

Theoretische Teilchenphysik I

SOMMERSEMESTER 2018

KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)

GEHALTEN VON

PROF. DR. M. M. MÜHLEITNER

Inhaltsverzeichnis

1	Vorbemerkungen	1
1.1	Organisatorisches	1
1.2	Literatur	1
1.3	Vorläufige Inhaltsangabe	2
2	Einleitung	3
2.1	Konventionen	3
2.2	Lorentzgruppe und Poincarégruppe	5
2.2.1	Die Lorentztransformation	5
2.2.2	Die spezielle Lorentzgruppe und ihre Zerlegung	7
2.2.3	Die Poincarégruppe	7
3	Der Lagrangeformalismus für Felder	9
3.1	Quantenfeldtheorie	9
3.2	Der Übergang vom diskreten zum kontinuierlichen System	10
3.3	Die Euler-Lagrange-Gleichung für Felder	11
3.3.1	Relativistische Schreibweise	12
3.4	Das Noether-Theorem für Felder	14
3.4.1	Beispiele	16
4	Quantisierung der Felder	21
4.1	Wiederholung der Quantenmechanik	21
4.1.1	Schödinger-Bild	21
4.1.2	Heisenberg-Bild	22
4.2	Exkurs: Lagrangedichten für Teilchen mit Spin $0, \frac{1}{2}, 1$	22
4.2.1	Konstruktion von Lagrangedichten	23
4.3	Die Quantisierung des skalaren Feldes	23
4.3.1	Übergang zum quantisierten Feld	25
4.3.2	Konstruktion der Zustände	26
4.3.3	Der Kommutator $[\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})]$	32
4.4	Geladenes skalares Feld	32
4.5	Die Quantisierung von Spinorfeldern (Dirac-Feldern)	36
4.5.1	Quantisierung	37
4.5.2	Operatoralgebra	37
4.6	Der Feynman-Propagator für ein skalares Feld	39
4.7	Der Fermionpropagator	42
4.8	Quantisierung von Spin-1-Feldern (Vektorfeldern)	43

4.8.1	Massives Vektorfeld	43
4.8.2	Masseloses Vektorfeld (Photonfeld)	45
4.9	Der Feynman-Propagator für das Photonfeld	49
5	Wechselwirkung, Störungstheorie	51
5.1	Freie Theorie	51
5.2	Wechselwirkungsterme	51
5.3	Wechselwirkungsbild	53
5.4	Die Zeitentwicklung der Zustände - S -Matrix	54
5.5	Bestimmung der S -Matrix	54
5.6	Das Wick-Theorem	55
5.7	Berechnung von S -Matrix-Elementen	58
5.7.1	Modifikationen für Dirac- und Vektorfelder	59
5.7.2	Beispiel: Quantenelektrodynamik	60
5.7.3	Feynmanregeln der QED	63
5.7.4	Beispiel: Paarvernichtung	65
5.7.5	Beispiel: Compton-Streuung	66
5.8	Der Wirkungsquerschnitt	67
5.8.1	Streuquerschnitt	67
5.8.2	Phasenraum Flussfaktor	68
6	Der Prozess $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$	73
6.1	Das Myon	73
6.2	Der Wirkungsquerschnitt für $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$	74
6.3	Der Wirkungsquerschnitt für $e^+e^- \rightarrow$ Hadronen	78
6.4	Höhere Ordnungskorrekturen zu $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$	79
6.5	Korrekturen zum Photon-Propagator	79
7	Schleifendiagramme	83
7.1	Beispiel: ϕ^4 -Theorie	83
7.2	Divergenz-Verhalten	87
8	Strahlungskorrekturen in der Quantenelektrodynamik	89
8.1	Die Vakuumpolarisation	91
8.1.1	Bedeutung des Imaginärteils	94
8.1.2	Renormierung der äußeren Photonlinien	94
8.1.3	Der Elektron-Propagator	95
8.1.4	Renormierung des Elektron-Propagators	96
8.1.5	Vertexkorrektur	97
8.1.6	Greensfunktion	99
8.2	Die Lehmann-Symanzik-Zimmermann (LSZ) Reduktionsformel	99
9	Auf dem Weg zum Standardmodell - Eichsymmetrien	105
9.1	Kopplung an ein Photon	105
9.2	Nicht-abelsche Eichgruppen	107
9.3	Die Matrizen der $SU(N)$	108
9.4	Darstellung nicht-abelscher Gruppen	109
9.5	Nichtabelsche Eichtransformationen	110

9.6	Die QCD Lagrangedichte	112
9.7	Chirale Eichtheorien	112
9.8	Addendum: Mathematische Hintergrundinformationen	113
9.8.1	Gruppen	113
9.8.2	Algebra	114
9.8.3	Clifford-Algebren	114
9.8.4	Liealgebren	115
10	Appendix	117
10.1	Die spezielle Lorentzgruppe und ihre Zerlegung	117

Kapitel 1

Vorbemerkungen

1.1 Organisatorisches

Webseite der Vorlesung: <https://www.itp.kit.edu/courses/ss2018/ttp1/start>

Vorlesungszeiten: Mo, 14-15h30 und Fr, 14-15h30; Ort: Otto-Lehmann Hörsaal;
Übungen: Mittwoch nachmittags

Übungsleiter: Philipp Basler, Marcel Krause;
Tutorinnen/Tutoren: Jonas Müller, Dr. Shruti Patel, Emma S. Dore

Kriterien für Erhalt des Übungsscheins, Informationen zur Ausfertigung der Übungsblätter,
Termine der Übungsgruppen, Übungsblätter zum Download: siehe Webseite

1.2 Literatur

Lehrbücher:

- [1] Bailin, David und Love, Alexander: *Introduction to gauge field theory*, Hilger
- [2] Bjorken, James D. und Drell, Sidney D.: *Relativistische Quantenfeldtheorie*, BI-Wissenschaftsverlag.
- [3] Böhm, M., Denner, A. und Joos, H.: *Gauge Theories of the Strong and Electroweak Interaction*, Teubner Verlag
- [4] Cheng, Ta-Pei und Li, Ling-Fong: *Gauge theory of elementary partilce physics*, Oxford Science Publications
- [5] Halzen, Francis und Martin, Alan D.: *Quarks and Leptons*, John Wiley & Sons, Inc.
- [6] Itzykson, Claude und Zuber, Jean-Bernard: *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill
- [7] Kaku, Michio: *Quantum field theory*, Oxford University Press
- [8] Kugo, Thaichiro: *Eichtheorie*, Springer
- [9] Nachtmann, Otto: *Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik*, Vieweg

- [10] Peskin, Michael E. und Schroeder, Daniel V.: *An introduction to quantum field theory*, Addison-Wesley
- [11] Pokorski, Stefan: *Gauge field theories*, Cambridge University Press
- [12] Ramond, Pierre: *Field theory*, Addison-Wesley
- [13] Ryder, L.H.: *Quantum Field theory*, Cambridge University Press
- [14] Sterman, George: *An Introduction to Quantum Field Theory*, Cambridge University Press
- [15] Weinberg, Steven: *The quantum theory of fields*, Cambridge University Press

Webseiten:

<http://pdg.lbl.gov> Particle Data Group

<http://inspirehep.net> Datenbank INSPIRE für Publikationen

<http://arxiv.org> Preprint-Archiv

<http://www.cern.ch> CERN

1.3 Vorläufige Inhaltsangabe

1. Vorbemerkungen
2. Einleitung (Konventionen, Lorentzgruppe und Poincarégruppe)
3. Lagrangeformalismus für Felder (Bewegungsgleichungen, Noether Theorem, innere Symmetrien, Gruppentheorie)
4. Quantisierung des skalaren Feldes
5. Quantisierung von Spinorfeldern (Dirac-Feld)
6. Quantisierung von Spin-1 Feldern (Vektorfeldern)
7. Störungstheorie, Feynmanregeln, Feynman-Diagramme
8. Berechnung von Wirkungsquerschnitten
9. ...

