (\partial_\alpha \varphi)^2 - \frac{m^2}{2} \varphi^2 - V(\varphi) \right). \quad (3.66)$$

Die erhaltene Ladung, der Viererimpuls, ist damit

$$P_\nu = \int d^3x T_\nu^0. \quad (3.67)$$

Wir haben

$$T_0^0 = -\mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi)} \partial_0 \varphi . \quad (3.68)$$

In der klassischen Mechanik hatten wir die Hamiltonfunktion

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L . \quad (3.69)$$

Der Vergleich zeigt: Bei  $T_0^0$  handelt es sich um die Hamiltondichte! Die kanonische Feldimpulsdichte ist gegeben durch

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}(x) \quad , \quad \text{wobei } \dot{\varphi} = \partial_0 \varphi . \quad (3.70)$$

Damit ist die Hamiltondichte

$$T_0^0 = \pi(x) \dot{\varphi}(x) - \mathcal{L}(x) . \quad (3.71)$$

Der Hamilton-Operator, der der Gesamtenergie entspricht, ist gegeben durch,

$$H = P_0 = \int d^3x T_0^0 = \int d^3x (\pi \dot{\varphi} - \mathcal{L}) = \int d^3x \left( \frac{1}{2}(\dot{\varphi}^2 + (\vec{\nabla} \varphi)^2 + m^2 \varphi^2) + V(\varphi) \right) \quad (3.72)$$

Und der 3er-Impuls lautet

$$P_k = \int d^3x T_k^0 = \int d^3x \dot{\varphi} \partial_k \varphi \quad (3.73)$$

$$P^k = - \int d^3x \dot{\varphi} \partial_k \varphi \quad (3.74)$$

$$\vec{P} = - \int d^3x \dot{\varphi} \vec{\nabla} \varphi = - \int d^3x \underbrace{\pi(x) \vec{\nabla} \varphi}_{\text{Impulsdichte}} . \quad (3.75)$$

Als nächstes Beispiel betrachten wir infinitesimale Drehungen. Das heisst

$$\delta \vec{x} = i \delta \omega^k J_k \vec{x} , \quad \delta x^0 = 0 \quad (3.76)$$

$$A_k^j = i (J_k \vec{x})^j , \quad A_k^0 = 0 , \quad j, k = 1, 2, 3 \quad (3.77)$$

$$\delta \varphi = 0 = \Phi_k . \quad (3.78)$$

Damit erhalten wir aus (3.55)

$$\begin{aligned} j_k^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi)} A_k^j (\partial_j \varphi) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} (\vec{\nabla} \varphi)^T i J_k \vec{x} \\ &\stackrel{(3.63)}{=} \dot{\varphi} (\vec{\nabla} \varphi)^T i J_k \vec{x} . \end{aligned} \quad (3.79)$$

Die Impulsdichte, siehe Glg. (3.75), ist definiert durch

$$\vec{p} = -\dot{\varphi} \vec{\nabla} \varphi , \quad (3.80)$$

und damit

$$\vec{P} = \int d^3x \vec{p}(x) . \quad (3.81)$$

Somit haben wir

$$\begin{aligned} j_k^0 &= -\vec{p}^T i J_k \vec{x} = -p_m \underbrace{(i J_k)}_{=\epsilon_{kmn} \text{ (6.5)}} x_n \\ &= -\epsilon_{kmn} p_m x_n = -(\vec{p} \times \vec{x})_k . \end{aligned} \quad (3.82)$$

Damit finden wir also, das  $-j_k^0$  eine Drehimpulsdichte ist. Die erhaltene Ladung ist also der Drehimpuls, denn mit (3.57) ist

$$L_k = \int d^3x j_k^0(x) \quad (3.83)$$

$$\vec{L} = \int d^3x (\vec{x} \times \vec{p}) . \quad (3.84)$$

Wir betrachten nun das Noether-Theorem für eine innere Symmetrie. Wir wenden dies für ein komplexes Feld mit Selbstwechselwirkung an. Die Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi^* - m|\varphi|^2 - V(|\varphi|) . \quad (3.85)$$

Die Lagrangedichte ist invariant unter einer  $U(1)$  Symmetrie, d.h. unter der Transformation

$$\varphi \rightarrow \varphi \exp(i\delta\vartheta) = \varphi + i\delta\vartheta \varphi \quad (3.86)$$

$$\delta x^\mu = 0 \Rightarrow A_k^\mu = 0 \quad (3.87)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta\varphi &= i\delta\vartheta \varphi \\ \delta\varphi^* &= -i\delta\vartheta \varphi^* \end{aligned} \right\} \stackrel{(3.42)}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} \delta\varphi \\ \delta\varphi^* \end{pmatrix} = \Phi \delta\vartheta , \quad \text{mit} \quad (3.88)$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} i\varphi \\ -i\varphi^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \end{pmatrix} . \quad (3.89)$$

Der Noether-Strom (3.55) lautet

$$\begin{aligned} j^\mu &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \Phi^1 - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^*)} \Phi^2 \\ &= -i(\partial^\mu \varphi^*)\varphi + i(\partial^\mu \varphi)\varphi^* . \end{aligned} \quad (3.90)$$

Die dazu gehörige erhaltene Ladung ist

$$Q = \int d^3x j^0 = i \int d^3x (\varphi^* \dot{\varphi} - \dot{\varphi} \varphi^*) . \quad (3.91)$$

Wir betrachten die  $U(1)$  Symmetrie der Dirac-Theorie. Die Dirac-Lagrangedichte ist invariant unter den Transformationen

$$\psi \rightarrow \exp(i\theta) \psi , \quad \bar{\psi} \rightarrow \exp(-i\theta) \bar{\psi} . \quad (3.92)$$

Die Lagrangedichte ist gegeben durch

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi + e \bar{\psi} \cancel{A} \psi . \quad (3.93)$$

Sie beinhaltet die Kopplung an das elektromagnetische Feld  $A^\mu$ . Wir haben für  $\Phi$

$$\Phi = \begin{pmatrix} i\psi_a \\ -i\bar{\psi}_a \end{pmatrix} \quad \text{mit dem Spinorindex } a = 1, 2, 3, 4 . \quad (3.94)$$

Damit haben wir den Noetherstrom

$$j^\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_a)} i\psi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi}_a)} i\bar{\psi}_a = -i\bar{\psi}\gamma^\mu i\psi = \bar{\psi}\gamma^\mu \psi . \quad (3.95)$$

Dies ist die  $U(1)$ -Stromdichte des Dirac-Feldes. Ist  $\psi$  das Elektronenfeld, so ist  $ej^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  die elektromagnetische Stromdichte. Und es ist

$$Q = e \int d^3x j^0 = e \int d^3x \bar{\psi}\gamma^0\psi = e \int d^3x \psi^\dagger\psi \quad (3.96)$$

die erhaltene elektrische Gesamtladung. Es ist also  $e\psi^\dagger\psi$  die Ladungsdichte.





# Kapitel 4

## Quantisierung der Felder

Die Elektrodynamik behandelt klassische Felder, welche die Maxwell-Gleichungen erfüllen. Andererseits beschreiben die Maxwell-Gleichungen die Ausbreitung der Photonen in der quantisierten Theorie. Die Frage ist, wie die beiden Betrachtungsweisen zusammen hängen.

Ferner möchten wir die Erzeugung und Vernichtung von Teilchen beschreiben können.

Der gesuchte Formalismus muss der Tatsache Rechnung tragen, dass sowohl die Klein-Gordon-Gleichung als auch die Dirac-Gleichung Zustände mit negativer Energie haben können. Und auch, dass es eine Spin-Statistik-Relation gibt.

Die Quantenfeldtheorie bildet den Rahmen, Streuprozesse zu berechnen. Ihre Vorhersagen werden experimentell bestätigt.

### 4.1 Wiederholung der Quantenmechanik

#### 4.1.1 Schrödinger-Bild

Im Schrödinger-Bild sind die Zustände  $|\psi(t)\rangle_S$  zeitabhängig, wohingegen die Operatoren  $O_S$  zeitunabhängig sind. Der Zustand zum Zeitpunkt  $t$  ergibt sich durch Anwendung des unitären Zeitentwicklungsoperators  $U(t)$  auf den Zustandsvektor zur Zeit  $t_0 = 0$ ,

$$|\psi(t)\rangle_S = U(t) |\psi(0)\rangle_S . \quad (4.1)$$

Einsetzen der zeitabhängigen Wellenfunktion in die Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle_S = H_S |\psi(t)\rangle_S \quad (4.2)$$

führt auf

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t) |\psi(0)\rangle_S &= H_S U(t) |\psi(0)\rangle_S \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t) &= H_S U(t) . \end{aligned} \quad (4.3)$$

Man erhält eine zur Schrödingergleichung äquivalente Operatorgleichung.

### 4.1.2 Heisenberg-Bild

Im Heisenberg-Bild sind die Zustände  $|\psi\rangle_H$  zeitunabhängig, die Operatoren  $O_H(t)$  aber zeitabhängig. Der Übergang vom Schrödinger- zum Heisenbergbild erfolgt durch

$$|\psi\rangle_H = U^\dagger(t) |\psi(t)\rangle_S \quad (4.4)$$

$$O_H(t) = U^\dagger(t) O_S U(t) . \quad (4.5)$$

Der Erwartungswert  $o$  des Operators ist hierbei in beiden Bildern gleich, denn

$$\begin{aligned} o &= {}_S\langle\psi(t)|O_S|\psi(t)\rangle_S = {}_S\langle\psi(t)|\underbrace{U(t)U^\dagger(t)}_1 O_S \underbrace{U(t)U^\dagger(t)}_1 |\psi(t)\rangle_S \\ &= {}_S\langle\psi(0)|U^\dagger(t)O_S U(t)|\psi(0)\rangle_S = {}_H\langle\psi|O_H(t)|\psi\rangle_H . \end{aligned} \quad (4.6)$$

Bildung der Zeitableitung von  $O_H(t)$  liefert

$$\frac{d}{dt}O_H(t) = \left(\frac{\partial}{\partial t}U^\dagger(t)\right) O_S U(t) + U^\dagger(t)O_S \left(\frac{\partial}{\partial t}U\right) + U^\dagger \left(\frac{\partial}{\partial t}O_S\right) U(t) . \quad (4.7)$$

Verwendung von

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t) = -\frac{i}{\hbar}H_S U(t) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial t}U^\dagger(t) = \frac{i}{\hbar}U^\dagger(t)H_S \quad (4.8)$$

liefert dann

$$\frac{d}{dt}O_H(t) = \frac{i}{\hbar}(U^\dagger H_S O_S U - U^\dagger O_S H_S U) + U^\dagger \left(\frac{\partial O_S}{\partial t}\right) U \quad (4.9)$$

Einschieben von  $UU^\dagger = 1$  liefert die Heisenberg-Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}O_H(t) = \frac{i}{\hbar}[H_H, O_H] + \frac{\partial O_H}{\partial t} , \quad (4.10)$$

mit

$$\frac{\partial O_H}{\partial t} = U^\dagger \left(\frac{\partial O_S}{\partial t}\right) U . \quad (4.11)$$

In der Vorlesung wird das Heisenberg-Bild betrachtet.

## 4.2 Exkurs: Lagrangedichten für Teilchen mit Spin 0, $\frac{1}{2}$ , 1

Ausgehend von den entsprechenden Feldern können relativistische Theorien von Teilchen mit Spin 0,  $\frac{1}{2}$ , 1 konstruiert werden. Wir hatten bereits gesehen, dass in der Hochenergiephysik  $\hbar = c = 1$  gesetzt wird. Damit lassen sich alle Einheiten auf die Einheit 'Masse' zurückführen.

Wir haben

$$\begin{aligned} [m] &= [\text{Masse}] = 1 \\ [p^\mu] &= [\text{Impuls}] = 1 \\ [x^\mu] &= [\text{Zeit, Länge}] = -1 \\ [H] &= [\text{Energie}] = 1 \\ [d^3x] &= -3 \\ [\mathcal{L}] &= [\mathcal{H}] = 4 \quad (\text{da } H = \int d^3x \mathcal{H}) \\ [S] &= [\text{Wirkung}] = 0 . \end{aligned} \quad (4.12)$$

### 4.2.1 Konstruktion von Lagrangedichten

Bei der Konstruktion von Lagrangedichten wenden wir folgende Prinzipien an:

- 1) Es werden die Felder vorgegeben, welche die Theorie enthalten soll. (Felder)
- 2) Die Lagrangedichte hat die Form

$$\mathcal{L}(x) = \sum_i g_i \mathcal{O}_i(x) . \tag{4.13}$$

Bei den  $\mathcal{O}_i$  handelt es sich um Produkte von Feldern am selben Punkt (Lokalität). Diese transformieren sich wie Lorentz-Skalare. Damit ist die Wirkung und also auch die Dynamik relativistisch invariant. Die  $g_i$  sind Konstanten, deren Massendimension so gewählt wird, dass gilt

$$[g_i \mathcal{O}_i] = 4 . \tag{4.14}$$

Falls die Theorie innere Symmetrien besitzen soll, dann muss man fordern, dass die  $\mathcal{O}_i(x)$  unter diesen ebenfalls invariant sind. (Relativistische Invarianz und Symmetrien)

- 3) Die Lagrangedichte  $\mathcal{L}$  muss Ableitungen  $\partial_\mu$  der Felder enthalten. Ansonsten würde der dem Feld zugeordnete kanonisch konjugierte Impuls verschwinden, und die Euler-Lagrange Gleichung würde keine Zeitentwicklung ergeben. Es sei bemerkt, dass es manchmal aus technischen Gründen hilfreich sein kann, 'Hilfsfelder' einzuführen, auf die keine Ableitung wirkt, und die damit keine Dynamik haben. (Dynamik)
- 4) Die Massendimension der Feldprodukte  $\mathcal{O}_i$  soll nicht größer also vier sein. Warum dies gefordert wird, wird später klarwerden. Auch hier sein bemerkt, dass diese Forderung nicht fundamental ist. Sie kann in sogenannten 'effektiven Quantenfeldtheorien' aufgegeben werden. (Renormierbarkeit)
- 5) Ferner soll die Lagrangedichte *alle* Terme enthalten, die mit den Forderungen 2) und 4) verträglich sind. (Vollständigkeit)

## 4.3 Die Quantisierung des skalaren Feldes

Wir wollen das skalare Feld quantisieren, wobei weiterhin die Klein-Gordon-Gleichung

$$(\square + m^2)\phi = 0 \tag{4.15}$$

gelten soll. Hierfür interpretieren wir  $\phi$  als Operator und bestimmen dessen Eigenwerte und Eigenfunktionen. Dies führt dann auf die Teilcheninterpretation.

Das klassische Feld  $\varphi$  erfüllt die Klein-Gordon-Gleichung

$$(\square + m^2)\varphi = 0 \tag{4.16}$$

Spezielle Lösungen dieser Gleichung sind gegeben durch ebene Wellen der Form  $\exp(ikx)$  oder  $\exp(-ikx)$ , wobei  $k^2 = m^2$ . Das heißt also

$$k_0 = \pm \sqrt{m^2 + \vec{k}^2} \equiv \pm \omega(\vec{k}) = \omega_k . \tag{4.17}$$

Wir haben dann

$$\square \exp(ikx) = -k^2 \exp(ikx) . \quad (4.18)$$

Die Linearkombination beider Lösungen führt auf die allgemeine Lösung

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \left( \alpha(\vec{k}) \exp(-ikx) + \alpha^*(\vec{k}) \exp(ikx) \right) . \quad (4.19)$$

Hierbei ist der Faktor

$$\frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_k} \quad (4.20)$$

Konvention. Ferner sei darauf hingewiesen, dass das Maß

$$d^4k \delta(k^2 - m^2) \theta(k_0) = \frac{d^3k}{2\omega_k} \quad (4.21)$$

Lorentz-invariant ist.

Nebenrechnung: Herleitung von Glg. (4.21). Wir verwenden folgende Formel: Sei  $f(x)$  stetig differenzierbar mit einfachen Nullstellen  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  und  $f'(x_j) \neq 0$ , dann gilt

$$\delta(f(x)) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\left| \frac{df}{dx}(x_j) \right|} \delta(x - x_j) . \quad (4.22)$$

Hier ist  $x = k_0$  und

$$f(k_0) = k_0^2 - \vec{k}^2 - m^2 . \quad (4.23)$$

Die Nullstellen sind gegeben durch

$$k_{0,1,2} = \pm \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} . \quad (4.24)$$

Mit

$$\frac{df}{dk_0} = 2k_0 \quad (4.25)$$

finden wir

$$\delta(k^2 - m^2) = \frac{1}{2\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}} \left\{ \delta(k_0 - \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}) + \delta(k_0 + \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}) \right\} . \quad (4.26)$$

Wir definieren

$$\omega(\vec{k}) \equiv \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} , \quad (4.27)$$

das heisst, wir haben

$$\theta(k_0) \delta(k^2 - m^2) = \frac{1}{2\omega} \delta(k_0 - \omega) \quad (4.28)$$

$$\theta(-k_0) \delta(k^2 - m^2) = \frac{1}{2\omega} \delta(k_0 + \omega) . \quad (4.29)$$

Und damit finden wir Glg. (4.21).

### 4.3.1 Übergang zum quantisierten Feld

Sie  $\varphi(x)$  die klassische Messgröße, die zum Erwartungswert eines Operators  $\phi(x)$  gehört,

$$\varphi(x) = \langle \text{Zustand} | \phi(x) | \text{Zustand} \rangle . \quad (4.30)$$

Für  $\phi$  soll Folgendes gelten:

1. Es sei  $\phi$  hermitesch, also  $\phi = \phi^\dagger$ . Daraus folgt, dass der Eigenwert  $\varphi$  reell ist. Ferner soll  $\phi$  die Klein-Gordon-Gleichung erfüllen, d.h.

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0 . \quad (4.31)$$

Daraus folgt,

$$(\square + m^2)\varphi(x) = 0 . \quad (4.32)$$

2. Es sei  $P_\mu$  die Erzeugende einer Translation. Es soll  $\phi$  die folgende Gleichung erfüllen,

$$\partial_\mu \phi(x) = i[P_\mu, \phi(x)] \quad (4.33)$$

Wir wollen eine Beschreibung von Teilchen durch  $\phi$  finden. Jede Lösung der Klein-Gordon-Gleichung kann als Überlagerung von ebenen Wellen angegeben werden. Dabei sind die Fourierkoeffizienten dann Operatoren. Also

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \left( a(\vec{k}) \exp(-ikx) + a^\dagger(\vec{k}) \exp(ikx) \right) . \quad (4.34)$$

Anwendung von Glg. (4.33) liefert

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \left( -a(\vec{k}) ik_\mu \exp(-ikx) + a^\dagger(\vec{k}) ik_\mu \exp(ikx) \right) \quad (4.35)$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \left( i[P_\mu, a] \exp(-ikx) + i[P_\mu, a^\dagger] \exp(ikx) \right) . \quad (4.36)$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$[P_\mu, a(\vec{k})] = -k_\mu a \quad (4.37)$$

$$[P_\mu, a^\dagger(\vec{k})] = k_\mu a^\dagger . \quad (4.38)$$

Es sei hier an den harmonischen Oszillator erinnert, bei dem Auf- und Absteigeoperatoren durch die Vertauschungsrelationen

$$[H, a^\dagger] = \omega a^\dagger \quad \text{und} \quad [H, a] = -\omega a \quad (4.39)$$

charakterisiert sind.

### 4.3.2 Konstruktion der Zustände

Wir wollen nun auf algebraischem Weg die Zustände konstruieren. Es sei  $|0\rangle$  der Vakuumzustand, wobei  $|0\rangle \neq 0$ . Er sei auf 1 normiert, also

$$\langle 0|0\rangle = 1 . \quad (4.40)$$

Da im Vakuum kein Teilchen vorhanden ist, ist  $E = 0$  und  $\vec{p} = 0$ . Damit also

$$P_\mu|0\rangle = 0 . \quad (4.41)$$

Wir wenden Gleichung (4.38) auf  $|0\rangle$  an und finden

$$\begin{aligned} (P_\mu a^\dagger - a^\dagger P_\mu)|0\rangle &= k_\mu a^\dagger|0\rangle \\ \Rightarrow P_\mu a^\dagger(\vec{k})|0\rangle &= k_\mu a^\dagger|0\rangle . \end{aligned} \quad (4.42)$$

Es ist also  $a^\dagger|0\rangle$  ein Eigenzustand des Energie- und Impuls-Operators mit den Eigenwerten  $k_0$  und  $\vec{k}$  falls  $a^\dagger|0\rangle \neq 0$ . Wenden wir Glg. (4.37) auf  $|0\rangle$  an, so finden wir

$$P_0 a|0\rangle = -k_0 a|0\rangle . \quad (4.43)$$

Damit wäre also  $a|0\rangle$  ein Eigenzustand zu einem negativen Energieeigenwert. Da wir fordern wollen, dass stets  $E \geq 0$ , folgt

$$a(\vec{k})|0\rangle = 0 \quad \forall \vec{k} . \quad (4.44)$$

Wenn  $|p\rangle$  Eigenzustand zu  $P_\mu$  ist, so gilt

$$P_\mu|p\rangle = p_\mu|p\rangle . \quad (4.45)$$

Verwendung von Gln. (4.38) und (4.37) liefert dann

$$P_\mu a^\dagger(\vec{k})|p\rangle = (p_\mu + k_\mu) a^\dagger(\vec{k})|p\rangle \quad (4.46)$$

$$P_\mu a(\vec{k})|p\rangle = (p_\mu - k_\mu) a(\vec{k})|p\rangle . \quad (4.47)$$

Und wir haben für

$$P^\mu a^\dagger(\vec{k}_1) a^\dagger(\vec{k}_2)|0\rangle = (k_1^\mu + k_2^\mu) a^\dagger(\vec{k}_1) a^\dagger(\vec{k}_2)|0\rangle . \quad (4.48)$$

Wir können also  $a^\dagger$  als Erzeugungsoperator und  $a$  als Vernichtungsoperator interpretieren. Wenden wir  $a^\dagger$  auf das Vakuum an, so haben wir

$$|\vec{k}\rangle = a^\dagger(\vec{k})|0\rangle . \quad (4.49)$$

Es handelt sich hier um einen 1-Teilchenzustand mit Impuls  $\vec{k}$ . Es wird ein Teilchen im Impulsraum erzeugt, mit der Energie  $k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ . Somit kann der gesamte Hilbert-Raum ( $\equiv$  Fock-Raum) folgendermaßen konstruiert werden:

$$|\vec{k}_1, \vec{k}_2\rangle = a^\dagger(\vec{k}_1) a^\dagger(\vec{k}_2)|0\rangle \quad (4.50)$$

$$|\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n\rangle = a^\dagger(\vec{k}_1) \dots a^\dagger(\vec{k}_n)|0\rangle . \quad (4.51)$$

Bei letzterem handelt es sich um einen Zustand im Fock-Raum, der aus  $n$  Teilchen mit den Impulsen  $\vec{k}_i$  besteht.

Mikrokausalität: Wenn wir zwei Messungen bei  $x$  und  $y$  haben, so dürfen sich diese nicht beeinflussen, wenn  $x$  und  $y$  zueinander raumartig sind. Somit müssen wir fordern

$$[\phi(x), \phi(y)] = 0 \quad \text{für } (x - y)^2 < 0. \quad (4.52)$$

Es gilt damit im Speziellen auch für  $\vec{x} \neq \vec{y}$

$$[\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{y}, t)] = 0 \quad (4.53)$$

$$\left[ \phi(\vec{x}, t), \dot{\phi}(\vec{y}, t) \right] = 0. \quad (4.54)$$

Und trivialerweise

$$[\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}, t)] = 0. \quad (4.55)$$

Dies verwenden wir nun, um zu zeigen, dass daraus die Bose-Symmetrie der Teilchen folgt, was bedeutet

$$[a^\dagger(\vec{k}_1), a^\dagger(\vec{k}_2)] = 0 \quad (4.56)$$

$$\left[ a(\vec{k}_1), a(\vec{k}_2) \right] = 0. \quad (4.57)$$

Wir können das Feld und seine zeitliche Ableitung schreiben als

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \exp(-i\vec{k}\vec{x}) \left( \exp(i\omega t) a^\dagger(\vec{k}) + \exp(-i\omega t) a(-\vec{k}) \right) \quad (4.58)$$

$$\dot{\phi}(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \exp(-i\vec{k}\vec{x}) \left( i\omega \exp(i\omega t) a^\dagger(\vec{k}) - i\omega \exp(-i\omega t) a(-\vec{k}) \right). \quad (4.59)$$

Die dazu gehörigen Fourier-Transformierten sind gegeben durch

$$\exp(i\omega t) a^\dagger(\vec{k}) + \exp(-i\omega t) a(-\vec{k}) = 2\omega \int d^3x \exp(i\vec{k}\vec{x}) \phi(\vec{x}, t) \quad (4.60)$$

$$\exp(i\omega t) a^\dagger(\vec{k}) - \exp(-i\omega t) a(-\vec{k}) = -2i \int d^3x \exp(i\vec{k}\vec{x}) \dot{\phi}(\vec{x}, t). \quad (4.61)$$

Da nun  $[\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{y}, t)] = 0 \quad \forall \vec{x}, \vec{y}$  gilt, folgt

$$\begin{aligned} 0 &= [(4.60)(\vec{k}_1), (4.60)(\vec{k}_2)] \\ &= \exp(+i(\omega_1 + \omega_2)t) [a^\dagger(\vec{k}_1), a^\dagger(\vec{k}_2)] \\ &+ \exp(-i(\omega_1 + \omega_2)t) [a(-\vec{k}_1), a(-\vec{k}_2)] \\ &+ \exp(+i(\omega_1 - \omega_2)t) [a^\dagger(\vec{k}_1), a(-\vec{k}_2)] \\ &+ \exp(-i(\omega_1 - \omega_2)t) [a(-\vec{k}_1), a^\dagger(\vec{k}_2)]. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Die Zeitabhängigkeit der beiden ersten Terme wird durch keinen anderen Term kompensiert. Die beiden letzten Terme haben für  $\omega_1 = \omega_2$  hingegen dieselbe Zeitabhängigkeit und kompensieren sich, s.u. Damit ist also

$$[a^\dagger(\vec{k}_1), a^\dagger(\vec{k}_2)] = 0 \quad \text{und} \quad [a(\vec{k}_1), a(\vec{k}_2)] = 0. \quad (4.63)$$

Diese Vertauschungsrelationen beinhalten die Bose-Symmetrie der Teilchen. Denn

$$|k_1, k_2\rangle \equiv a^\dagger(k_1)a^\dagger(k_2)|0\rangle = a^\dagger(k_2)a^\dagger(k_1)|0\rangle = |k_2, k_1\rangle . \quad (4.64)$$

Das bedeutet, dass Zwei-Teilchen-Zustände symmetrisch unter der Vertauschung von  $k_1$  und  $k_2$  sind. Wir haben hier das erste Beispiel für das Spin-Statistik-Theorem, dass nämlich Teilchen mit ganzzahligem Spin die Bosestatistik und Teilchen mit halbzahligen Spin die Fermistatistik erfüllen.

Wir betrachten den Kommutator  $[a, a^\dagger]$ . Mithilfe der Glgen. (4.60), (4.61) lassen sich  $a^\dagger(\vec{k})$  und  $a(\vec{k})$  berechnen:

$$a^\dagger(\vec{k}) = \exp(-i\omega t) \int d^3x \exp(+i\vec{k} \cdot \vec{x}) \left( \omega\phi(\vec{x}, t) - i\dot{\phi}(\vec{x}, t) \right) \quad (4.65)$$

$$a(\vec{k}) = \exp(+i\omega t) \int d^3x \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) \left( \omega\phi(\vec{x}, t) + i\dot{\phi}(\vec{x}, t) \right) . \quad (4.66)$$

Verwendung von (4.53), (4.54), (4.55) und

$$[\phi(\vec{x}), \phi(\vec{x})] = [\dot{\phi}(\vec{x}), \dot{\phi}(\vec{x})] = 0 \quad (4.67)$$

liefert

$$\begin{aligned} [a(\vec{k}_1), a^\dagger(\vec{k}_2)] &= \exp(i(\omega_1 - \omega_2)t) \int d^3x d^3y \exp(-i\vec{k}_1 \cdot \vec{x} + i\vec{k}_2 \cdot \vec{y}) \\ &\quad \left\{ i\omega_2[\dot{\phi}(\vec{x}, t), \phi(\vec{y}, t)] - i\omega_1[\phi(\vec{x}, t), \dot{\phi}(\vec{y}, t)] \right\} . \end{aligned} \quad (4.68)$$

Da  $a$  und  $\phi$  nicht einfach komplexe Zahlen sein sollen, darf dieser Ausdruck nicht identisch null sein. Nun kann der Integrand nur für  $\vec{x} = \vec{y}$  von Null verschieden sein, vgl. Glgen. (4.53)-(4.55). Deshalb fordern wir als Ansatz für die kanonische Vertauschungsrelation

$$[\phi(\vec{x}, t), \dot{\phi}(\vec{y}, t)] = i\delta(\vec{x} - \vec{y}) . \quad (4.69)$$

Damit folgt also für die Vertauschungsrelation von  $a$  und  $a^\dagger$

$$[a(\vec{k}_1), a^\dagger(\vec{k}_2)] = (2\pi)^3 2\omega_1 \delta(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) . \quad (4.70)$$

Wir können den Ansatz dadurch rechtfertigen, dass wir  $\phi$  als kanonische Koordinate,  $\dot{\phi}$  als kanonischen Impuls und  $\vec{x}$  als Index auffassen.