Kapitel 2

Einleitung

Elementarteilchenphysik bedeutet Physik bei kleinsten Abständen bzw. höchsten (relativistischen) Energien. Siehe z.B. Welle-Teilchen-Dualität und die De-Broglie Beziehung

$$E = h\nu \rightsquigarrow E \uparrow \Leftrightarrow \nu \uparrow \Leftrightarrow \lambda \downarrow \quad \text{kleinste Abstände.} \quad (2.1)$$

Die Grundlage zur Beschreibung der Hochenergiephysik bildet die Quantenfeldtheorie. Bei den Teilchen handelt es sich um Anregungszustände von Quantenfeldern.

Warum aber betreiben wir Hochenergiephysik? Der Grund ist, daß wir Antworten auf unsere grundlegenden Fragen über das Universum suchen:

1. Woraus besteht das Universum?
2. Wie entwickelte sich das Universum?
3. Was sind die Bausteine der Materie, und welche Kräfte halten sie zusammen?

Wie ist der heutige Stand der Elementarteilchenphysik?

1. Die uns bekannte Materie kann durch wenige fundamentale Teilchen beschrieben werden.
2. Die verschiedenen Wechselwirkungen werden durch fundamentale Kräfte zwischen den Teilchen beschrieben.
3. Die herrschenden physikalischen Gesetzmäßigkeiten können mathematisch mithilfe einfacher fundamentaler Prinzipien beschrieben werden. (Mit Ausnahme der Gravitation)

2.1 Konventionen

Natürliche Einheiten In der theoretischen Teilchenphysik werden natürliche Einheiten (Planck Einheiten) gewählt. Dabei werden die Lichtgeschwindigkeit c und das Plancksche Wirkungsquantum \hbar gleich 1 gesetzt. Als Energieeinheit, die dadurch nicht festgelegt wird, wird das Elektronenvolt verwendet: $1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

1. Die Lichtgeschwindigkeit c wird gleich 1 gesetzt:

$$c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \equiv 1 \Rightarrow 1 \text{ s} = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \quad (2.2)$$

2. Die Plancksche Wirkungskonstante wird gleich 1 gesetzt:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 6.6 \cdot 10^{-25} \text{ GeV s} \equiv 1 \Rightarrow 1 \text{ s} = 1.5 \cdot 10^{24} \text{ GeV}^{-1} . \quad (2.3)$$

Und

$$\hbar c = 1 \Rightarrow 1 \text{ m} = 5.1 \cdot 10^{15} \text{ GeV}^{-1} . \quad (2.4)$$

Sowie

$$m = \frac{E_{\text{Ruhe}}}{c^2} = E_{\text{Ruhe}} \quad (2.5)$$

$$m = \frac{1 \text{ eV}}{c^2} = \frac{1.6 \cdot 10^{-19}}{(3 \cdot 10^8)^2} \text{ kg} = 1.78 \cdot 10^{-36} \text{ kg} \stackrel{!}{=} 1 \text{ eV} \Rightarrow 1 \text{ kg} = 5.6 \cdot 10^{26} \text{ GeV} \quad (2.6)$$

3. Die elektrische Elementarladung $e > 0$ ist gegeben durch die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante α :

$$\frac{e^2}{4\pi} = \alpha \approx \frac{1}{137\dots} \Rightarrow e = 0.3. \quad (2.7)$$

Die Ladung e ist dimensionslos!

Somit sind also alle physikalischen Einheiten Potenzen der Energie. Der Exponent ist die (Massen-) Dimension. So haben wir also

$$[\text{Länge}] = [\text{Zeit}] = -1, \quad [\text{Masse}] = 1, \quad [e] = 0. \quad (2.8)$$

Minkowski-Metrik Ein metrischer Raum ist ein Vektorraum mit einer Metrik. Wir haben den kontravarianten Vierervektor

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} \quad (\text{kontravariant}) . \quad (2.9)$$

Der zu dem Vektorraum gehörige Dualraum enthält als Elemente die kovarianten Vierervektoren

$$x_\mu = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -\vec{x} \end{pmatrix} \quad (\text{kovariant}) . \quad (2.10)$$

Der Übergang zwischen kontra- und kovariant wird durch die Minkowski-Metrik $g_{\mu\nu}$ vermittelt,

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -\vec{x} \end{pmatrix} . \quad (2.11)$$

Das Skalarprodukt ist gegeben durch

$$x \cdot y = x_\mu y^\mu = x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y}. \quad (2.12)$$

Es ist

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \quad \text{und} \quad g_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu. \quad (2.13)$$

Levi-Civita-Tensor Der Levi-Civita-Tensor ist definiert durch

$$e^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{für gerade Permutationen} \\ -1 & \text{für ungerade Permutationen} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.14)$$

Dabei ist

$$\epsilon^{0123} = +1 \quad \Rightarrow \quad \epsilon_{0123} = g_{0\mu} g_{1\nu} g_{2\rho} g_{3\sigma} e^{\mu\nu\rho\sigma} = g_{00} g_{11} g_{22} g_{33} \epsilon^{0123} = -\epsilon^{0123} = -1. \quad (2.15)$$

Wir haben auch

$$\epsilon^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_2, \quad \text{d.h. } \epsilon^{12} = 1. \quad (2.16)$$

Einsteinsche Summenkonvention Über doppelt auftretende Indizes wird summiert, d.h.

$$a_i b_i = \sum_i a_i b_i. \quad (2.17)$$

Meist haben wir

$$a_\mu b_\mu = \sum_{\mu=0}^3 a_\mu b^\mu. \quad (2.18)$$

Wenn wir es mit Vierervektoren zu tun haben, so laufen griechische Indizes von 0 bis 3 und lateinische von 1 bis 3.

2.2 Lorentzgruppe und Poincarégruppe

2.2.1 Die Lorentztransformation

In der klassischen Physik einschließlich der Relativitätstheorie spielt der Tensorbegriff eine zentrale Rolle. Physikalische Gesetze lassen sich nach dem Kovarianzprinzip durch Tensorgleichungen ausdrücken:

$$\text{physikalische Gesetze} \Leftrightarrow \text{Tensorgleichungen}. \quad (2.19)$$

Die physikalischen Gesetze bleiben bei Koordinatentransformationen invariant. Eine Tensorgleichung verknüpft Vektoren (Tensoren 1. Stufe) und Tensoren höherer Stufe. In der Quantentheorie gibt es auch Fermionen. Sie haben halbzahligen Spin und unterscheiden sich grundlegend von den Bosonen mit ganzzahligem Spin. Beschrieben werden sie durch Spinoren. Das Kovarianzprinzip für Fermionen lautet

$$\text{physikalische Gesetze} \Leftrightarrow \text{Spinorgleichungen}. \quad (2.20)$$

Ein typisches Beispiel ist die Diracgleichung. Wenn man das Transformationsverhalten von Objekten wie Tensoren, Spinoren kennt, dann kann man aus ihnen invariante Größen, d.h. Lorentzinvarianten, konstruieren. So ist die Lagrangedichte eine Lorentzinvariante. Und aus ihr folgen dann die Bewegungsgleichungen.

Alle linearen Transformationen im Minkowskiraum

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (2.21)$$

$$\text{mit } x'_\mu y'^\mu = x_\mu y^\mu \quad \text{für alle } x, y \quad (2.22)$$

heißen Lorentztransformationen. Sie bilden die Lorentzgruppe. Die entspricht der pseudorthogonalen Gruppe $O(1,3)$. D.h. für die 4×4 Matrizen gilt $\Lambda \in O(1,3)$. Aus (2.22) folgt

$$g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho x^\rho \Lambda^\nu_\sigma x^\sigma = g_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma \quad \Rightarrow \quad (2.23)$$

$$g_{\rho\sigma} = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma . \quad (2.24)$$

Und somit

$$\Lambda^T g \Lambda = g \quad \Rightarrow \quad \det g = \det(\Lambda^T g \Lambda) \quad \Rightarrow \quad \det \Lambda = \pm 1 . \quad (2.25)$$

Die Lorentzgruppe lässt sich nach zwei Merkmalen klassifizieren: nach dem Vorzeichen der Determinante $\det \Lambda$ und nach dem Vorzeichen von Λ^0_0 . Die Lorentztransformationen aus

1. $L_+^\uparrow = \{\Lambda \in L : \det \Lambda = +1, \Lambda^0_0 > 0\}$ heißen eigentlich orthochron.
2. $L_+^\downarrow = \{\Lambda \in L : \det \Lambda = +1, \Lambda^0_0 < 0\}$ heißen eigentlich nicht-orthochron.
3. $L_-^\uparrow = \{\Lambda \in L : \det \Lambda = -1, \Lambda^0_0 > 0\}$ heißen uneigentlich orthochron.
4. $L_-^\downarrow = \{\Lambda \in L : \det \Lambda = -1, \Lambda^0_0 < 0\}$ heißen uneigentlich nicht-orthochron.

Sie bilden die Lorentzgruppe

$$L = L_+^\uparrow \cup L_+^\downarrow \cup L_-^\uparrow \cup L_-^\downarrow . \quad (2.26)$$

Die Lorentzgruppe ist als Mannigfaltigkeit nicht einfach zusammenhängend. Sie besteht aus vier getrennten Stücken, den Zweigen. Beliebige Transformationen aus verschiedenen Zweigen lassen sich nicht stetig ineinander überführen. Nur die eigentliche orthochrone Lorentzgruppe L_+^\uparrow ist eine Untergruppe, da das Hintereinanderschalten zweier Transformationen nicht aus diesem Zweig herausführt. Man bezeichnet sie als spezielle Lorentzgruppe.

Beispiele für die vier Zweige 1.–4. der Lorentzgruppe sind die Identität $\mathbf{1} = \text{diag}(1,1,1,1)$, die Spiegelung $P = \text{diag}(1,-1,-1,-1)$, die Zeitumkehr $T = \text{diag}(-1,1,1,1)$, die Inversion $PT = -\mathbf{1}$. Sie bilden die Gruppe der diskreten Transformationen.

Es sind L_+^\uparrow und

$$L_+ = L_+^\uparrow \cup L_+^\downarrow = \text{SO}(1,3) \quad (2.27)$$

Untergruppen von L . Ebenso $L_+^\uparrow \cup L_-^\uparrow$ und $L_+^\downarrow \cup L_-^\downarrow$. Dabei bedeutet SO spezielle orthogonale Gruppe und (1,3) die Signatur der Metrik. Unter L_+^\uparrow sind Naturgesetze invariant (“lorentzinvariant”).

2.2.2 Die spezielle Lorentzgruppe und ihre Zerlegung

Die eigentlich orthochrone Lorentzgruppe

$$L_+^\uparrow = \{\Lambda \in O(1, 3) | \det \Lambda = 1, \Lambda_0^0 > 0\} \quad (2.28)$$

enthält Rotationen und Boosts. Die Rotationen sind gegeben durch

$$\Lambda(0, \vec{\varphi}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & R(\vec{\varphi}) & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

mit der Achse $\frac{\vec{\varphi}}{|\vec{\varphi}|}$ und dem Winkel $\varphi = |\vec{\varphi}|$ und den Drehmatrixelementen $R(\vec{\varphi})_{ij}$.

Ein reiner Boost in ein Bezugssystem, das sich mit der Relativgeschwindigkeit v in Richtung der $x^i = x$ -Achse und $\nu = \text{artanh} v$ bewegt, ist gegeben durch

$$\Lambda(\vec{\nu}, 0) = \begin{pmatrix} \cosh \nu & -\sinh \nu & 0 & 0 \\ -\sinh \nu & \cosh \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Die Generatoren der Drehung sind gegeben durch J_k ($k = 1, 2, 3$),

$$\Lambda(0, \vec{\varphi}) = \exp(i\vec{\varphi} \cdot \vec{J}) \quad (2.31)$$

Die Generatoren der Boosts sind K_j ($j = 1, 2, 3$). Also ($\vec{\nu} = \nu \vec{v} / |\vec{v}|$)

$$\Lambda(\vec{\nu}, 0) = \exp(i\vec{\nu} \cdot \vec{K}). \quad (2.32)$$

Die Generatoren erfüllen die folgende Algebra

$$[J_k, J_l] = i\epsilon_{klm} J_m \quad (\text{Drehimpulsalgebra}) \quad (2.33)$$

$$[K_j, K_n] = -i\epsilon_{jnk} J_k \quad (2.34)$$

$$[J_k, K_l] = i\epsilon_{klm} K_m. \quad (2.35)$$

Bei Glg. (2.33) handelt es sich um eine Liealgebra, die der $SO(3)$. Die Glg. (2.35) zeigt, dass sich K wie ein Dreiervektor transformiert. Die Gleichung (2.34) sagt aus, dass zwei aufeinanderfolgende Boosts in verschiedene Richtungen keinen neuen Boost, sondern eine gewöhnliche Drehung bewirken.