Wir können also zusammenfassen, dass  $\phi$  und  $\dot{\phi}$  folgenden kanonischen Vertauschungsrelationen genügen:

$$[\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{y}, t)] = 0 \quad (4.71)$$

$$[\phi(\vec{x}, t), \dot{\phi}(\vec{y}, t)] = i\delta(\vec{x} - \vec{y}) . \quad (4.72)$$

Und damit sind die Kommutatoren von  $a$  und  $a^\dagger$

$$[a^\dagger, a^\dagger] = 0 \quad (4.73)$$

$$[a, a] = 0 \quad (4.74)$$

$$[a(\vec{k}_1), a^\dagger(\vec{k}_2)] = (2\pi)^3 2\omega_1 \delta(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) . \quad (4.75)$$



Es sei bemerkt, dass sich manche Definitionen von  $a$  durch einen Faktor  $\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}$  unterscheiden. Die mithilfe von  $a^\dagger$  konstruierten Ein-Teilchen-Zustände

$$a^\dagger(\vec{k})|0\rangle \equiv |\vec{k}\rangle \quad (4.76)$$

sind folgendermaßen normiert

$$\langle \vec{k} | \vec{k}' \rangle = (2\pi)^3 2\omega \delta(\vec{k} - \vec{k}') . \quad (4.77)$$

Es handelt sich um uneigentliche Zustände und wäre mathematisch sorgfältiger Zustände mithilfe von Wellenpaketen einzuführen, also

$$|a^\dagger[f]\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} f(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k})|0\rangle . \quad (4.78)$$

$n$ -Teilchen-Zustände führen wir ein über

$$N a^\dagger(\vec{k}_1) \dots a^\dagger(\vec{k}_n) |0\rangle \quad (4.79)$$

bzw.

$$N a^\dagger[f_1] \dots a^\dagger[f_n] |0\rangle . \quad (4.80)$$

Hierbei sind die  $f_i$  orthonormiert durch die Forderung

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f_i^*(\vec{k}) f_j(\vec{k}) = \delta_{ij} . \quad (4.81)$$

Bei  $N$  handelt es sich um eine Normierungskonstante. Sie hat den Wert  $N = 1$ , falls alle  $f_i$  verschieden sind, und  $N = (n!)^{-\frac{1}{2}}$ , falls alle  $f_i$  gleich sind. Falls je  $r_1$  der  $f_i$  und je  $r_2$  der  $f_i$  gleich sind, dann ist

$$N = (r_1! r_2! \dots)^{-\frac{1}{2}} . \quad (4.82)$$

Interpretation: Die Heisenberg-Zustände mit einem Teilchen und der Impulswellenfunktion  $f(\vec{k})$  sind

$$|f\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} f(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}) |0\rangle . \quad (4.83)$$

Und die Schrödinger-Zustände sind

$$|f, t\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \exp(-i\omega t) f(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}) |0\rangle \quad (4.84)$$

Aus

$$\langle f, t | f, t \rangle = 1 \quad (4.85)$$

folgt dann

$$\int |f(\vec{k})|^2 \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = 1 \quad (4.86)$$

und umgekehrt.

Bemerkung: Wir können

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f(\vec{k}) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t) \quad (4.87)$$

nicht als Ortswellenfunktion  $\phi(x)$  eines Teilchens interpretieren. Denn es ist  $\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle \neq 0$  auch für  $(x-y)^2 < 0$ , was als Ausbreitung mit Überlichtgeschwindigkeit interpretiert werden müsste und damit im Widerspruch zu Kausalität stünde.

Konstruktion von Operatoren: Operatoren wie Energie-, Impuls-, Teilchenzahloperatoren und weitere lassen sich aus den Quantenfeldern folgendermaßen aufbauen: Es werden die Noether-Ströme verwendet, die 0-Komponente integriert und eine Normalordnung durchgeführt. Diese bedeutet

$$\text{Normalordnung: } : a^\dagger a : \equiv : a a^\dagger : \equiv a^\dagger a . \quad (4.88)$$

Warum wir diese Normalordnung durchführen wird unten klar werden.

Teilchenzahloperator: Der Teilchenzahloperator ist gegeben durch

$$N \equiv \int d\tilde{k} a^\dagger a , \quad (4.89)$$

wobei

$$d\tilde{k} = \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 2\pi \delta(k^2 - m^2)\theta(k_0) = \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \quad (4.90)$$

ein Lorentz-invariantes Integrationsmaß ist. Somit erhalten wir mithilfe der Kommutatorrelationen und der Definition des Zustandes  $|\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n\rangle$ ,

$$N|\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n\rangle = n|\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n\rangle . \quad (4.91)$$

Energie- und Impuls-Operatoren: Ausgehend vom Energie-Impuls-Tensor  $T_\nu^\mu$  bekommen wir die erhaltene Ladung, den Viererimpuls, als (siehe Glg. (3.67))

$$P_\mu = \int d^3x T_\mu^0 = \int d^3x \partial^0 \phi \partial_\mu \phi - g_\mu^0 \mathcal{L} . \quad (4.92)$$

Der Energieoperator ergibt sich aus

$$H = \int d^3x T_0^0 = \int d^3x \partial^0 \phi \partial_0 \phi - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \int d^3x \left( : \partial^0 \phi \partial_0 \phi : + : \vec{\nabla} \phi \vec{\nabla} \phi : + m^2 : \phi^2 : \right) \quad (4.93)$$

wobei die Doppelpunkte hier also die Normalordnung symbolisieren. Verwendung von

$$\phi = \int d\tilde{k} \left( \exp(i\omega t) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) a^\dagger(\vec{k}) + \exp(-i\omega t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) a(\vec{k}) \right) \quad (4.94)$$

$$\partial_0 \phi = \int d\tilde{k} \left( i\omega \exp(i\omega t) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) a^\dagger(\vec{k}) - i\omega \exp(-i\omega t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) a(\vec{k}) \right) \quad (4.95)$$

$$\vec{\nabla} \phi = \int d\tilde{k} \left( -i\vec{k} \exp(i\omega t) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) a^\dagger(\vec{k}) + i\vec{k} \exp(-i\omega t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) a(\vec{k}) \right) . \quad (4.96)$$

liefert

$$m^2 \int d^3x |\phi(\vec{x}, t)|^2|_{t=0} = (2\pi)^3 m^2 \int d\tilde{k} \int d\tilde{k}' \{ \delta(\vec{k} - \vec{k}') [a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}') + a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}')] + \delta(\vec{k} + \vec{k}') [a^\dagger(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}') + a(\vec{k})a(\vec{k}')] \} \quad (4.97)$$

und

$$\int d^3x |\partial_0 \phi(\vec{x}, t)|^2|_{t=0} = (2\pi)^3 \omega^2 \int d\tilde{k} \int d\tilde{k}' \{ \delta(\vec{k} - \vec{k}') [a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}') + a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}')] - \delta(\vec{k} + \vec{k}') [a^\dagger(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}') + a(\vec{k})a(\vec{k}')] \} \quad (4.98)$$

sowie

$$\int d^3x |\vec{\nabla} \phi(\vec{x}, t)|^2|_{t=0} = (2\pi)^3 \int d\tilde{k} d\tilde{k}' \{ \delta(\vec{k} - \vec{k}') [\vec{k} \cdot \vec{k}' a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}') + \vec{k}' \cdot \vec{k} a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}')] - \delta(\vec{k} + \vec{k}') [\vec{k} \cdot \vec{k}' a^\dagger(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}') + \vec{k}' \cdot \vec{k} a(\vec{k})a(\vec{k}')] \} . \quad (4.99)$$

Und damit haben wir

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int d\tilde{k} \int d\tilde{k}' (2\pi)^3 \{ \overbrace{[m^2 + \omega^2 + \vec{k}^2]}{=2\omega^2} (a^\dagger a + a a^\dagger) \delta(\vec{k} - \vec{k}') + \\ &\quad + \underbrace{[m^2 - \omega^2 + \vec{k}^2]}_{=0} (a^\dagger a^\dagger + a a) \delta(\vec{k} + \vec{k}') \} \\ &= \int d\tilde{k} \int d\tilde{k}' (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{k}') \omega^2 (a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}') + a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}')) \\ &= \frac{1}{2} \int d\tilde{k} \omega (a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k})) \\ &= \int d\tilde{k} \omega a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + \text{const} . \end{aligned} \quad (4.100)$$

Hierbei entspricht die Konstante der Vakuum-Energie, die für physikalische Prozesse irrelevant ist. Diese unendlich große Konstante wird subtrahiert, so dass das Vakuum die Energie Null hat. Der Trick, der hier angewandt wird, ist die Normalordnung. (Sie bedeutet - s.o. -, dass alle Erzeuger nach links müssen.) Damit haben wir

$$: H : = \int d\tilde{k} \frac{\omega}{2} : (a^\dagger a + a a^\dagger) : = \int d\tilde{k} \omega a^\dagger a . \quad (4.101)$$

Damit ist dann also im Vakuum:  $\langle 0|H|0\rangle = 0$ . Man findet analog ausgehend von

$$\vec{P} = \int d^3x T_j^0 = \int d^3x \partial_0 \phi \vec{\nabla} \phi \quad (4.102)$$

für

$$\vec{P} = \int d\tilde{k} \vec{k} a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) . \quad (4.103)$$

### 4.3.3 Der Kommutator $[\phi(x), \phi(y)]$

Wir berechnen den Kommutator  $[\phi(x), \phi(y)]$ , indem wir die Fourierzerlegung einsetzen und die Kommutatorrelationen der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren verwenden:

$$\begin{aligned}
[\phi(x), \phi(y)] &= \int d\tilde{k}d\tilde{k}' \left\{ [a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] e^{-ikx+ik'y} + [a^\dagger(\vec{k}), a(\vec{k}')] e^{ikx-ik'y} \right\} \\
&= \int \underbrace{d\tilde{k}}_{\frac{d^4k}{(2\pi)^3} \delta(k^2-m^2)\theta(k^0)} \left\{ e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)} \right\} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4k \epsilon(k^0) \delta(k^2 - m^2) e^{-ik(x-y)} \\
&\equiv i\Delta(x-y), \tag{4.104}
\end{aligned}$$

wobei

$$\epsilon(k^0) \equiv \theta(k^0) - \theta(-k^0). \tag{4.105}$$

Die Pauli-Jordan Distribution hat folgende Eigenschaften:

$$1) \quad (\square_x + m^2)\Delta(x-y) = (\square_y + m^2)\Delta(x-y) = 0 \tag{4.106}$$

(Massenschalen-Bedingung  $k^2 = m^2$ )

$$2) \quad \Delta(x-y) = -\Delta(y-x) \tag{4.107}$$

$$3) \quad \Delta(x-y)|_{x^0=y^0} = 0 \tag{4.108}$$

$$4) \quad \Delta(x-y) = 0, \quad \text{wenn } (x-y)^2 = (x_0-y_0)^2 - (\vec{x}-\vec{y})^2 < 0 \quad (\text{raumartig}) \tag{4.109}$$

$$5) \quad \frac{\partial}{\partial x_0} \Delta(x-y)|_{x_0=y_0} = -\delta(\vec{x}-\vec{y}). \tag{4.110}$$

Aus 4) folgt die Mikrokausalitat, d.h.  $[\phi(x), \phi(y)] = 0$  fur  $(x-y)^2 < 0$ .

## 4.4 Geladenes skalares Feld

Das Feld  $\phi = \phi^\dagger$  beschreibt selbstkonjugierte Teilchen, d.h. Teilchen, die gleich ihrem Antiteilchen sind. Beispiele hierfur sind das ungeladene Pion  $\pi^0$  oder das Higgsboson. Es gibt aber auch Spin-0 Teilchen, die nicht gleich ihrem Antiteilchen sind, wie etwa die geladenen Pionen  $\pi^+, \pi^-$  oder das Kaon  $K^0, \bar{K}^0$ . Diese Teilchen sind nicht durch ein hermitesches Feld beschreibbar. Wir betrachten daher ein Dublett von zwei hermiteschen Feldern  $\phi_1, \phi_2$  mit  $\phi_i^\dagger = \phi_i$  ( $i = 1, 2$ ). Das Feld

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \tag{4.111}$$

ist dann nicht hermitesch. Die Lagrangedichte fur ein freies Feld  $\phi$  lautet

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\phi) &= \mathcal{L}(\phi_1) + \mathcal{L}(\phi_2) \\
&= \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i - m^2 \phi_i \phi_i) \\
&= (\partial_\mu \phi^\dagger)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi \quad (\text{nachrechnen!}). \tag{4.112}
\end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichungen ergeben sich aus der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\square + m^2)\phi^\dagger = 0 \quad (4.113)$$

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\dagger)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\dagger} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\square + m^2)\phi = 0 . \quad (4.114)$$

Der kanonisch konjugierte Impuls zu  $\phi$  ist

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \partial_0 \phi^\dagger = \dot{\phi}^\dagger , \quad (4.115)$$

und der zu  $\phi^\dagger$  kanonisch konjugierte Impuls ist

$$\Pi^\dagger = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi^\dagger)} = \partial_0 \phi = \dot{\phi} . \quad (4.116)$$

Der Hamiltondichteoperator ist damit

$$\mathcal{H} = \Pi \dot{\phi} + \Pi^\dagger \dot{\phi}^\dagger - \mathcal{L} = \partial_0 \phi \partial_0 \phi^\dagger + (\vec{\nabla} \phi^\dagger)(\vec{\nabla} \phi) + m^2 \phi^\dagger \phi . \quad (4.117)$$

Der Hamiltondichteoperator bzw. der Hamiltonoperator soll normalgeordnet sein, damit  $\langle 0|H|0\rangle = 0$ . Also

$$H = \int d^3x : \left\{ \partial_0 \phi \partial_0 \phi^\dagger + (\vec{\nabla} \phi^\dagger)(\vec{\nabla} \phi) + m^2 \phi^\dagger \phi \right\} : . \quad (4.118)$$

Die hermiteschen Felder erfüllen

$$[\Pi_i(t, \vec{x}), \Pi_j(t, \vec{y})] = [\phi_i(t, \vec{x}), \phi_j(t, \vec{y})] = 0 \quad (4.119)$$

$$[\phi_i(t, \vec{x}), \Pi_j(t, \vec{y})] = i\delta_{ij}\delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad i, j = 1, 2 . \quad (4.120)$$

Beziehungweise allgemein (nach Voraussetzung gleicher Massenparameter)

$$[\phi_i(x), \phi_j(y)] = i\delta_{ij}\Delta(x - y) . \quad (4.121)$$

Und für das nicht-hermitesche Feld  $\phi$  ergibt sich

$$[\phi(x), \phi^\dagger(y)] = i\Delta(x - y) \quad (\text{nachrechnen!}) . \quad (4.122)$$

Differentiation nach  $x_0$  ergibt

$$(\partial_{x_0} \phi(x)) \phi^\dagger(y) - \phi^\dagger(y) (\partial_{x_0} \phi(x)) = i\partial_{x_0} \Delta(x - y) . \quad (4.123)$$

Wir setzen  $x_0 = y_0$  und erhalten mit (4.110)

$$[\Pi^\dagger(x_0, \vec{x}), \phi^\dagger(x_0, \vec{y})] = -i\delta(\vec{x} - \vec{y}) . \quad (4.124)$$

Sowie durch hermitesche Adjugation

$$[\phi(x_0, \vec{x}), \Pi(x_0, \vec{y})] = i\delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad \Rightarrow \quad [\Pi(x_0, \vec{x}), \phi(x_0, \vec{y})] = -i\delta(\vec{x} - \vec{y}) . \quad (4.125)$$

Die Fourierzerlegung des Feldes  $\phi$ , welches die Klein-Gordon-Gleichung erfüllt,

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0 , \quad (4.126)$$

ist gegeben durch

$$\phi(x) = \int d\vec{k} [a(\vec{k})e^{-ikx} + \underbrace{b^\dagger(\vec{k})}_{\neq a^\dagger, \text{ da } \phi \neq \phi^\dagger} e^{ikx}] . \quad (4.127)$$

Und die von  $\phi^\dagger$  durch

$$\phi^\dagger(x) = \int d\vec{k} [b(\vec{k})e^{-ikx} + a^\dagger(\vec{k})e^{ikx}] . \quad (4.128)$$