2.2.3 Die Poincarégruppe

Tensoren oder (relativistische) Bosonen sind Objekte, die sich nach der Tensordarstellung der Lorentzgruppe transformieren. Spinoren oder (relativistische) Fermionen sind Objekte, die sich nach der Spinordarstellung der Lorentzgruppe transformieren. Somit ist es durch das Studium der Lorentzgruppe möglich, zwischen Bosonen und Fermionen zu unterscheiden und alle Teilchen einer dieser beiden Kategorien zuzuordnen. Um aber die Welt der Elementarteilchen vollständig zu erschließen, bedarf es des Studiums der Poincarégruppe.

Die Poincarégruppe ist die Gruppe der Lorentztransformationen und der Verschiebungen im Minkowskiraum. Sie beschreibt die Struktur unserer Raum-Zeit, und alle ihre irreduziblen

Darstellungen sind gekennzeichnet durch Masse und Spin, d.h. durch die fundamentalen Eigenschaften der Elementarteilchen.

Poincarétransformationen im Minkowskiraum setzen sich aus einer Lorentztransformation mit Λ_ν^μ und aus einer Verschiebung um a^μ zusammen. Also haben wir die Translationsgruppe T und die Poincarégruppe P ,

$$T = \{x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + a^\mu : a^\mu \in \mathbb{R}^4\} \quad (2.36)$$

$$P = \{x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu + a^\mu : \Lambda_\nu^\mu \in L, a^\mu \in \mathbb{R}^4\} \quad (2.37)$$

Wir haben folgende Multiplikationsregel

$$(\Lambda_2, a_2)(\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2) . \quad (2.38)$$

Damit ist P ein semidirektes Produkt von L und T . Das semidirekte Produkt unterscheidet sich vom direkten Produkt, für das die einfachere Multiplikationsregel $(\Lambda_2, a_2)(\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2\Lambda_1, a_1 + a_2)$ gilt.

Die Generatoren der Translation sind gegeben durch

$$P_\rho = -i\partial_\rho , \quad (2.39)$$

denn

$$f(x') = f(x + a) = \exp(ia^\rho P_\rho)f(x) \quad (\text{Taylor-Reihe}) . \quad (2.40)$$

Die Generatoren der Lorentztransformation sind gegeben durch die antisymmetrischen Generatoren $M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}$. Mit den 6 Parametern $\alpha_{\mu\nu} = -\alpha_{\nu\mu}$ können wir schreiben

$$\Lambda = \exp(i\alpha_{\mu\nu}M^{\mu\nu}) . \quad (2.41)$$

Der Zusammenhang zwischen den Generatoren im Minkowskiraum und den Generatoren im dreidimensionalen euklidischen Raum ist

$$J_j = \frac{1}{2}\epsilon_{jkl}M_{kl} \Rightarrow M_{kl} = \epsilon_{klj}J_j \quad (2.42)$$

$$K_j = M_{0j} \quad j, k, l \geq 1 . \quad (2.43)$$

Die Liealgebra der Poincarégruppe lautet

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \quad (2.44)$$

$$[J_j, P_0] = 0 \quad (2.45)$$

$$[J_j, P_k] = i\epsilon_{jkl}P_l \quad (2.46)$$

$$[K_j, P_0] = -iP_j \quad (2.47)$$

$$[K_j, P_k] = -iP_0\delta_{jk} . \quad (2.48)$$

Hierbei ist $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ und $j, k, l = 1, 2, 3$.

Kapitel 3

Der Lagrangeformalismus für Felder

3.1 Quantenfeldtheorie

In der klassischen Physik kennt man Teilchen und Felder, so z.B. das elektromagnetische Feld. Ein Teilchen ist durch die Angabe von Ort und Zeit festgelegt, ein Feld hingegen hat eine unendliche Anzahl von Freiheitsgraden. Teilchen werden in der Quantenmechanik durch eine Wellenfunktion beschrieben. Felder treten als äußere Felder, z.B. das Maxwellfeld, auf. Durch die Quantisierung des elektromagnetischen Feldes werden Photonen eingeführt und damit der Welle-Teilchen-Dualismus beim Licht. Aus der Sicht der theoretischen Physik sind Elementarteilchen, also die kleinsten Bausteine der Materie, die geringsten Anregungsstufen bestimmter Felder.

Um Elementarteilchen und ihre Wechselwirkungen zu beschreiben bedient man sich der **Quantenfeldtheorie (QFT)**. In ihr werden die Prinzipien der klassischen Feldtheorie und der Quantenmechanik kombiniert. Diese Theorie geht über die Quantenmechanik hinaus, indem sie Teilchen und Felder einheitlich behandelt. Es werden nicht nur Observablen wie z.B. die Energie quantisiert sondern auch die **wechselwirkenden** (Teilchen-)Felder selbst. Die Quantisierung der Felder wird auch als **Zweite Quantisierung** bezeichnet. Sie ermöglicht es, explizit die Entstehung und Vernichtung von Elementarteilchen (**Paarerzeugung, Anihilation**) zu berücksichtigen. **Relativistische Quantenfeldtheorien** berücksichtigen die **spezielle Relativitätstheorie** und finden in der Elementarteilchenphysik Anwendung.¹

Die Verwendung der Quantenfeldtheorie erlaubt es, ein fundamentales Problem der Quantenmechanik zu lösen: Ihre Unfähigkeit, Systeme mit variierender Teilchenzahl zu beschreiben. Wie aus der relativistischen Quantenmechanik bekannt, gibt es gemäß der relativistischen **Klein-Gordon-Gleichung** und der **Dirac-Gleichung** Lösungen negativer Energie, die als Antiteilchen interpretiert werden. Somit können bei ausreichender Energie, Teilchen-Antiteilchen-Paare erzeugt werden.² Dies macht ein System mit konstanter Teilchenzahl unmöglich.

Der erste Schritt zu einer Quantenfeldtheorie besteht im Auffinden der **Lagrangedichten** für die Quantenfelder. Diese müssen als **Euler-Lagrange-Gleichung** die Differentialgleichung für das Feld liefern. Diese sind für ein **Skalarfeld** die Klein-Gordon-Gleichung, für ein

¹Nicht-relativistische Quantenfeldtheorien sind z.B. in der Festkörperphysik relevant.

²In dem Dirac-Bild entspricht das dem Anheben eines Teilchens aus dem Dirac-See der Zustände negativer Energien in einen Zustand positiver Energie. Dadurch entsteht im Dirac-See ein Loch, das als Positron interpretiert wird, sowie ein Elektron mit positiver Energie, sprich ein Elektron-Positron-Paar.

Spinorfeld die Dirac-Gleichung und für das Photon die **Maxwellgleichungen**. Sie sind die Bewegungsgleichungen für freie Felder, die nicht wechselwirken. Sie sind aus den Lagrangedichten für freie Felder abgeleitet. Um Wechselwirkungen der Felder untereinander einzuführen, müssen die Lagrangedichten um zusätzliche Terme erweitert werden.

3.2 Der Übergang vom diskreten zum kontinuierlichen System

Wir betrachten den Übergang vom diskreten zum kontinuierlichen System am Beispiel einer Kette von Massenpunkten. Die Massenpunkte mit jeweils der Masse m seien durch Federn mit der Federkonstante k miteinander verbunden. Es sei a der mittlere Abstand zweier Massenpunkte und q_i die Auslenkung des i -ten Massenpunktes aus der Ruhelage. Wir haben dann die kinetische Energie T

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m \dot{q}_i^2 . \quad (3.1)$$

Die potentielle Energie V ist gegeben durch

$$V = \sum_i \frac{1}{2} k (q_{i+1} - q_i)^2 . \quad (3.2)$$

Damit lautet die Bewegungsgleichung für den i -ten Massenpunkt

$$m \ddot{q}_i = - \frac{\partial V}{\partial q_i} = k(q_{i+1} - q_i) - k(q_i - q_{i-1}) . \quad (3.3)$$

Andererseits kann die Bewegungsgleichung auch aus der Lagrangefunktion des Systems abgeleitet werden. Diese lautet

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_i a \left[\frac{m}{a} \dot{q}_i^2 - ka \left(\frac{q_{i+1} - q_i}{a} \right)^2 \right] . \quad (3.4)$$

Die Bewegungsgleichung für ein einzelnes Teilchen ergibt sich unter Anwendung der Euler-Lagrangegleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (3.5)$$

zu

$$\frac{m}{a} \ddot{q}_i - ka \frac{q_{i+1} - q_i}{a^2} + ka \frac{q_i - q_{i-1}}{a^2} = 0 . \quad (3.6)$$

Wir bilden nun den Grenzwert $a \rightarrow 0$. Dabei gilt folgendes

1. Der Quotient m/a geht über in die Massendichte μ .
2. Es ist $\xi = (q_{i+1} - q_i)/a$ proportional zur Kraft $k(q_{i+1} - q_i)$. Die Proportionalitätskonstante ist durch die Materialkonstante y , das Youngsche Modul, gegeben. Wir haben also

$$\frac{q_{i+1} - q_i}{a} y = k(q_{i+1} - q_i) \xrightarrow{a \rightarrow 0} y = k \cdot a . \quad (3.7)$$

3. Wir gehen über vom diskreten Index i zu einem kontinuierlichen Index x . Statt des Index i wird jetzt die Lage im Ruhezustand, x , verwendet. Und statt der q_i haben wir jetzt $q(x)$ als Funktion des Ortes. Somit gilt

$$q_i \rightarrow q(x) \tag{3.8}$$

$$\frac{q_{i+1} - q_i}{a} \rightarrow \frac{q(x+a) - q(x)}{a} \xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{\partial q(x)}{\partial x} = q'(x) . \tag{3.9}$$

Ferner

$$a \sum_i \rightarrow \int dx . \tag{3.10}$$

Damit erhalten wir folgende Lagrangefunktion des kontinuierlichen Systems

$$L = \int dx \left(\frac{1}{2} \mu \dot{q}(x)^2 - \frac{y}{2} \left(\frac{\partial q(x)}{\partial x} \right)^2 \right) . \tag{3.11}$$

Der Integrand wird als Lagrangedichte \mathcal{L} bezeichnet. Die Bewegungsgleichung ergibt sich aus Glg. (3.6) zu

$$\mu \ddot{q} - y \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{q'(x+a) - q'(x)}{a} \right) = 0 \Rightarrow \mu \ddot{q} - y q'' = 0 . \tag{3.12}$$

Beachte, dass x keine verallgemeinerte Koordinate, sondern ein Index ist. Die kanonische Variable ist durch $q(x) = q(t, \vec{x})$ gegeben. Man bezeichnet $q = q(t, \vec{x})$ als Feld. Die Bewegungsgleichungen sind partielle Differentialgleichungen.

Für dreidimensionale Systeme haben wir

$$L = \int dx dy dz \mathcal{L} . \tag{3.13}$$

Die Lagrangedichte \mathcal{L} ist eine Funktion von $q, dq/dt$ und $\vec{\nabla}q$. Der kanonische Impuls ist gegeben durch

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} . \tag{3.14}$$

3.3 Die Euler-Lagrange-Gleichung für Felder

Wir wenden das Hamiltonsche Prinzip auf die Lagrangedichte $\mathcal{L}(q, \dot{q}, \vec{\nabla}q)$ an. Dieses besagt, dass die Wirkung S

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \mathcal{L} \tag{3.15}$$

minimiert werden soll, wobei die Randpunkte $q(t_1), q(t_2)$ festliegen. Wir betrachten also die Variation

$$0 \stackrel{!}{=} \delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\vec{\nabla}q)} \delta (\vec{\nabla}q) , \text{ mit } \delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q , \delta (\vec{\nabla}q) = \vec{\nabla} \delta q \tag{3.16}$$

Es wird eine partielle Integration durchgeführt, wobei die Randterme festgehalten werden, so dass ihre Variationen verschwinden, d.h. $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$. Wir fordern weiter, dass $q(t, \vec{x}) = 0$ für $|\vec{x}| \rightarrow \infty$. Damit erhalten wir

$$0 \stackrel{!}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \vec{\nabla} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\nabla} q} \right) \delta q \quad (3.17)$$

Dies muss für alle Variationen δq gelten. Damit erhalten wir die Euler-Lagrange-Gleichung für Felder

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \vec{\nabla} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\nabla} q} = 0. \quad (3.18)$$

Die Hamiltondichte \mathcal{H} ist gegeben durch

$$\mathcal{H} = \pi \dot{q} - \mathcal{L}, \quad \text{mit } \pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}. \quad (3.19)$$

Wir betrachten als Beispiel die folgende Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2} \dot{q}^2 - \frac{y}{2} q'^2. \quad (3.20)$$

Wir haben mit

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \mu \dot{q} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'} = -y q' \quad (3.21)$$

die Bewegungsgleichung

$$\mu \ddot{q} - y q'' = 0. \quad (3.22)$$

3.3.1 Relativistische Schreibweise

Wir definieren

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad \text{und} \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} \quad \text{sowie} \quad (3.23)$$

$$\int dx \equiv \int dt \int d^3x. \quad (3.24)$$

Dabei ist $\int dx$ Lorentz-invariant (die Lorentzkontraktion wird durch die Zeitdilatation kompensiert). Mit dieser Schreibweise wird das Feld $\phi(t, \vec{x})$ dann mit $\phi(x)$ bezeichnet und die Lagrangedichte mit

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \quad (3.25)$$

Die Euler-Lagrangegleichungen lassen sich dann schreiben als

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0 \quad \text{mit} \quad \pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)}. \quad (3.26)$$

Falls die Lagrangedichte \mathcal{L} Lorentz-invariant ist, sind die Feldgleichungen kovariant.