Einsetzen von

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \quad (4.129)$$

und Ausdrücken von  $\phi_1, \phi_2$  durch ihre jeweilige Fourierzerlegung liefert dann mit

$$a(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1(\vec{k}) + ia_2(\vec{k})) \quad (4.130)$$

$$b^\dagger(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^\dagger(\vec{k}) + ia_2^\dagger(\vec{k})) \quad (4.131)$$

sowie

$$[a_i(\vec{k}), a_j^\dagger(\vec{k}')] = (2\pi)^3 2\omega \delta_{ij} \delta(\vec{k} - \vec{k}') , \quad [a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0 \quad (4.132)$$

schließlich

$$[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = [b(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}')] = (2\pi)^3 2\omega \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (4.133)$$

$$\text{alle anderen Kommutatoren} = 0 . \quad (4.134)$$

Der normalgeordnete 4-er Impulsoperator  $P^\mu$  ergibt sich zu (nachrechnen!)

$$\begin{aligned} P_\mu = \int d^3x : T_\mu^0 : &= \int d^3x : \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} \partial_\mu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi^\dagger)} \partial_\mu \phi^\dagger - g_\mu^0 \mathcal{L} \right\} : \\ &= \int d\vec{k} k_\mu [a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k})] . \end{aligned} \quad (4.135)$$

Und es gelten die Vertauschungsrelationen (nachrechnen!)

$$[P_\mu, a^\dagger(\vec{k})] = k_\mu a^\dagger(\vec{k}) , \quad [P_\mu, a(\vec{k})] = -k_\mu a(\vec{k}) , \quad (4.136)$$

$$[P_\mu, b^\dagger(\vec{k})] = k_\mu b^\dagger(\vec{k}) , \quad [P_\mu, b(\vec{k})] = -k_\mu b(\vec{k}) . \quad (4.137)$$

Die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger(x) \partial^\mu \phi(x) - m^2 \phi^\dagger(x) \phi(x) \quad (4.138)$$

ist invariant unter einer  $U(1)$ -Symmetrie, d.h. unter den Phasentransformationen

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{i\lambda} \phi(x) \quad (4.139)$$

$$\phi^\dagger(x) \rightarrow \phi'^\dagger(x) = \phi^\dagger e^{-i\lambda} . \quad (4.140)$$

Der Noetherstrom ergibt sich mit

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \quad \delta x^\mu = A^\mu \lambda = 0 \quad (4.141)$$

$$\phi'(x) = \phi(x) + i\lambda\phi(x) \quad \delta\phi = i\phi \quad (4.142)$$

$$\phi^\dagger'(x) = \phi^\dagger(x) - i\lambda\phi^\dagger(x) \quad \delta\phi^\dagger = -i\phi^\dagger \quad (4.143)$$

$$(4.144)$$

(vergleiche Glgen. (3.86)-(3.89), wobei der Index  $k$  weggelassen wurde, da es sich um eine 1-parametrische Transformation handelt) zu

$$\begin{aligned} j^\mu &= -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}i\phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\dagger)}(-i\phi^\dagger) \\ &= -i(\partial^\mu\phi^\dagger)\phi + i(\partial^\mu\phi)\phi^\dagger. \end{aligned} \quad (4.145)$$

Der Strom wird normalgeordnet, damit für die Ladungsdichte  $j^0$  garantiert ist, dass

$$j^0(x)|0\rangle = 0, \quad (4.146)$$

also

$$j^\mu(x)_{\text{normalgeordnet}} = : -i(\partial^\mu\phi^\dagger)\phi + i(\partial^\mu\phi)\phi^\dagger : \quad (4.147)$$

$$\equiv i : \phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi(x) : . \quad (4.148)$$

Die Ladung ist gegeben durch (nachrechnen!)

$$Q = \int d^3x j^0(x)_{\text{normalgeordnet}} = i \int d^3x : \phi^\dagger(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) : = \int d\vec{k} [a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) - b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k})] . \quad (4.149)$$

Es ist (nachrechnen!)

$$\dot{Q} = i[H, Q] = 0 \quad (4.150)$$

und damit ist  $Q$  also eine Erhaltungsgröße. Die Interpretation der Operatoren  $a, a^\dagger, b, b^\dagger$  ist (analog zum hermiteschen Fall)

$$a^\dagger \quad \text{erzeugt ein Teilchen vom Typ } a \text{ mit Spin } 0 \text{ und Masse } m \quad (4.151)$$

$$b^\dagger \quad \text{erzeugt ein Teilchen vom Typ } b \text{ mit Spin } 0 \text{ und Masse } m \quad (4.152)$$

$$a \quad \text{vernichtet ein Teilchen vom Typ } a \text{ mit Spin } 0 \text{ und Masse } m \quad (4.153)$$

$$b \quad \text{vernichtet ein Teilchen vom Typ } b \text{ mit Spin } 0 \text{ und Masse } m . \quad (4.154)$$

Das heißt, das Feld

$$\phi \quad \text{vernichtet ein Quant vom Typ } a, \text{ erzeugt ein Quant vom Typ } b \quad (4.155)$$

$$\phi^\dagger \quad \text{vernichtet ein Quant vom Typ } b, \text{ erzeugt ein Quant vom Typ } a . \quad (4.156)$$

Wir betrachten den Zustandsraum (Fockraum). Der Grundzustand ist gegeben durch  $|0\rangle$ .

Wir fordern

$$a(\vec{k})|0\rangle = b(\vec{k})|0\rangle = 0, \quad (4.157)$$

so dass

$$P_\mu|0\rangle = 0, \quad Q|0\rangle = 0. \quad (4.158)$$

Die 1-Teilchenzustände zum scharfen 4-er Impuls  $k_\mu$  sind gegeben durch

$$|a(\vec{k})\rangle := a^\dagger(\vec{k})|0\rangle \quad (4.159)$$

$$|b(\vec{k})\rangle := b^\dagger(\vec{k})|0\rangle. \quad (4.160)$$

Die Ladung dieser Zustände ist (nachrechnen!)

$$Q|a(\vec{k})\rangle = Qa^\dagger(\vec{k})|0\rangle = +|a(\vec{k})\rangle \quad (4.161)$$

$$Q|b(\vec{k})\rangle = Qb^\dagger(\vec{k})|0\rangle = -|b(\vec{k})\rangle. \quad (4.162)$$

Das heißt,

$$|a(\vec{k})\rangle \quad \text{ist ein 1-Teilchenzustand mit Masse } m, \text{ Spin } 0 \text{ und Ladung } + \quad (4.163)$$

$$|b(\vec{k})\rangle \quad \text{ist ein 1-Teilchenzustand mit Masse } m, \text{ Spin } 0 \text{ und Ladung } - . \quad (4.164)$$

Es handelt sich um das Teilchen und sein Antiteilchen.

## 4.5 Die Quantisierung von Spinorfeldern (Dirac-Feldern)

Die freie Lagrangedichte ohne Wechselwirkung ist gegeben durch

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\rlap{\not{\partial}} - m)\psi, \quad \text{wobei } \bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0. \quad (4.165)$$

Zur Erinnerung

$$(\gamma^0)^2 = 1. \quad (4.166)$$

Der kanonisch konjugierte Impuls in Komponentenform ( $\alpha = 1, \dots, 4$ ) ist

$$\pi^\alpha(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi_\alpha)} = i\psi_\alpha^\dagger = i\psi_\alpha^*. \quad (4.167)$$

Die Lösung der Dirac-Gleichung vor der Quantisierung ist gegeben durch eine Entwicklung nach ebenen Wellen,

$$\psi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \left[ \exp(ikx) \beta_s^*(\vec{k}) v_s(\vec{k}) + \exp(-ikx) \alpha_s(\vec{k}) u_s(\vec{k}) \right] \quad (4.168)$$

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \left[ \exp(-ikx) \beta_s(\vec{k}) \bar{v}_s(\vec{k}) + \exp(ikx) \alpha_s^*(\vec{k}) \bar{u}_s(\vec{k}) \right]. \quad (4.169)$$

Die Felder erfüllen die Dirac-Gleichung

$$(i\rlap{\not{\partial}} - m)\psi = 0 \quad (4.170)$$

$$\bar{\psi}(i\overleftarrow{\not{\partial}} + m) = 0. \quad (4.171)$$

Aus (4.170) folgt

$$(\not{k} + m)v_s = 0 \quad \text{Lösung zu negativer Frequenz} \quad (4.172)$$

$$(\not{k} - m)u_s = 0 \quad \text{Lösung zu positiver Frequenz.} \quad (4.173)$$



### 4.5.1 Quantisierung

Zur Quantisierung werden  $\alpha_s, \beta_s^*$  durch Operatoren ersetzt,

$$\alpha_s \rightarrow a_s \quad \text{und} \quad \beta_s^* \rightarrow b_s^\dagger. \quad (4.174)$$

Die Lösung der Dirac-Gleichung lautet damit in quantisierter Form

$$\psi(x) = \int d\tilde{k} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \left[ \exp(ikx) b_s^\dagger(\vec{k}) v_s(\vec{k}) + \exp(-ikx) a_s(\vec{k}) u_s(\vec{k}) \right] \quad (4.175)$$

$$\bar{\psi}(x) = \int d\tilde{k} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \left[ \exp(-ikx) b_s(\vec{k}) \bar{v}_s(\vec{k}) + \exp(ikx) a_s^\dagger(\vec{k}) \bar{u}_s(\vec{k}) \right]. \quad (4.176)$$

Es soll wiederum die Heisenberg Gleichung

$$\partial_\mu \psi = i[P_\mu, \psi] \quad (4.177)$$

erfüllt sein. Daraus folgt dann

$$[P_\mu, a_s^\dagger(\vec{k})] = k_\mu a_s^\dagger(\vec{k}) \quad (4.178)$$

$$[P_\mu, b_s^\dagger(\vec{k})] = k_\mu b_s^\dagger(\vec{k}) \quad (4.179)$$

$$[P_\mu, a_s(\vec{k})] = -k_\mu a_s(\vec{k}) \quad (4.180)$$

$$[P_\mu, b_s(\vec{k})] = -k_\mu b_s(\vec{k}) \quad (4.181)$$

Damit folgt wie beim skalaren Feld

$$a|0\rangle = b|0\rangle = 0, \quad (4.182)$$

da für alle Zustände die Energie positiv sein muss. Damit erzeugt  $\psi$  ein Antiteilchen (z.B. Positron  $e^+$ ) und vernichtet ein Teilchen (z.B. Elektron  $e^-$ ).

### 4.5.2 Operatoralgebra

Die Translationsinvarianz der zur Dirac-Lagrangedichte gehörenden Wirkung führt auf den Energie-Impuls-Tensor, der gegeben ist durch

$$T^{\mu\nu} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi - g^{\mu\nu}[\bar{\psi} \underbrace{(i\cancel{\partial} - m)\psi}_{=0 \text{ wg. Dirac-Gleichung}}]. \quad (4.183)$$

Das heißt

$$T^{\mu\nu} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi. \quad (4.184)$$

Der Impuls-Operator ergibt sich zu

$$P^\nu = \int d^3x T^{0\nu} = i \int d^3x \psi^\dagger \partial^\nu \psi. \quad (4.185)$$

Er muss noch normalgeordnet werden. Einsetzen der Fourierzerlegung liefert vor der Normalordnung für den Hamiltonoperator

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \psi^\dagger(x) i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) = \int d^3x \sum_{\alpha=1}^4 \psi_\alpha^\dagger i \frac{\partial}{\partial t} \psi_\alpha \\ &= \int d\vec{k} k_0 \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} [a_s^\dagger(\vec{k}) a_s(\vec{k}) - b_s(\vec{k}) b_s^\dagger(\vec{k})] . \end{aligned} \quad (4.186)$$

Dabei haben wir verwendet, dass

$$u^\dagger(k, s) u(k, s') = 2k_0 \delta_{ss'} \quad (4.187)$$

$$v^\dagger(k, s) v(k, s') = 2k_0 \delta_{ss'} \quad (4.188)$$

$$u^\dagger(k, s) v(\vec{k}, s') = 0 \quad (4.189)$$

$$u(k, s) v^\dagger(\vec{k}, s') = 0 , \quad \text{mit } \vec{k}^\mu = (k_0, -\vec{k})^T . \quad (4.190)$$

Es müssen für die Erzeuger und Vernichter Antivertauschungsrelationen gefordert werden, damit Teilchen und Antiteilchen nicht entgegengesetzte Energien haben. Wir fordern also

$$\{a_r(\vec{k}), a_s^\dagger(\vec{k}')\} = \delta_{rs} (2\pi)^3 2\omega_k \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (4.191)$$

$$\{b_r(\vec{k}), b_s^\dagger(\vec{k}')\} = \delta_{rs} (2\pi)^3 2\omega_k \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (4.192)$$

$$\{a, b\} = \{a, a\} = \{b, b\} = \dots = 0 . \quad (4.193)$$

Damit erhalten wir nach Normalordnung für den Hamiltonoperator

$$H = \int d\vec{k} k_0 \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} [a_s^\dagger(\vec{k}) a_s(\vec{k}) + b_s^\dagger(\vec{k}) b_s(\vec{k})] . \quad (4.194)$$

Und für den Impuls

$$\vec{P} = \int d\vec{k} \vec{k} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} [a_s^\dagger(\vec{k}) a_s(\vec{k}) + b_s^\dagger(\vec{k}) b_s(\vec{k})] \quad (4.195)$$

Für den Ladungsoperator (siehe Glg. (3.96)) findet man

$$Q = \int d^3x : j_0(x) : = \int d^3x : \psi^\dagger(x) \psi(x) : = \int d\vec{k} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} [a_s^\dagger(\vec{k}) a_s(\vec{k}) - b_s^\dagger(\vec{k}) b_s(\vec{k})] \quad (4.196)$$

Bemerkungen:

1. Die negative (unendliche große) Konstante entfällt aufgrund der Normalordnung.
2. Aus den Antivertauschungsrelationen der Erzeuger- und Vernichter-Operatoren folgen unter Verwendung von

$$\sum_{s=\pm\frac{1}{2}} u_\alpha(\vec{k}, s) \bar{u}_\beta(\vec{k}, s) = (\not{k} + m)_{\alpha\beta} \quad (4.197)$$

$$\sum_{s=\pm\frac{1}{2}} v_\alpha(\vec{k}, s) \bar{v}_\beta(\vec{k}, s) = (\not{k} - m)_{\alpha\beta} \quad (4.198)$$

die Antivertauschungsrelationen

$$\{\psi_\alpha(\vec{x}, t), \psi_\beta(\vec{y}, t)\} = \{\bar{\psi}_\alpha(\vec{x}, t), \bar{\psi}_\beta(\vec{y}, t)\} = 0 \quad (4.199)$$

$$\{\psi_\alpha(\vec{x}, t), \bar{\psi}_\beta(\vec{y}, t)\} = \gamma_{\alpha\beta}^0 \delta(\vec{x} - \vec{y}) . \quad (4.200)$$

Und damit

$$\{\psi_\alpha(\vec{x}, t), \psi_\beta^\dagger(\vec{y}, t)\} = \delta_{\alpha\beta} \delta(\vec{x} - \vec{y}) . \quad (4.201)$$

Es ist also  $\psi^\dagger$  kanonisch konjugierter Impuls zu  $\psi$ .

### 3. Konstruktion der Zustände: Der Ein-Teilchen-Zustand

$$a_s^\dagger |0\rangle = |\vec{k}, s\rangle \quad (4.202)$$

wird interpretiert als Elektron mit Impuls  $\vec{k}$  und Spin  $s$ . Der Vakuumzustand ist der Zustand mit  $\vec{k} = \vec{0}$  und  $s = 0$ . Zwei-Teilchen-Zustände werden konstruiert durch

$$|\vec{k}_1, s_1; \vec{k}_2, s_2\rangle = a_{s_1}^\dagger(\vec{k}_1) a_{s_2}^\dagger(\vec{k}_2) |0\rangle = -a_{s_2}^\dagger(\vec{k}_2) a_{s_1}^\dagger(\vec{k}_1) |0\rangle = -|\vec{k}_2, s_2; \vec{k}_1, s_1\rangle . \quad (4.203)$$

Es gilt also das Pauliprinzip. Das Pauliprinzip ist das Ergebnis der zweiten Quantisierung des Spinorfeldes. Die Spin-1/2-Teilchen gehorchen also der Fermi-Statistik.

Mit der Identifikation

$$\begin{aligned} |1\rangle &\equiv a_1^\dagger(\vec{k}) |0\rangle , & |2\rangle &\equiv a_2^\dagger(\vec{k}) |0\rangle \\ |3\rangle &\equiv b_1^\dagger(\vec{k}) |0\rangle , & |4\rangle &\equiv b_2^\dagger(\vec{k}) |0\rangle \end{aligned} \quad (4.204)$$

ist also

$$H|c\rangle = +k_0|c\rangle , \quad c = 1, 2, 3, 4 \quad (4.205)$$

positiv definit. Und für den Ladungsoperator  $Q$  gilt

$$Q|c\rangle = \begin{cases} +|c\rangle & \text{für } c = 1, 2 \\ -|c\rangle & \text{für } c = 3, 4 \end{cases} . \quad (4.206)$$

## 4.6 Der Feynman-Propagator für ein skalares Feld

Wenden wir den Feldoperator  $\phi^\dagger(x)$  auf einen beliebigen Fockzustand an, so

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{erzeugt er ein Teilchen mit der Ladung } +1 \\ \text{oder vernichtet er ein Teilchen mit der Ladung } -1 \end{array} \right\} \rightsquigarrow \text{d.h. "addiert" die Ladung } +1 . \quad (4.207)$$

Analog nimmt der Feldoperator  $\phi(y)$  die Ladung  $+1$  weg. Wir betrachten für  $t' > t$

$$\theta(t' - t) \langle 0 | \underbrace{\phi(t', \vec{x}')}_{\text{Vernichtung von Ladung } +1 \text{ zu späterer Zeit } t' \text{ und bei } \vec{x}'} \underbrace{\phi^\dagger(t, \vec{x})}_{\text{Erzeugung von Ladung } +1 \text{ zur Zeit } t \text{ und bei } \vec{x}} | 0 \rangle . \quad (4.208)$$

Wenn  $t > t'$  betrachte

$$\theta(t - t') \langle 0 | \underbrace{\phi^\dagger(t, \vec{x})}_{\substack{\text{Vernichtung von Ladung} \\ -1 \text{ zu späterer} \\ \text{Zeit } t \text{ und bei } \vec{x}}} \underbrace{\phi(t', \vec{x}')}_{\substack{\text{Erzeugung von Ladung} \\ -1 \text{ zur} \\ \text{Zeit } t' \text{ und bei } \vec{x}'}} | 0 \rangle . \quad (4.209)$$

In beiden Fällen wird die Ladung erhöht bei  $(t, \vec{x})$  und erniedrigt bei  $(t', \vec{x}')$ . Der sogenannte Feynman-Propagator  $i\Delta_F(x - x')$  ist die Summe der Amplituden (4.208) und (4.209). Also

$$i\Delta_F(x - x') = \theta(t' - t) \langle 0 | \phi(x') \phi^\dagger(x) | 0 \rangle + \theta(t - t') \langle 0 | \phi^\dagger(x) \phi(x') | 0 \rangle . \quad (4.210)$$

Mithilfe des zeitgeordneten Produkts, welches für Bosefelder definiert ist durch

$$T[A(x)B(y)] = A(x)B(y)\theta(x_0 - y_0) + B(y)A(x)\theta(y_0 - x_0) , \quad (4.211)$$

wobei  $A, B$  Bosefelder sind, lässt sich der Feynman-Propagator schreiben als

$$i\Delta_F(x - y) = \langle 0 | T[\phi(x)\phi^\dagger(y)] | 0 \rangle . \quad (4.212)$$

Wir wollen nun die Darstellung von  $\Delta_F$  bestimmen. Dazu berechnen wir

$$\langle 0 | \phi(x)\phi^\dagger(y) | 0 \rangle = \int d\tilde{k} e^{-ik(x-y)} \quad (4.213)$$

$$\langle 0 | \phi^\dagger(y)\phi(x) | 0 \rangle = \int d\tilde{k} e^{+ik(x-y)} . \quad (4.214)$$

Dies ergibt sich durch Einsetzen der Fourierzerlegung von  $\phi, \phi^\dagger$  und Verwenden der Vertauschungsrelationen (4.133), (4.134). Einsetzen von (4.213), (4.214) in (4.210) liefert

$$\begin{aligned} \Delta_F(x - y) &= \frac{1}{i} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \{ \theta(x_0 - y_0) e^{-ik(x-y)} + \theta(y_0 - x_0) e^{+ik(x-y)} \} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik(x-y)} . \end{aligned} \quad (4.215)$$

Um die letzte Zeile zu beweisen, wird die Integration  $\int_{-\infty}^{+\infty} dk_0$  ausgeführt. Der Nenner weist zwei komplexe Nullstellen auf,

$$k_0 = \pm \sqrt{\vec{k}^2 + m^2 - i\epsilon} \approx \pm \underbrace{\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}}_{\omega} \mp i\epsilon' , \quad (4.216)$$

wobei  $\epsilon' = \epsilon/(2(\vec{k}^2 + m^2))$ . Die  $i\epsilon$ -Vorschrift entspricht einer Deformation des Integrationsweges. Es gilt für

$$x_0 > y_0 : \quad e^{-ik_0(x_0 - y_0)} \rightarrow 0 \quad \text{falls } \text{Im}k_0 \rightarrow -\infty . \quad (4.217)$$

D.h. der Integrationsweg kann durch einen großen Halbkreis in der unteren Halbebene ergänzt werden. Damit findet man

$$\oint dk_0 f(k_0) = \underbrace{\int_{\text{unterer Halbkreis}} dk_0 f(k_0)}_{=0} + \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 f(k_0) . \quad (4.218)$$

Laut dem Residuensatz ist aber

$$\oint dk_0 f(k_0) = (-1) 2\pi i f(k_0) (k_0 - \omega)|_{k_0=\omega} . \quad (4.219)$$

Das Minuszeichen kommt daher, dass die Kurve im mathematisch negativen Sinn durchlaufen wird. Damit ist also

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 f(k_0) &= -2\pi i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} (k_0 - \omega) e^{-ik(x-y)}|_{k_0=\omega} \\ &= (-i) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} e^{-i\omega(x_0-y_0)} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} . \end{aligned} \quad (4.220)$$

Es gilt für

$$y_0 > x_0 : \quad e^{-ik_0(x_0-y_0)} \rightarrow 0 \quad \text{falls } \text{Im}k_0 \rightarrow +\infty . \quad (4.221)$$

Somit kann der Integrationsweg nach oben geschlossen werden. Dieser umschließt den Pol bei  $k_0 = -\sqrt{\vec{k}^2 + m^2 - i\epsilon}$ , d.h.

$$\oint dk_0 f(k_0) = \underbrace{\int_{\text{oberer Halbkreis}} dk_0 f(k_0)}_{=0} + \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 f(k_0) . \quad (4.222)$$

Und mit dem Residuensatz

$$\oint dk_0 f(k_0) = 2\pi i f(k_0) (k_0 + \omega)|_{k_0=-\omega} . \quad (4.223)$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 f(k_0) &= 2\pi i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} (k_0 + \omega) e^{-ik(x-y)}|_{k_0=-\omega} \\ &= (-i) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} e^{+i\omega(x_0-y_0)} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} = -i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} e^{+ik(x-y)} \end{aligned} \quad (4.224)$$

wobei im letzten Schritt eine Variablentransformation  $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$  durchgeführt wurde. Die Summe von (4.220) und (4.224) ergibt (4.215).

### Eigenschaften von $\Delta_F(x-y)$

1. Es ist

$$\Delta_F(x-y) = \Delta_F(y-x) . \quad (4.225)$$

Es handelt sich also um eine gerade Distribution.

2.  $\Delta_F$  is eine Greensfunktion der Klein-Gordon-Gleichung, denn es gilt

$$(\square_x + m^2)\Delta_F(x-y) = -\delta^{(4)}(x-y) . \quad (4.226)$$

Die  $i\epsilon$ -Vorschrift entspricht einer bestimmten Randbedingung, nämlich: Positive Frequenzen  $+\omega$  breiten sich vorwärts in der Zeit aus, negative Frequenzen  $-\omega$  breiten sich rückwärts in der Zeit aus. Deswegen heißt  $\Delta_F$  auch kausale Greensfunktion.

3. Das hermitesche Spin-0-Feld  $\phi = \phi^\dagger$  hat denselben Feynman-Propagator:

$$\langle 0|T[\phi(x), \phi(y)]|0\rangle = i\Delta_F(x-y). \quad (4.227)$$

4. Die Distribution  $\Delta_F(x-y)$  ist Poincaré-invariant:

$$x' = \Lambda x + b, \quad y' = \Lambda y + b \quad \Rightarrow \quad \Delta_F(x' - y') = \Delta_F(x - y). \quad (4.228)$$

## 4.7 Der Fermionpropagator

Es gilt analog zum Klein-Gordon-Feld (siehe Glg. (4.104), wobei hier der Antikommutator verwendet wird)

$$\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)\} = (i\partial + m)_{\alpha\beta} i\Delta(x-y), \quad (4.229)$$

denn

$$\begin{aligned} \{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)\} &= \int d\tilde{k} \int d\tilde{k}' \sum_{s,s'} \{ \exp(ikx) v_{s_\alpha}(\vec{k}) b_s^\dagger(\vec{k}) + \exp(-ikx) u_{s_\alpha}(\vec{k}) a_s(\vec{k}), \\ &\quad \exp(-ik'y) \bar{v}_{s'_\beta}(\vec{k}') b_{s'}(\vec{k}') + \exp(ik'y) \bar{u}_{s'_\beta}(\vec{k}') a_{s'}^\dagger(\vec{k}') \} \\ &= \int d\tilde{k} \sum_s \left( u_{s_\alpha}(\vec{k}) \bar{u}_{s_\beta}(\vec{k}) \exp(-ik(x-y)) + v_{s_\alpha}(\vec{k}) \bar{v}_{s_\beta}(\vec{k}) \exp(ik(x-y)) \right) \\ &= \int d\tilde{k} \sum_s \left( (\not{k} + m)_{\alpha\beta} \exp(-ik(x-y)) + (\not{k} - m)_{\alpha\beta} \exp(ik(x-y)) \right) \\ &= (i\partial_x + m)_{\alpha\beta} \int d\tilde{k} (\exp(-ik(x-y)) - \exp(+ik(x-y))) \\ &= (i\partial_x + m)_{\alpha\beta} (i\Delta(x-y)). \end{aligned} \quad (4.230)$$

Der Feynman-Propagator ist gegeben durch das zeitgeordnete Produkt (für Fermionen!)

$$S_{F_{\alpha\beta}}(x-y) \equiv \langle 0|T \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) |0\rangle = \langle 0|\theta(x^0 - y^0) \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) - \theta(y^0 - x^0) \bar{\psi}_\beta(y) \psi_\alpha(x) |0\rangle. \quad (4.231)$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} (i\partial_x + m) i\Delta_F(x-y) \\ = S_F(x-y) &= (i\partial_x + m) \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik(x-y)} \\ &= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik(x-y)} \\ &\stackrel{k^2 = k^2}{=} i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{k} - m + i\epsilon} e^{-ik(x-y)}. \end{aligned} \quad (4.232)$$

Damit ist

$$(i\partial_x - m) S_F(x-y) = i\delta^{(4)}(x-y). \quad (4.233)$$

Der Fermionpropagator ist also Greensfunktion zur freien Diracgleichung. Und es gilt die Kausalität für  $\{\psi, \bar{\psi}\}$ .

## 4.8 Quantisierung von Spin-1-Feldern (Vektorfeldern)

Wir wollen nun Vektorfelder quantisieren. Aus der Elektrodynamik ist der klassische Limes bekannt. Dieser ist durch die Maxwell-Gleichungen gegeben. Allerdings ist die Quantisierung von Feldern, die durch die Maxwell-Gleichungen definiert sind, schwierig. Das Problem kommt von den Freiheitsgraden. Das Viererpotential

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} \quad (4.234)$$

hat vier Freiheitsgrade. Das Photon hat aber nur zwei Freiheitsgrade. Es muss also dafür gesorgt werden, dass die nicht-dynamischen Freiheitsgrade, die nicht zum Photon beitragen, nicht quantisiert werden.

Wir werden zunächst ein massives Vektorfeld quantisieren. Dieses besitzt drei Freiheitsgrade. Beispiele für massive Vektorfelder sind die  $W^\pm$ - und  $Z$ -Bosonen der schwachen Wechselwirkung. Weitere Beispiele sind die Spin-1 Mesonen  $\rho, \omega, \phi$ , die aus Quarks aufgebaut sind. Der Grund für die Diskrepanz in der Anzahl der Freiheitsgrade ist eine innere Symmetrie (Eichinvarianz).

### 4.8.1 Massives Vektorfeld

Das Feld  $A^\mu$  besitzt vier Freiheitsgrade, das massive Vektorfeld aber nur drei. Wir benötigen also eine Nebenbedingung, um die Anzahl der Freiheitsgrade zu verringern.