Wir betrachten folgende Beispiele:

1. Reelles skalares Feld ohne Wechselwirkung. Die Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2 . \quad (3.27)$$

Damit haben wir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi \quad (3.28)$$

und somit die Bewegungsgleichung

$$-m^2 \phi - \partial_\mu \partial^\mu \phi = 0 \quad \Rightarrow \quad (\square + m^2)\phi = 0 \quad \text{mit } \partial_\mu \partial^\mu = \partial_0^2 - \vec{\nabla}^2 = \partial_0^2 - \Delta . \quad (3.29)$$

Hierbei handelt es sich um die aus der relativistischen Quantenmechanik bekannte Klein-Gordon-Gleichung.

2. Komplexes skalares Feld ohne Wechselwirkung. Die Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L}(\phi, \phi^*, \partial_\mu \phi, \partial_\mu \phi^*) = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi . \quad (3.30)$$

Die Felder ϕ und ϕ^* können formal unabhängig voneinander variiert werden. Das heißt, wir haben

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} = -m^2 \phi \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} = \partial^\mu \phi \quad (3.31)$$

$$\Rightarrow \partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0 \quad \text{und analog} \quad \partial_\mu \partial^\mu \phi^* + m^2 \phi^* = 0 . \quad (3.32)$$

3. Spin-1/2 Feld (Dirac-Feld) ohne Wechselwirkung. Die Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}) = \bar{\psi}(i\rlap{\not{\partial}} - m)\psi , \quad (3.33)$$

wobei

$$\rlap{\not{\partial}} := a^\mu \gamma_\mu = a_\mu \gamma^\mu \quad (3.34)$$

$$\rlap{\not{\partial}} := \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \gamma^\mu \partial_\mu . \quad (3.35)$$

Es ist

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = (i\rlap{\not{\partial}} - m)\psi \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} = 0 . \quad (3.36)$$

Damit erhalten wir die Bewegungsgleichung

$$(i\rlap{\not{\partial}} - m)\psi = 0 . \quad (3.37)$$

3.4 Das Noether-Theorem für Felder

Wir wollen im folgenden zeigen: Zu jeder Symmetrie des Wirkungsintegrals gegenüber einer kontinuierlichen Transformation existiert ein Erhaltungssatz, der sich aus der Lagrangedichte bestimmen lässt.

Beweis: Wir betrachten $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$. Dabei ist φ ein Feld (ein skalares Feld φ oder $\varphi = A^\mu$ oder ein Multipllett von Feldern $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$). Wir betrachten eine infinitesimale Transformation bezüglich einer Lie-Gruppe

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \quad (3.38)$$

mit

$$\delta x^\mu = A_k^\mu \delta \omega^k . \quad (3.39)$$

Bei $\delta \omega^k$ handelt es sich um die Parameter der Transformation (z.B. die Eulerschen Drehwinkel). Bei einer Drehung um $\delta \vec{\omega}$ ($\exp(i\delta \omega^k J_k)$) haben wir zum Beispiel

$$\vec{x}' = \vec{x} + i\delta \omega^k J_k \vec{x} , \quad (3.40)$$

so dass also

$$A_k^0 = 0 , \quad A_k^j = i(J_k \vec{x})^j , j = 1, 2, 3 . \quad (3.41)$$

Ferner haben wir die Transformation des Feldes

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x') = \varphi(x) + \delta \varphi(x) = \varphi(x) + \Phi_k(x) \delta \omega^k . \quad (3.42)$$

(Zum Beispiel haben wir bei einem Skalar $\varphi'(x') = \varphi(x)$ und also $\delta \varphi(x) = 0$ und bei einem Vektor $\varphi'^\mu(x') = \Lambda_\nu^\mu \varphi^\nu(x)$ etc.) Wir finden

$$\begin{aligned} \varphi'(x') &= \varphi'(x + \delta x) \\ &= \varphi'(x) + \delta x^\nu \partial_\nu \varphi \\ &= \varphi(x) + \delta_0 \varphi(x) + \delta x^\nu \partial_\nu \varphi , \end{aligned} \quad (3.43)$$

mit

$$\delta_0 \varphi(x) = \varphi'(x) - \varphi(x) . \quad (3.44)$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \delta_0 \varphi(x) &\stackrel{(3.43)}{=} \varphi'(x') - \varphi(x) - \delta x^\nu \partial_\nu \varphi \\ &\stackrel{(3.42)}{=} \Phi_k(x) \delta \omega^k - \delta x^\nu \partial_\nu \varphi \\ &\stackrel{(3.39)}{=} [\Phi_k(x) - (\partial_\nu \varphi) A_k^\nu] \delta \omega^k . \end{aligned} \quad (3.45)$$

Für die Variation der Lagrangedichte haben wir

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \mathcal{L}'[\varphi'(x'), \partial_\nu \varphi'(x')] - \mathcal{L}[\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)] \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta_0 \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \underbrace{\partial_\mu \delta_0 \varphi}_{= \delta_0 \partial_\mu \varphi} . \end{aligned} \quad (3.46)$$

Anwendung der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \quad (3.47)$$

und Verwendung von (3.45) und (3.46) liefert

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta_0 \varphi \right) \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} A_k^\mu(x) \delta \omega^k + \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} [\Phi_k(x) - (\partial_\nu \varphi) A_k^\nu(x)] \delta \omega^k \right]. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Für die transformierte Wirkung haben wir

$$S' = \int d^4 x' \mathcal{L}'(\varphi', \partial_\mu \varphi') \quad (3.49)$$

und

$$\delta S = S' - S = \int \delta(d^4 x) \mathcal{L} + \int d^4 x \delta \mathcal{L}. \quad (3.50)$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} d^4 x' &= \left| \det \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right) \right| d^4 x \\ &= |\det(\delta_\nu^\mu + \partial_\nu A_k^\mu \delta \omega^k)| d^4 x \\ &= (1 + \partial_\mu A_k^\mu \delta \omega^k) d^4 x, \end{aligned} \quad (3.51)$$

wobei wir verwendet haben

$$\det(\mathbf{1} + \epsilon) = 1 + \text{tr} \epsilon + O(\epsilon^2). \quad (3.52)$$