Wir stellen zunächst die Feldgleichungen auf, indem wir uns an die Maxwell Gleichungen anlehnen, welche sich kovariant aufschreiben lassen. Wir haben also

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0, \quad (4.235)$$

mit dem Feldstärkentensor

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (4.236)$$

Diese Gleichung nennt man *Proca-Gleichung*. Anwenden der Vierer-Divergenz auf die Gleichung liefert

$$\partial_\nu (\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu) = \partial_\nu \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + m^2 \partial_\nu A^\nu = 0. \quad (4.237)$$

Der erste Ausdruck liefert null, da hier ein symmetrischer Tensor mit einem antisymmetrischen Tensor kombiniert wird. Dies sieht man auch durch explizites Nachrechnen:

$$\begin{aligned} \partial_\nu \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) &= \partial_\nu \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\nu \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = \partial_\mu \partial_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial_\nu \partial_\mu \partial^\nu A^\mu \\ &= \partial_\nu \partial_\mu \partial^\nu A^\mu - \partial_\nu \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = 0. \end{aligned} \quad (4.238)$$

Dabei wurden im ersten Summanden die Summationsindizes  $\mu$  und  $\nu$  vertauscht, was zulässig ist, da über alle Indizes summiert wird. Die partiellen Ableitungen  $\partial_\mu$  und  $\partial_\nu$  können nach dem Schwarzschen Satz dann wieder vertauscht werden. Somit gilt  $m^2 \partial_\nu A^\nu = 0$ . Unter der Annahme, dass die Masse ungleich null ist, folgt dann die Nebenbedingung

$$\partial_\nu A^\nu = 0. \quad (4.239)$$

Einsetzen in (4.236) liefert

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \square A^\nu \quad (4.240)$$

und somit

$$(\square + m^2)A^\nu(x) = 0 \quad \text{mit} \quad \partial_\nu A^\nu = 0. \quad (4.241)$$

Wir haben also die Klein-Gordon-Gleichung für jede Komponente von  $A^\nu$  gefunden. Durch die Nebenbedingung  $\partial_\nu A^\nu$  reduziert sich die Anzahl der Freiheitsgrade auf drei. Die zu (4.241) gehörige Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu, \quad (4.242)$$

wobei  $A_\mu$  ein reelles Vektorfeld darstellt. Als Ansatz einer Lösung von (4.241) wählen wir ebene Wellen der Form

$$A_\nu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \exp(-ikx) \epsilon_\nu^{(\lambda)}(\vec{k}) \alpha(\vec{k}) + \text{h.c.}, \quad \text{mit} \quad \omega_k = k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}. \quad (4.243)$$

Bei  $\epsilon_\nu^{(\lambda)}$  handelt es sich um den Polarisationsvektor. Aus der Nebenbedingung ergibt sich

$$k^\nu \epsilon_\nu^{(\lambda)}(\vec{k}) = 0. \quad (4.244)$$

Somit gibt es also drei linear unabhängige  $\epsilon_\nu^{(\lambda)}$ . Im Ruhesystem des Teilchens haben wir  $k^\nu = (m, \vec{0})^T$ . Daraus folgt dann

$$\epsilon_0^{(\lambda)} = 0, \quad \text{damit} \quad k^\nu \epsilon_\nu(\vec{k}) = 0. \quad (4.245)$$

Dies ist erfüllt durch die Wahl

$$\epsilon_\nu^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_\nu^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \epsilon_\nu^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.246)$$

Es handelt sich um die kartesische Standardbasis. Alternativ kann man die folgende komplexe Basis wählen:

$$\epsilon_\nu^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \epsilon_\nu^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.247)$$

Die ersten beiden Vektoren beschreiben die zirkuläre Polarisation. Es gilt für beliebige Bezugssysteme

$$\epsilon_\mu^{(\lambda)} (\epsilon^{*\lambda})^{(\lambda')\mu} = \epsilon^{(\lambda)} \cdot \epsilon^{(\lambda')*} = -\delta^{\lambda\lambda'} \quad \text{für} \quad \lambda, \lambda' = 1, 2, 3. \quad (4.248)$$

Und die Vollständigkeitsrelation lautet

$$\sum_\lambda \epsilon_\mu^{(\lambda)} \epsilon_\nu^{*(\lambda)} = - \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m^2} \right). \quad (4.249)$$



Für die allgemeine Lösung in quantisierter Form haben wir

$$A_\mu(x) = \int d\tilde{k} \sum_{\lambda=1,2,3} \left( \exp(-ikx) \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{k}) a^{(\lambda)}(\vec{k}) + \exp(ikx) \epsilon_\mu^{*(\lambda)}(\vec{k}) a^{\dagger(\lambda)}(\vec{k}) \right). \quad (4.250)$$

Der Operator  $a^{\dagger(\lambda)}(\vec{k})$  erzeugt ein Teilchen mit Impuls  $\vec{k}$  und Polarisation  $\lambda$ . Es gelten folgende Kommutatorrelationen

$$[A_\nu(x), A_\nu(y)] = 0 \quad \text{für } (x - y)^2 < 0. \quad (4.251)$$

Und für die Operatoren

$$[a^{(\lambda)}(\vec{k}), a^{\dagger(\lambda')}(\vec{k}')] = \delta_{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 2\omega_k \delta(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (4.252)$$

## 4.8.2 Masseloses Vektorfeld (Photonfeld)

### Eichfreiheit

Die Maxwell-Gleichungen lauten

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad \text{inhomogene Maxwellgleichungen} \quad (4.253)$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad \text{homogene Maxwellgleichungen,} \quad (4.254)$$

mit dem dualen Feldstärkentensor

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}. \quad (4.255)$$

Der Feldstärkentensor ausgedrückt durch die Potentiale lautet

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (4.256)$$

Damit ist die Gleichung (4.254) automatisch erfüllt (nachrechnen!). Das Vektorpotential ist hierbei aber noch nicht eindeutig festgelegt. Wir haben also eine Eichfreiheit. So bleibt  $F_{\mu\nu}$  unverändert unter der Ersetzung

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x), \quad (4.257)$$

wobei  $\Lambda(x)$  ein beliebiges Skalarfeld ist. Wir können die

$$\underline{\text{Lorentz-Eichung:}} \quad \partial_\mu A^\mu = 0 \quad (4.258)$$

wählen. Denn, falls

$$\partial_\mu A^\mu = G(x) \neq 0, \quad (4.259)$$

dann wähle  $\Lambda(x)$  so, dass

$$\square \Lambda(x) = -G(x). \quad (4.260)$$

Für das neue Feld  $A'_\mu(x)$  gilt dann (4.258). In der Lorentz-Eichung ist die Maxwellgleichung (4.253) äquivalent zu

$$\square A^\nu = j^\nu \quad (4.261)$$

bzw. im freien Fall ( $j = 0$ )

$$\square A^\nu = 0 . \quad (4.262)$$

Als weitere Freiheit in der Wahl der Eichung können noch solche  $\Lambda$  gewählt werden, für die gilt

$$\square \Lambda(x) = 0 . \quad (4.263)$$

Neben der Lorentz-Eichung gibt es noch die Coulomb-Eichung. Hier wird gefordert

$$\underline{\text{Coulomb-Eichung:}} \quad A^0 = 0 \quad \text{und} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 . \quad (4.264)$$

Diese Eichung ist allerdings nicht kovariant. Ein weiteres Beispiel einer Eichung ist die axiale Eichung, für die gilt

$$\underline{\text{Axiale Eichung:}} \quad A_z = 0 . \quad (4.265)$$

Im folgenden wird die Lorentz-Eichung verwendet werden.

### Lagrange Formalismus

Als einfachsten Ansatz für die Lagrangedichte wählen wir

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} . \quad (4.266)$$

Ferner fordern wir die Kommutatorrelation

$$[A_\mu(x), \Pi_\nu(y)]_{x_0=y_0} \stackrel{!}{=} -ig_{\mu\nu} \delta(\vec{x} - \vec{y}) . \quad (4.267)$$

Das Minuszeichen wird später erklärt werden. Der kanonisch konjugierte Impuls ist gegeben durch

$$\Pi^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = -\partial^0 A^\mu + \partial^\mu A^0 . \quad (4.268)$$

Wie wir sehen, verschwindet die Nullkomponente  $\Pi^0$ . Wir können also nicht mit dieser Lagrangedichte arbeiten. Wir betrachten daher nun die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^2 - \frac{1}{2} \lambda (\partial_\mu A^\mu)^2 . \quad (4.269)$$

Die dazu gehörigen Feldgleichungen lauten

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \lambda \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0 \quad \leftrightarrow \quad \square A^\nu - (1 - \lambda) \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0 . \quad (4.270)$$

Die Gleichungen ähneln der Klein-Gordon-Gleichung. Der kanonisch konjugierte Impuls ergibt sich zu

$$\Pi^\mu = -\partial^0 A^\mu + \partial^\mu A^0 - \lambda g^{0\mu} (\partial_\nu A^\nu) \Rightarrow \Pi^0 = -\lambda \partial_\nu A^\nu \neq 0 \text{ falls } \lambda \neq 0 \text{ und } \partial_\nu A^\nu \neq 0 . \quad (4.271)$$

Im folgenden wird  $\lambda = 1$  gesetzt.

Wir fordern nun nicht die Lorentz-Eichung  $\partial_\mu A^\mu = 0$ , sondern  $\partial_\mu A^\mu |\psi\rangle = 0$ , wobei  $|\psi\rangle$  ein physikalischer Zustand ist. Der Erwartungswert der geforderten Kommutatorrelation (4.267) ist

$$\langle\psi|[A_\mu(x), \Pi_\nu(y)]_{x_0=y_0}|\psi\rangle = -ig_{\mu\nu}\delta(\vec{x} - \vec{y})\langle\psi|\psi\rangle. \quad (4.272)$$

Das allerdings ist inkonsistent mit der Forderung  $\partial_\nu A^\nu = 0$ . Denn wegen  $\Pi^0 = -\partial_\nu A^\nu$  ist die linke Seite von (4.272) identisch 0 (für  $\nu = 0$ ).

Wir fordern jetzt

$$\text{Gupta-Bleuler-Bedingung: } \partial_\mu A^{(+)\mu} |\psi\rangle = 0, \quad (4.273)$$

wobei

$$A_\mu = A_\mu^{(+)} + A_\mu^{(-)} \quad (4.274)$$

mit

$$A_\mu^{(+)}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \sum_{\lambda=0}^3 \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{k}) a^{(\lambda)}(\vec{k}) \exp(-ikx). \quad (4.275)$$

Es handelt sich hier also um den Anteil mit den positiven Frequenzen. Dabei verwenden wir die Notation, dass eine nach rechts laufende ebene Welle durch  $\exp(-ikx)$  beschrieben wird. Der Anteil

$$A_\mu^{(-)}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \sum_{\lambda=0}^3 \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{k}) a^{\dagger(\lambda)}(\vec{k}) \exp(ikx) \quad (4.276)$$

beinhaltet die negativen Frequenzen. Die Summation wird über die vier linear unabhängigen Polarisierungen ausgeführt. Für diese gilt

$$\text{Orthogonalität: } \epsilon_\mu^{(\lambda)} \epsilon^{(\lambda')\mu} = -\zeta^{(\lambda)} \delta^{\lambda\lambda'} \quad \text{mit } \zeta^{(0)} = -1, \zeta^{(1)} = \zeta^{(2)} = \zeta^{(3)} = 1 \quad (4.277)$$

$$\text{Vollständigkeit: } \sum_{\lambda=0}^3 \zeta^{(\lambda)} \epsilon_\mu^{(\lambda)} \epsilon_\nu^{(\lambda)} = -g_{\mu\nu}. \quad (4.278)$$

Wir gehen nun in ein bestimmtes Bezugssystem mit

$$\epsilon^{(0)\mu} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \epsilon^{(\lambda)\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{\epsilon}_\lambda \end{pmatrix} \quad \text{für } \lambda = 1, 2, 3. \quad (4.279)$$

Im Fall, dass nur die nullte Komponente,  $\epsilon^{(0)\mu}$  vorhanden ist, spricht man von skalarer Polarisation. Ferner ist

$$\vec{\epsilon}_3 = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}. \quad (4.280)$$

Die beschreibt eine longitudinale Polarisation.

Aus der Forderung (4.273), die äquivalent ist zu

$$\langle\psi|\partial_\mu A^{(-)\mu} = 0 \quad (4.281)$$

folgt

$$\langle \psi | \partial_\mu A^\mu | \psi \rangle = 0 . \quad (4.282)$$

Dies ist die Lorentz-Bedingung für den Mittelwert.

Einsetzen der Entwicklung nach ebenen Wellen in

$$[A_\mu(x), \Pi_\nu(y)]_{x_0=y_0} = -ig_{\mu\nu} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (4.283)$$

liefert

$$[a^{(\lambda)}(\vec{k}), a^{\dagger(\lambda')}(\vec{k}')] = \zeta^{(\lambda)} \delta^{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 2\omega \delta(\vec{k} - \vec{k}') . \quad (4.284)$$

Für  $\lambda = 0$  tauschen Erzeuger und Vernichter die Rollen, da  $\zeta^{(0)} = -1$ . Wie gehabt gilt

$$[a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0 . \quad (4.285)$$

Wir interpretieren  $a^{(\lambda)}(\vec{k})$  als Vernichtungsoperator und  $a^{(\lambda)\dagger}(\vec{k})$  als Erzeugungsoperator. Die skalare Polarisation wird durch  $\lambda = 0$  beschrieben, die longitudinale durch  $\lambda = 3$  und die transversalen durch  $\lambda = 1, 2$ . Wir haben

$$\text{für den Vakuumzustand: } a^{(\lambda)}(\vec{k})|0\rangle = 0 \quad (4.286)$$

$$\text{den Ein-Photonzustand: } a^{(\lambda)\dagger}(\vec{k})|0\rangle = |\vec{k}, \lambda\rangle . \quad (4.287)$$

Im folgenden soll diese Interpretation gerechtfertigt werden. Wir wenden hierfür den Hamiltonoperator auf einen Zustand  $|\vec{k}', \lambda'\rangle$  an,

$$\begin{aligned} : H : |\vec{k}', \lambda'\rangle &= \int d\tilde{k} \omega_k \sum_{\lambda=0}^3 \zeta^{(\lambda)} a^{\dagger(\lambda)}(\vec{k}) a^{(\lambda)}(\vec{k}) a^{(\lambda')\dagger}(\vec{k}') |0\rangle \\ &= \int d\tilde{k} \omega_k \sum_{\lambda=0}^3 \zeta^{(\lambda)} a^{\dagger(\lambda)}(\vec{k}) (2\pi)^3 2\omega_k \zeta^{(\lambda)} \delta^{\lambda\lambda'} \delta(\vec{k} - \vec{k}') |0\rangle = \omega_{k'} |\vec{k}', \lambda'\rangle . \end{aligned} \quad (4.288)$$

Wir haben für das masselose Photon

$$\omega_k = |\vec{k}| . \quad (4.289)$$

Damit ist  $\omega_k > 0$  und der Hamiltonoperator also positiv definit. Allerdings gibt es Zustände mit negativer Norm. Denn

$$\langle \vec{k}, \lambda | \vec{k}, \lambda \rangle = \langle 0 | a^{(\lambda)}(\vec{k}) a^{\dagger(\lambda)}(\vec{k}) | 0 \rangle = \zeta^{(\lambda)} < 0 \quad \text{für } \lambda = 0 . \quad (4.290)$$

Skalare Photonen haben also die Norm -1. Es folgt aber aus

$$k_\mu \sum_{\lambda=0}^3 \epsilon^{\mu(\lambda)} a^{(\lambda)} = \sum_{\lambda=0,3} k_\mu \epsilon^{\mu(\lambda)} a^{(\lambda)} \quad (4.291)$$

mit der Forderung

$$\partial_\mu A^{(+)\mu} | \psi \rangle = 0 , \quad (4.292)$$

dass

$$\left( a^{(3)}(\vec{k}) - a^{(0)}(\vec{k}) \right) | \psi \rangle = 0 . \quad (4.293)$$

Dies ist eine Bedingung an die skalaren und longitudinalen Photonen. Die Gupta-Bleuler Bedingung stellt keine Bedingungen an die transversalen Photonen. Es gilt insbesondere

$$\langle \psi | a^{\dagger(3)} a^{(3)} - a^{\dagger(0)} a^{(0)} | 0 \rangle = \langle \psi | a^{\dagger(3)} (a^{(3)} - a^{(0)}) | \psi \rangle = 0 . \quad (4.294)$$

Dies folgt aus  $(a^{(3)}(\vec{k}) - a^{(0)}(\vec{k})) | \psi \rangle = 0$ . Und für den Erwartungswert der Energie ergibt sich

$$\langle \psi | H | \psi \rangle = \left\langle \psi \left| \int d\tilde{k} \sum_{\lambda=0}^3 \omega_k \zeta^{(\lambda)} a^{(\lambda)\dagger} a^{(\lambda)} \right| \psi \right\rangle = \left\langle \psi \left| \int d\tilde{k} \sum_{\lambda=1}^2 \omega_k a^{(\lambda)\dagger} a^{(\lambda)} \right| \psi \right\rangle . \quad (4.295)$$

Es tragen also nur die transversalen Anteile bei. Durch die Gupta-Bleuler-Bedingung wird erreicht, dass in den physikalischen Größen nur die physikalischen Freiheitsgrade beitragen. Die kann man analog auch für andere physikalische Größen zeigen. Aus  $\partial_\mu A^{(+)\mu} | \psi \rangle = 0$  folgt, dass nur transversale Photonen zu beobachtbaren Größen beitragen.

### Zusammenfassung

- Es gibt neben den beiden physikalischen zwei zusätzliche Freiheitsgrade (longitudinal und skalar).
- Einer davon wird durch die Gupta-Bleuler-Bedingung untersagt.
- Der andere entspricht einer zusätzlichen Eichfreiheit, die man trotz der Lorentz-Bedingung noch hat, nämlich  $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda$  mit  $\square \Lambda = 0$ .
- Bei Streuprozessen spielen die skalaren und longitudinalen Photonen eine wichtige Rolle. Für Eichtheorien gilt allgemein, dass die Forderung nach Kovarianz zu unphysikalischen Zuständen (Zuständen mit negativer Norm) mit sogenannten Geistteilchen führt. In der Quantenelektrodynamik (QED) ist die Lösung trivial, da hier die Geister entkoppeln. In der Quantenchromodynamik (QCD) und der elektroschwachen Wechselwirkung treten diese Zustände in der Rechnung auf. Allerdings gibt es für einlaufende Wellen ohne Geister auch nur auslaufende Wellen ohne Geister, so dass die Wahrscheinlichkeitsinterpretation gewährleistet ist.

## 4.9 Der Feynman-Propagator für das Photonfeld

Für den Feynman-Propagator des Photonfeldes betrachten wir den Kommutator

$$[A^\mu(x), A^\nu(y)] \equiv iD^{\mu\nu}(x-y) . \quad (4.296)$$

Der Feynman-Propagator des Photonfeldes ist dann gegeben durch

$$D_F^{\mu\nu}(x-y) = -g^{\mu\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \exp(-ik(x-y)) = \langle 0 | T A^\mu(x) A^\nu(y) | 0 \rangle . \quad (4.297)$$

Dies findet man, indem das Photonfeld Glg. (4.176) eingesetzt wird und die Kommutatorrelationen Glgen. (4.284), (4.285) sowie die Vollständigkeitsrelation (4.278) verwendet werden. Wir wollen den Propagator analog zum skalaren Feld interpretieren. Allerdings werden hier vier Arten von Photonen ausgetauscht, zwei transversale, ein longitudinales und ein skalares

Photon.

Wir betrachten den Feynmanpropagator im Impulsraum in dem Bezugssystem mit den Polarisationsvektoren

$$n^\mu = \epsilon_0^\mu(\vec{k}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \epsilon_3^\mu = \frac{k^\mu - (n \cdot k)n^\mu}{\sqrt{(n \cdot k)^2 - k^2}}. \quad (4.298)$$

Der Feynmanpropagator im Impulsraum ist gegeben durch

$$\begin{aligned} D_F^{\mu\nu} &= -\frac{g^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \stackrel{(4.278)}{=} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \sum_{\lambda=0}^3 \zeta^{(\lambda)} \epsilon^{(\lambda)\mu} \epsilon^{(\lambda)\nu} \\ &= \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \left[ \sum_{\lambda=1}^2 \zeta^{(\lambda)} \epsilon^{(\lambda)\mu} \epsilon^{(\lambda)\nu} + \frac{(k^\mu - (n \cdot k)n^\mu)(k^\nu - (n \cdot k)n^\nu)}{(n \cdot k)^2 - k^2} - n^\mu n^\nu \right] \\ &= \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \left[ \sum_{\lambda=1}^2 \zeta^{(\lambda)} \epsilon^{(\lambda)\mu} \epsilon^{(\lambda)\nu} + \underbrace{\frac{k^2 n^\mu n^\nu}{(n \cdot k)^2 - k^2}}_{D_{F,C}^{\mu\nu}} + \underbrace{\frac{k^\mu k^\nu - k \cdot n (k^\mu n^\nu + k^\nu n^\mu)}{(n \cdot k)^2 - k^2}}_{D_{F,R}^{\mu\nu}} \right]. \quad (4.299) \end{aligned}$$

Der erste Term beschreibt den Austausch von transversalen Photonen. Damit haben wir also

$$D_F^{\mu\nu} = D_{F,T}^{\mu\nu} + D_{F,C}^{\mu\nu} + D_{F,R}^{\mu\nu}. \quad (4.300)$$

Der zweite Term ist im Ortsraum

$$D_{F,C}^{\mu\nu} = g^{\mu 0} g^{\nu 0} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{|\vec{k}|^2} \exp(-ikx) = g^{\mu 0} g^{\nu 0} \frac{1}{4\pi|\vec{x}|} \delta(x_0). \quad (4.301)$$

Dies entspricht einem instantanten Coulomb-Potential. Der dritte Term  $D_{F,R}^{\mu\nu}$  verschwindet, da das Photon an einen erhaltenen Strom koppelt. Das heißt, es gilt  $\partial_\mu j^\mu = 0$  und damit im Impulsraum  $k_\mu j^\mu = 0$ .

# Kapitel 5

## Wechselwirkung, Störungstheorie

### 5.1 Freie Theorie

Wir haben uns bisher mit der freien Theorie beschäftigt. Diese enthält in der Lagrangedichte nur quadratische Terme in den Feldern. Mithilfe der Euler-Lagrange Gleichung ergeben sich daraus homogene, lineare Feldgleichungen. Diese sind exakt lösbar durch Fourier-Entwicklung. Dies führt dann zur Berechnung des Propagators. So wird ein reelles skalares Feld durch die Klein-Gordon-Gleichung beschrieben. Die Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2 . \quad (5.1)$$

Anwenden der Euler-Lagrange Gleichung führt auf die Feldgleichung

$$(\square + m^2)\phi = 0 . \quad (5.2)$$

Der Feynman-Propagator ist gegeben durch

$$D_F(x - y) = \langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \exp(-ik(x - y)) . \quad (5.3)$$

Das ist sozusagen die Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür, dass sich ein Teilchen vom Ort  $\vec{x}$  zum Ort  $\vec{y}$  ausbreitet. Jedoch sind Felder ohne Wechselwirkung nicht nachweisbar. Deshalb werden wir im folgenden die Wechselwirkung zwischen Feldern betrachten. Allerdings ist bisher eine exakte Lösung nicht möglich. Es werden daher die Wechselwirkungsphänomene mithilfe der Störungstheorie auf eine Beschreibung durch freie Felder zurückgeführt.

### 5.2 Wechselwirkungsterme

Die Lagrangedichte wird aufgeteilt in eine freie Lagrangedichte  $\mathcal{L}_0$  und eine Lagrangedichte  $\mathcal{L}_W$ , die die Wechselwirkung beschreibt,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_W . \quad (5.4)$$

Die freie Lagrangedichte ist quadratisch in den Feldern, die Wechselwirkungslagrangedichte enthält Terme mit mehr als zwei Feldern.

Wir betrachten als Beispiel die Elektrodynamik. Klassisch wechselwirken elektromagnetische Felder mit dem elektrischen Strom,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu . \quad (5.5)$$

Der Strom  $j^\nu$  wird z.B. durch Elektronen hervorgerufen. Damit wird ein Wechselwirkungsterm zwischen Photonen ( $A_\mu$ ) und Elektronen ( $\psi$ ) konstruiert. Nun muss aber  $\mathcal{L}$  ein Lorentz- bzw. Dirac-Skalar sein. Mögliche Terme sind z.B.  $\bar{\psi}\psi$ ,  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  etc. Wir führen also den Wechselwirkungsterm

$$\mathcal{L}_W = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \quad (5.6)$$

ein, wobei  $e$  eine Kopplungskonstante ist und die Stärke der Wechselwirkung bestimmt. Damit ist die Lagrangedichte der Quantenelektrodynamik (QED) gegeben durch

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu + \text{Eichfixierung} . \quad (5.7)$$

Der erste Term ist der kinetische Term für das Photon, der zweite Term der kinetische Term für das Elektron (Dirac-Feld). Die zu  $\mathcal{L}_{QED}$  gehörigen Euler-Lagrange Gleichungen lauten

$$(i\cancel{\partial} - e\cancel{A} - m)\psi(x) = 0 \quad (5.8)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = e\bar{\psi}\gamma^\nu\psi \equiv j^\nu . \quad (5.9)$$

Die zweite Gleichung hat die Form, die bereits aus der Elektrodynamik bekannt ist. Damit können wir

$$j^\nu = e\bar{\psi}\gamma^\nu\psi \quad (5.10)$$

als Noetherstrom interpretieren. Es handelt sich hierbei um den erhaltenen Strom für eine Dirac-Theorie. Die beiden Gleichungen sind gekoppelte nichtlineare Feldgleichungen! Es stellt sich die Frage, wie man diese lösen kann.

Es sei bemerkt, dass  $\mathcal{L}_{QED}$  invariant ist unter einer lokalen Eichtransformation. So kann man  $\psi(x)$  ersetzen durch

$$\psi(x) \rightarrow \exp(i\alpha(x))\psi(x) , \quad \text{mit } \alpha(x) \in \mathbb{R} , \text{ und gleichzeitig} \quad (5.11)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x) \quad (5.12)$$

Durch diese Eichtransformation ist die Quantenelektrodynamik charakterisiert.

Weitere Beispiele für Wechselwirkungen sind

- $\phi^4$ -Theorie:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \quad (5.13)$$

- Yukawa-Theorie (Wechselwirkung zwischen einem Skalar und Fermionen):

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\phi^{frei} + \mathcal{L}_\psi^{frei} - g\bar{\psi}\psi\phi \quad (5.14)$$

- Skalare Elektrodynamik

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + [(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi]^*(\partial^\mu + ieA^\mu)\phi - m^2\phi^*\phi \quad (5.15)$$



Wir haben bisher nur kubische und quartische Terme in der Wechselwirkungslagrangedichte betrachtet. Es stellt sich die Frage, ob es auch höhere Potenzen wie etwa  $\phi^6$  gibt. Die Antwort ist, dass Produkte aus Feldern in der Lagrangedichte, die eine Massendimension  $> 4$  haben, nicht renormierbar sind. Sie führen zu Observablen, die von einem Cut-Off abhängen. Hierzu äquivalent ist, dass bei Wechselwirkungstermen die Massendimension der Kopplungskonstanten immer  $\geq 0$  sein muss. Wir hatten folgende Massendimensionen

$$[\phi] = 1, [A_\mu] = 1, [\psi] = \frac{3}{2}, [x] = -1, [\partial_\mu] = 1, \dots \quad (5.16)$$

### 5.3 Wechselwirkungsbild

Der Hamiltonoperator kann genauso wie die Lagrangedichte als Summe aus einem freien Operator  $H_0$  und einem Operator  $H_W$ , der die Wechselwirkung beschreibt, geschrieben werden, d.h.

$$H = H_0 + H_W . \quad (5.17)$$

Der Vergleich zwischen Schrödinger, Heisenberg- und Wechselwirkungsbild ist in Tabelle 5.1 gegeben.

Bild	Zustände	Operatoren
Schrödingerbild	$i\partial_t \psi\rangle^S = H \psi\rangle^S$	$i\partial_t O^S = 0$
Heisenbergbild	$i\partial_t \psi\rangle^H = 0$	$i\partial_t = [O^H, H]$
Wechselwirkungsbild	$i\partial_t \psi\rangle^W = H_W \psi\rangle^W$	$i\partial_t O^W = [O^W, H_0]$

Tabelle 5.1: Vergleich Schrödingerbild, Heisenbergbild und Wechselwirkungsbild.

Dies gilt insbesondere für  $O = \pi, \phi, A_\mu, \dots$ . Die Operatoren erfüllen im Wechselwirkungsbild also die Bewegungsgleichung der freien Theorie. Daraus folgt dann, dass die Feldoperatoren wie zuvor eine Fourier-Zerlegung haben. So gilt etwa für den Feldoperator des Skalarfelds im Wechselwirkungsbild

$$\phi^W(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[ \exp(ikx) a^\dagger(\vec{k}) + \exp(-ikx) a(\vec{k}) \right] \quad \text{mit} \quad \omega_k = k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} . \quad (5.18)$$

Wir werden im folgenden immer im Wechselwirkungsbild arbeiten und den Index  $W$  weglassen.

### 5.4 Die Zeitentwicklung der Zustände - $S$ -Matrix

Es wurde bisher keine wechselwirkende Theorie in 4 Dimensionen ( $D = 4$ ) exakt gelöst. Wir müssen diese also näherungsweise im Rahmen der Störungstheorie lösen. Diese ist als Potenzreihe in der Kopplungskonstanten gegeben. Die Vermutung (Hoffnung, Erfahrung!) ist, dass die Reihe konvergiert, so dass eine Approximation durch die führenden Terme in

der Entwicklung möglich ist. Betrachten wir als Beispiel das anomale magnetische Moment  $a$  des Elektrons, das berechnet wurde zu

$$a \equiv \frac{g_e - 2}{2} = \frac{\alpha}{2\pi} - 0.32\dots \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + 1.18\dots \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 - 1.51\dots \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 = 0.0011596521866 \quad (5.19)$$

Hier ist  $\alpha$  die Kopplungskonstante  $\alpha = e^2/(4\pi)$ . Experimentell findet man  $a = 0.0011596521884(43)$ .

Wir wollen Streuexperimente beschreiben. Die Wechselwirkung soll hierfür nur über einen endlichen Zeitraum  $[T_1, T_2]$  wirken. Die asymptotischen Zustände  $|\phi(t \rightarrow -\infty)\rangle$  und  $|\phi(t \rightarrow +\infty)\rangle$  erfüllen die freie Bewegungsgleichung mit  $H_W = 0$ , also

$$|\phi(-\infty)\rangle \longrightarrow \text{Wechselwirkungsgebiet} \longrightarrow |\phi(+\infty)\rangle. \quad (5.20)$$

Die Wechselwirkung findet hierbei nur zwischen  $T_1$  und  $T_2$  statt. Wir werden also keine Wechselwirkungszustände beschreiben. Wenn  $|n\rangle$  die Eigenzustände von  $H_0$  sind, so lässt sich schreiben

$$|\phi(-\infty)\rangle = \sum_n a_n |n\rangle \quad \text{mit} \quad \sum_n |a_n|^2 = 1 \quad (5.21)$$

$$|\phi(+\infty)\rangle = \sum_n b_n |n\rangle \quad \text{mit} \quad \sum_n |b_n|^2 = 1. \quad (5.22)$$

Das heißt, der Zustand wird durch die Wechselwirkung geändert, aber seine Norm bleibt erhalten. Dies entspricht einer Drehung im Zustandsraum. Es gibt also eine unitäre Transformation  $S$  mit

$$|\phi(+\infty)\rangle = S|\phi(-\infty)\rangle. \quad (5.23)$$

Im folgenden soll die sogenannte  $S$ -Matrix  $S$  bestimmt werden.