Damit ist also

$$\delta(d^4 x) = d^4 x \partial_\mu A_k^\mu \delta \omega^k. \quad (3.53)$$

Und somit

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4 x (\mathcal{L} \partial_\mu A_k^\mu \delta \omega^k + \delta \mathcal{L}) \\ &\stackrel{(3.48)}{=} \int d^4 x \partial_\mu \left[\mathcal{L} A_k^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} [\Phi_k - (\partial_\nu \varphi) A_k^\nu] \right] \delta \omega^k. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Man spricht von globalen Transformationen, wenn $\delta \omega^k$ unabhängig von x ist. Das Integrationsvolumen in $S = \int_V d^4 x \mathcal{L}$ wählen wir beliebig. Wenn S invariant ist, d.h. $\delta S / \delta \omega_k = 0$, dann folgt aus Glg. (3.54), dass

$$j_k^\mu = -\mathcal{L} A_k^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} (A_k^\nu \partial_\nu \varphi - \Phi_k(x)) \quad (3.55)$$

ein erhaltener Strom ist (Noether-Theorem):

$$\partial_\mu j_k^\mu = 0. \quad (3.56)$$

Man nennt j_k^μ Noether-Strom. Die Ladung

$$Q_k(x) = \int d^3x j_k^0(x) \quad (3.57)$$

ist konstant. Denn

$$\dot{Q}_k(x) = \int d^3x \partial_0 j_k^0 \stackrel{(3.56)}{=} - \int d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_k = - \oint d\vec{S} \cdot \vec{j}_k = 0 \quad (3.58)$$

für $\vec{j}_k = 0$ im Unendlichen. Beachte, dass der erhaltene Noether-Strom nicht eindeutig ist. So kann man einen Strom $j_k^{\prime\mu}$ hinzuaddieren, dessen Divergenz verschwindet, also

$$\partial_\mu j_k^{\prime\mu} = 0 . \quad (3.59)$$

Der Noether-Strom Glg. (3.55) kann auf den Fall mehrerer Felder φ^a in \mathcal{L} verallgemeinert werden. Wir haben dann

$$j_k^\mu = -\mathcal{L} A_k^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^a)} (A_k^\nu \partial_\nu \varphi^a - \Phi_k^a(x)) . \quad (3.60)$$

3.4.1 Beispiele

Reelles Klein-Gordon-Feld: Die Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi) (\partial^\mu \varphi) - \frac{m^2}{2} \varphi^2 - V(\varphi) , \quad (3.61)$$

wobei $V(\varphi)$ ein beliebiges Potential ist, z.B. $V(\varphi) = \lambda/4! \varphi^4$. Die Lagrangedichte ist invariant unter Transformationen,

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \underbrace{\epsilon^\mu}_{\delta\omega^k} , \text{ so dass also } A_\nu^\mu(x) = \delta_\nu^\mu \quad (3.62)$$

Da φ ein Skalarfeld ist, ist es invariant, also $\delta\varphi(x) = 0$ und somit $\Phi_\nu(x) = 0$. Aus der Lagrangedichte Glg. (3.61) finden wir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} = \partial^\mu \varphi . \quad (3.63)$$

Der erhaltene Strom, den man im Fall der Translationen Glg. (3.62) mit T_ν^μ bezeichnet, ist der Energie-Impuls-Tensor und gegeben durch

$$T_\nu^\mu = -\mathcal{L} \delta_\nu^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial_\nu \varphi \quad (3.64)$$

$$= -\mathcal{L} \delta_\nu^\mu + \underbrace{\partial^\mu \varphi}_{(3.63)} \partial_\nu \varphi . \quad (3.65)$$

Also

$$T_\nu^\mu = \partial^\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \delta_\nu^\mu \left(\frac{1}{2} (\partial_\alpha \varphi)^2 - \frac{m^2}{2} \varphi^2 - V(\varphi) \right) . \quad (3.66)$$

Die erhaltene Ladung, der Viererimpuls, ist damit

$$P_\nu = \int d^3x T_\nu^0 . \quad (3.67)$$

Wir haben

$$T_0^0 = -\mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi)} \partial_0 \varphi . \quad (3.68)$$

In der klassischen Mechanik hatten wir die Hamiltonfunktion

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L . \quad (3.69)$$

Der Vergleich zeigt: Bei T_0^0 handelt es sich um die Hamiltondichte! Die kanonische Feldimpulsdichte ist gegeben durch

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}(x) \quad , \quad \text{wobei } \dot{\varphi} = \partial_0 \varphi . \quad (3.70)$$

Damit ist die Hamiltondichte

$$T_0^0 = \pi(x) \dot{\varphi}(x) - \mathcal{L}(x) . \quad (3.71)$$

Der Hamilton-Operator, der der Gesamtenergie entspricht, ist gegeben durch,

$$H = P_0 = \int d^3x T_0^0 = \int d^3x (\pi \dot{\varphi} - \mathcal{L}) = \int d^3x \left(\frac{1}{2}(\dot{\varphi}^2 + (\vec{\nabla} \varphi)^2 + m^2 \varphi^2) + V(\varphi) \right) \quad (3.72)$$

Und der 3er-Impuls lautet

$$P_k = \int d^3x T_k^0 = \int d^3x \dot{\varphi} \partial_k \varphi \quad (3.73)$$

$$P^k = - \int d^3x \dot{\varphi} \partial_k \varphi \quad (3.74)$$

$$\vec{P} = - \int d^3x \dot{\varphi} \vec{\nabla} \varphi = - \int d^3x \underbrace{\pi(x) \vec{\nabla} \varphi}_{\text{Impulsdichte}} . \quad (3.75)$$

Als nächstes Beispiel betrachten wir infinitesimale Drehungen. Das heisst

$$\delta \vec{x} = i \delta \omega^k J_k \vec{x} , \quad \delta x^0 = 0 \quad (3.76)$$

$$A_k^j = i (J_k \vec{x})^j , \quad A_k^0 = 0 , \quad j, k = 1, 2, 3 \quad (3.77)$$

$$\delta \varphi = 0 = \Phi_k . \quad (3.78)$$

Damit erhalten wir aus (3.55)

$$\begin{aligned} j_k^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi)} A_k^j (\partial_j \varphi) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} (\vec{\nabla} \varphi)^T i J_k \vec{x} \\ &\stackrel{(3.63)}{=} \dot{\varphi} (\vec{\nabla} \varphi)^T i J_k \vec{x} . \end{aligned} \quad (3.79)$$

Die Impulsdichte, siehe Glg. (3.75), ist definiert durch

$$\vec{p} = -\dot{\varphi} \vec{\nabla} \varphi , \quad (3.80)$$

und damit

$$\vec{P} = \int d^3x \vec{p}(x) . \quad (3.81)$$

Somit haben wir

$$\begin{aligned} j_k^0 &= -\vec{p}^T i J_k \vec{x} = -p_m \underbrace{(i J_k)}_{=\epsilon_{kmn} \text{ (10.5)}} x_n \\ &= -\epsilon_{kmn} p_m x_n = -(\vec{p} \times \vec{x})_k . \end{aligned} \quad (3.82)$$

Damit finden wir also, das $-j_k^0$ eine Drehimpulsdichte ist. Die erhaltene Ladung ist also der Drehimpuls, denn mit (3.57) ist

$$L_k = \int d^3x j_k^0(x) \quad (3.83)$$

$$\vec{L} = \int d^3x (\vec{x} \times \vec{p}) . \quad (3.84)$$

Wir betrachten nun das Noether-Theorem für eine innere Symmetrie. Wir wenden dies für ein komplexes Feld mit Selbstwechselwirkung an. Die Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi^* - m|\varphi|^2 - V(|\varphi|) . \quad (3.85)$$