## 5.5 Bestimmung der $S$ -Matrix

Unser Ausgangspunkt ist die Schrödingergleichung

$$i\partial_t |\phi(t)\rangle = H_W |\phi(t)\rangle \quad \text{mit der Anfangsbedingung} \quad |\phi(-\infty)\rangle = |i\rangle. \quad (5.24)$$

Die Differentialgleichung lässt sich in eine Integralgleichung umschreiben, aus der eine iterative Lösung bestimmt wird, indem immer wieder  $|\phi(t)\rangle$  mit  $t = t_1, t_2, \dots$  in die Gleichung eingesetzt wird. Also

$$\begin{aligned} |\phi(t)\rangle &= |i\rangle + (-i) \int_{-\infty}^t dt_1 H_W(t_1) |\phi(t_1)\rangle = |i\rangle + (-i) \int_{-\infty}^t dt_1 H_W(t_1) |i\rangle \\ &\quad + (-i)^2 \int_{-\infty}^t dt_1 H_W(t_1) \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 H_W(t_2) |\phi(t_2)\rangle \\ &= |i\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n H_W(t_1) H_W(t_2) \dots H_W(t_n) |i\rangle. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Für  $t \rightarrow \infty$  können wir daraus die  $S$ -Matrix bestimmen. Zunächst bringen wir den obigen Ausdruck für  $t \rightarrow \infty$  in kompaktere Form, indem wir verwenden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 H_W(t_1) H_W(t_2) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 T(H_W(t_1) H_W(t_2)), \quad (5.26)$$

wobei der Zeitordnungsoperator  $T$ , definiert über

$$T(H_W(t_1)H_W(t_2)) = \begin{cases} H_W(t_1)H_W(t_2) & t_2 \leq t_1 \\ H_W(t_2)H_W(t_1) & t_2 \geq t_1 \end{cases}, \quad (5.27)$$

verwendet wurde. Somit erhält man

$$|\phi(\infty)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n T(H_W(t_1) \dots H_W(t_n)) |i\rangle. \quad (5.28)$$

Damit erhalten wir für die  $S$ -Matrix den Ausdruck

$$S = T \left[ \exp \left( -i \int_{-\infty}^{\infty} dt H_W(t) \right) \right] = T \left[ \exp \left( i \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \mathcal{L}_W(x) \right) \right]. \quad (5.29)$$

Und die Übergangswahrscheinlichkeiten sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \langle f|S|i\rangle &= \langle f|\phi(+\infty)\rangle \\ &= \left\langle f \left| \left( 1 + i \int d^4x T \mathcal{L}_W(x) + \frac{i^2}{2!} T \int d^4x \int d^4y T \mathcal{L}_W(x) \mathcal{L}_W(y) + \dots \right) \right| i \right\rangle \end{aligned} \quad (5.30)$$

Zum Beispiel haben wir in der Quantenelektrodynamik eine Lagrangedichte der Form  $\mathcal{L}_W \sim e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ , die die Wechselwirkung beschreibt. Zu berechnen ist also

$$\langle f|T(\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x))(\bar{\psi}(y)\gamma^\nu\psi(y)A_\nu(y))\dots|i\rangle. \quad (5.31)$$

Benötigt werden Matrixelemente der Form  $\langle f|T\varphi_1(x_1)\dots\varphi_n(x_n)|i\rangle$ , wobei die  $\varphi_i(x_i)$  allgemein Quantenfelder im Wechselwirkungsbild sein sollen. Ferner sollen die  $\varphi$  sowohl bosonische als auch fermionische Felder sein,  $\varphi_i \in \{\psi, A_\mu, \phi, \dots\}$ . Die Zeitentwicklung ist analog zu freien Feldern. Wir wollen nun das zeitgeordnete Produkt genauer betrachten.



# Kapitel 6

## Appendix

### 6.1 Die spezielle Lorentzgruppe und ihre Zerlegung

Die eigentlich orthochrone Lorentzgruppe  $L_+^\uparrow$  enthält Rotationen und Boosts. Die Rotationen sind gegeben durch

$$\Lambda(0, \vec{\varphi}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & R(\vec{\varphi}) & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

mit der Achse  $\frac{\vec{\varphi}}{|\vec{\varphi}|}$  und dem Winkel  $\varphi = |\vec{\varphi}|$  und den Drehmatrixelementen

$$R(\vec{\varphi})_{ij} = \frac{\varphi_i \varphi_j}{\varphi^2} + \left( \delta_{ij} - \frac{\varphi_i \varphi_j}{\varphi^2} \right) \cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\varphi} \epsilon_{ijk} \varphi_k. \quad (6.2)$$

Ein reiner Boost in ein Bezugssystem, das sich mit der Relativgeschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegt, ist gegeben durch

$$\Lambda(\vec{u}, 0) = \begin{pmatrix} \cosh u & -\frac{\vec{u}^T}{u} \sinh u \\ -\frac{\vec{u}}{u} \sinh u & \mathbf{1}_{3 \times 3} + \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}^T}{u^2} (\cosh u - 1) \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Dabei ist  $u$  die Rapidity,  $u = \operatorname{arctanh}|\vec{v}|$ , und  $\vec{u} = u \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ . Für  $\vec{u}_1 \parallel \vec{u}_2$  ist  $\Lambda(\vec{u}_1, 0)\Lambda(\vec{u}_2, 0) = \Lambda(\vec{u}_1 + \vec{u}_2, 0)$ . Die Generatoren der Drehung sind gegeben durch  $J_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ),

$$\Lambda(0, \vec{\varphi}) = \exp(i\vec{\varphi} \cdot \vec{J}) \quad (6.4)$$

$$\text{mit } [J_k]_{lm} = -i\epsilon_{klm} \text{ und } [J_k]_{0\mu} = [J_k]_{\mu 0} = 0 \quad (6.5)$$

$$\Rightarrow [J_k]_{\lambda\mu} = -i\epsilon_{0k\lambda\mu}. \quad (6.6)$$

In der QMII Vorlesung war  $[J_k]_{lm} = w_{lm}^{(k)}$ . Die Generatoren der Boosts sind  $K_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Also

$$\Lambda(\vec{u}, 0) = \exp(i\vec{u} \cdot \vec{K}) \quad (6.7)$$

mit

$$[K_j]_{\lambda\mu} = i\delta_{\lambda 0}\delta_{j\mu} + i\delta_{0\mu}\delta_{\lambda j}, \quad (6.8)$$

also

$$K_j = i \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \\ 1 & & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \dots & & & 0 \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

Es gilt

$$J_k = J_k^\dagger \quad \text{und} \quad K_j = -K_j^\dagger. \quad (6.10)$$

Die Generatoren erfüllen die folgende Algebra

$$[J_k, J_l] = i\epsilon_{klm}J_m \quad (\text{Drehimpulsalgebra}) \quad (6.11)$$

$$[K_j, K_n] = -i\epsilon_{jnk}J_k \quad (6.12)$$

$$[J_k, K_l] = i\epsilon_{klm}K_m. \quad (6.13)$$

Bei Glg. (6.11) handelt es sich um eine Liealgebra, die der  $SO(3)$ . Die Glg. (6.13) zeigt, dass sich  $K$  wie ein Dreivektor transformiert. Die Gleichung (6.12) sagt aus, dass zwei aufeinanderfolgende Boosts in verschiedene Richtungen keinen neuen Boost, sondern eine gewöhnliche Drehung bewirken. Mit der Einführung von

$$T_j^+ = \frac{1}{2}(J_j + iK_j) \quad (6.14)$$

$$T_j^- = \frac{1}{2}(J_j - iK_j), \text{ für die gilt } T_j^{+\dagger} = T_j^+ \quad \text{und} \quad T_j^{-\dagger} = T_j^- \quad (\text{hermitesch}) \quad (6.15)$$

erhalten wir die einfachen Vertauschungsrelationen

$$[T_j^+, T_j^-] = 0 \quad (6.16)$$

$$[T_j^+, T_k^+] = i\epsilon_{jkl}T_l^+ \quad (6.17)$$

$$[T_j^-, T_k^-] = i\epsilon_{jkl}T_l^-. \quad (6.18)$$

Jeder dieser Operatoren erfüllt also für sich die  $SU(2)$  Liealgebra. Damit lässt sich jedes  $\Lambda \in L_+^\uparrow$  schreiben als

$$\Lambda = \exp(i\vec{\alpha} \cdot \vec{T}^+) \exp(i\vec{\alpha}^* \cdot \vec{T}^-) = \exp(i(\vec{\alpha} \cdot \vec{T}^+ + \vec{\alpha}^* \cdot \vec{T}^-)) \quad (6.19)$$

$$\text{da } [\vec{\alpha} \cdot \vec{T}^+, \vec{\alpha}^* \cdot \vec{T}^-] = 0. \quad (6.20)$$

Es ist  $SU(4) \cong SU(2) \times SU(2)$ , aber  $L_+^\uparrow$  ist einfach. Wenn

$$\vec{\alpha} = \vec{\varphi} \text{ reell} \quad \Rightarrow \quad \vec{\alpha} \cdot \vec{T}^+ + \vec{\alpha}^* \cdot \vec{T}^- = \vec{\varphi} \cdot \vec{J} \quad (6.21)$$

Drehung  $\Lambda(0, \vec{\varphi})$

$$\vec{\alpha} = -i\vec{u} \text{ imaginär} \quad \Rightarrow \quad \vec{\alpha} \cdot \vec{T}^+ + \vec{\alpha}^* \cdot \vec{T}^- = \vec{u} \cdot \vec{K} \quad (6.22)$$

Boost  $\Lambda(\vec{u}, 0)$ .

Abgesehen von der trivialen Darstellung  $(0, 0)$  mit dem Spin Null sind die einfachsten irreduziblen Darstellungen gegeben durch:

1. Die *linke Fundamentaldarstellung*  $(\frac{1}{2}, 0)$ . Sie hat den Spin  $\frac{1}{2}$  und stellt einen linkshändigen

Spinor  $\Psi_L$  dar. Dieser transformiert sich nach einer Spinordarstellung von  $\Lambda$  mit  $\vec{T}^+ = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$  und  $\vec{T}^- = 0$ . D.h.

$$\Psi_L(x) \rightarrow \Psi'_L(x') = A_L \Psi_L(x) , \quad (6.23)$$

mit

$$A_L := \Lambda^{(\frac{1}{2}, 0)} = \exp \left\{ \frac{i}{2} (\vec{\varphi} - i\vec{u}) \cdot \vec{\sigma} \right\} . \quad (6.24)$$

2. Die *rechte Fundamentaldarstellung*  $(0, \frac{1}{2})$  beschreibt einen rechsthändigen Spinor  $\Psi_R$  mit ebenfalls Spin  $\frac{1}{2}$ . Er transformiert sich nach einer Spinordarstellung von  $\Lambda$  mit  $\vec{T}^+ = 0$  und  $\vec{T}^- = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$ . D.h.

$$\Psi_R(x) \rightarrow \Psi'_R(x') = A_R \Psi_R(x) , \quad (6.25)$$

mit

$$A_R := \Lambda^{(0, \frac{1}{2})} = \exp \left\{ \frac{i}{2} (\vec{\varphi} + i\vec{u}) \cdot \vec{\sigma} \right\} . \quad (6.26)$$

Die beiden Darstellungen  $A_L$  und  $A_R$  sind nicht unitär. Sie liefern eine Zerlegung in reine Drehungen und Boosts

$$A_{L,R}(\vec{\varphi}, \vec{u}) = U(\varphi) A_{L,R}(0, \vec{u}) , \quad (6.27)$$

wobei  $U$  eine unitäre Matrix  $U \in \text{SU}(2)$  ist,

$$U = \exp \left( -\frac{i}{2} \vec{\varphi} \cdot \vec{\sigma} \right) . \quad (6.28)$$

Für reine Drehungen ( $\vec{u} = 0$ ) fallen beide Darstellungen zusammen.

## Casimir-Operatoren

Ein Casimir-Operator kommutiert mit allen Elementen der Liealgebra. Wir haben die Casimir-Operatoren

1.  $P_\mu P^\mu$ . Denn z.B.

$$\begin{aligned} [K_j, P_\mu P^\mu] &= [K_j, P_0^2] - [K_j, P_k \cdot P_k] \\ &\stackrel{(2.47), (2.48)}{=} -2iP_j P_0 + 2i\delta_{jk} P_0 P_k = 0 . \end{aligned} \quad (6.29)$$

2. Mit dem Pauli-Lubanski-(Axial-)Vektor (relativistische Verallgemeinerung des Spinvektors)

$$W^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\nu M_{\rho\sigma} \quad (6.30)$$

ist  $W_\mu W^\mu$  ein Casimir-Operator (ohne Beweis).

Alle physikalischen Zustände (Felder, Teilchen) in der Quantenfeldtheorie werden nach den Eigenwerten dieser beiden Casimir-Operatoren klassifiziert. So ist im Ruhesystem eines massiven Teilchens mit  $p^\mu = (m, 0, 0, 0)^T$

$$\begin{aligned} W^{k,RS} &= \frac{1}{2}\epsilon^{\mu 0\rho\sigma} P_0 M_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\epsilon^{k0lm} P_0 M_{lm} = -\frac{1}{2}P_0\epsilon^{0klm} M_{lm} = -\frac{1}{2}P_0\epsilon^{0lmk}\epsilon_{lms}J^s \\ &= -\frac{1}{2}P_0 2\delta_s^k J_s = -mJ^k, \end{aligned} \quad (6.31)$$

also

$$\vec{W}^{RS} = -m\vec{J}. \quad (6.32)$$

Das heißt,  $\vec{W}$  misst den Drehimpuls im Ruhesystem, also den Spin  $\vec{S}$ . Wir haben für

(a)  $P_\mu P^\mu = m^2 > 0$  massives Teilchen:

$W_\mu W^\mu \stackrel{RS}{=} -m^2 \vec{S}^2$ , mit den Eigenwerten  $W_\mu W^\mu = -m^2 s(s+1)$ , mit  $s = 0, 1/2, 1, \dots$ . Dies ist Poincaré-invariant und also in jedem Bezugssystem richtig. Massive Teilchen mit Spin  $s$  haben somit  $(2s+1)$  Polarisationsfreiheitsgrade.

(b)  $P_\mu P^\mu = m^2 = 0$  masseloses Teilchen:

$W_\mu W^\mu = 0$ . Aus (6.30) folgt  $P^\mu W_\mu = 0$ . Somit muss  $W^\mu$  proportional zu  $P^\mu$  sein, also  $W^\mu = \lambda P^\mu$ . Bei  $\lambda$  handelt es sich um die Helizität (Projektion des Spins auf die normierte Flugrichtung des Teilchens) des Teilchens. Sie kann nur die Werte  $\lambda = \pm s$  annehmen. Dabei ist  $s = 0, 1/2, 1, \dots$  der Spin der Darstellung. Daraus folgt also, dass masselose Teilchen mit  $s \neq 0$  nur zwei Polarisationsfreiheitsgrade haben.