Die Lagrangedichte ist invariant unter einer $U(1)$ Symmetrie, d.h. unter der Transformation

$$\varphi \rightarrow \varphi \exp(i\delta\vartheta) = \varphi + i\delta\vartheta \varphi \quad (3.86)$$

$$\delta x^\mu = 0 \Rightarrow A_k^\mu = 0 \quad (3.87)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta\varphi &= i\delta\vartheta \varphi \\ \delta\varphi^* &= -i\delta\vartheta \varphi^* \end{aligned} \right\} \stackrel{(3.42)}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} \delta\varphi \\ \delta\varphi^* \end{pmatrix} = \Phi \delta\vartheta , \quad \text{mit} \quad (3.88)$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} i\varphi \\ -i\varphi^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \end{pmatrix} . \quad (3.89)$$

Der Noether-Strom (3.55) lautet

$$\begin{aligned} j^\mu &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \Phi^1 - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^*)} \Phi^2 \\ &= -i(\partial^\mu \varphi^*)\varphi + i(\partial^\mu \varphi)\varphi^* . \end{aligned} \quad (3.90)$$

Die dazu gehörige erhaltene Ladung ist

$$Q = \int d^3x j^0 = i \int d^3x (\varphi^* \dot{\varphi} - \dot{\varphi} \varphi^*) . \quad (3.91)$$

Wir betrachten die $U(1)$ Symmetrie der Dirac-Theorie. Die Dirac-Lagrangedichte ist invariant unter den Transformationen

$$\psi \rightarrow \exp(i\theta) \psi , \quad \bar{\psi} \rightarrow \exp(-i\theta) \bar{\psi} . \quad (3.92)$$

Die Lagrangedichte ist gegeben durch

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi + e \bar{\psi} \mathcal{A} \psi . \quad (3.93)$$

Sie beinhaltet die Kopplung an das elektromagnetische Feld A^μ . Wir haben für Φ

$$\Phi = \begin{pmatrix} i\psi_a \\ -i\bar{\psi}_a \end{pmatrix} \quad \text{mit dem Spinorindex } a = 1, 2, 3, 4 . \quad (3.94)$$

Damit haben wir den Noetherstrom

$$j^\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_a)} i\psi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi}_a)} i\bar{\psi}_a = -i\bar{\psi}\gamma^\mu i\psi = \bar{\psi}\gamma^\mu \psi . \quad (3.95)$$

Dies ist die $U(1)$ -Stromdichte des Dirac-Feldes. Ist ψ das Elektronenfeld, so ist $ej^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ die elektromagnetische Stromdichte. Und es ist

$$Q = e \int d^3x j^0 = e \int d^3x \bar{\psi}\gamma^0\psi = e \int d^3x \psi^\dagger\psi \quad (3.96)$$

die erhaltene elektrische Gesamtladung. Es ist also $e\psi^\dagger\psi$ die Ladungsdichte.

Kapitel 4

Quantisierung der Felder

Die Elektrodynamik behandelt klassische Felder, welche die Maxwell-Gleichungen erfüllen. Andererseits beschreiben die Maxwell-Gleichungen die Ausbreitung der Photonen in der quantisierten Theorie. Die Frage ist, wie die beiden Betrachtungsweisen zusammen hängen.

Ferner möchten wir die Erzeugung und Vernichtung von Teilchen beschreiben können.

Der gesuchte Formalismus muss der Tatsache Rechnung tragen, dass sowohl die Klein-Gordon-Gleichung als auch die Dirac-Gleichung Zustände mit negativer Energie haben können. Und auch, dass es eine Spin-Statistik-Relation gibt.

Die Quantenfeldtheorie bildet den Rahmen, Streuprozesse zu berechnen. Ihre Vorhersagen werden experimentell bestätigt.

4.1 Wiederholung der Quantenmechanik

4.1.1 Schrödinger-Bild

Im Schrödinger-Bild sind die Zustände $|\psi(t)\rangle_S$ zeitabhängig, wohingegen die Operatoren O_S zeitunabhängig sind. Der Zustand zum Zeitpunkt t ergibt sich durch Anwendung des unitären Zeitentwicklungsoperators $U(t)$ auf den Zustandsvektor zur Zeit $t_0 = 0$,

$$|\psi(t)\rangle_S = U(t) |\psi(0)\rangle_S . \quad (4.1)$$

Einsetzen der zeitabhängigen Wellenfunktion in die Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle_S = H_S |\psi(t)\rangle_S \quad (4.2)$$

führt auf

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t) |\psi(0)\rangle_S &= H_S U(t) |\psi(0)\rangle_S \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t) &= H_S U(t) . \end{aligned} \quad (4.3)$$

Man erhält eine zur Schrödingergleichung äquivalente Operatorgleichung.

4.1.2 Heisenberg-Bild

Im Heisenberg-Bild sind die Zustände $|\psi\rangle_H$ zeitunabhängig, die Operatoren $O_H(t)$ aber zeitabhängig. Der Übergang vom Schrödinger- zum Heisenbergbild erfolgt durch

$$|\psi\rangle_H = U^\dagger(t) |\psi(t)\rangle_S \quad (4.4)$$

$$O_H(t) = U^\dagger(t) O_S U(t) . \quad (4.5)$$

Der Erwartungswert o des Operators ist hierbei in beiden Bildern gleich, denn

$$\begin{aligned} o &= {}_S\langle\psi(t)|O_S|\psi(t)\rangle_S = {}_S\langle\psi(t)|\underbrace{U(t)U^\dagger(t)}_1 O_S \underbrace{U(t)U^\dagger(t)}_1 |\psi(t)\rangle_S \\ &= {}_S\langle\psi(0)|U^\dagger(t)O_S U(t)|\psi(0)\rangle_S = {}_H\langle\psi|O_H(t)|\psi\rangle_H . \end{aligned} \quad (4.6)$$

Bildung der Zeitableitung von $O_H(t)$ liefert

$$\frac{d}{dt}O_H(t) = \left(\frac{\partial}{\partial t}U^\dagger(t)\right) O_S U(t) + U^\dagger(t)O_S \left(\frac{\partial}{\partial t}U\right) + U^\dagger \left(\frac{\partial}{\partial t}O_S\right) U(t) . \quad (4.7)$$

Verwendung von

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t) = -\frac{i}{\hbar}H_S U(t) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial t}U^\dagger(t) = \frac{i}{\hbar}U^\dagger(t)H_S \quad (4.8)$$

liefert dann

$$\frac{d}{dt}O_H(t) = \frac{i}{\hbar}(U^\dagger H_S O_S U - U^\dagger O_S H_S U) + U^\dagger \left(\frac{\partial O_S}{\partial t}\right) U \quad (4.9)$$

Einschieben von $UU^\dagger = 1$ liefert die Heisenberg-Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}O_H(t) = \frac{i}{\hbar}[H_H, O_H] + \frac{\partial O_H}{\partial t} , \quad (4.10)$$

mit

$$\frac{\partial O_H}{\partial t} = U^\dagger \left(\frac{\partial O_S}{\partial t}\right) U . \quad (4.11)$$

In der Vorlesung wird das Heisenberg-Bild betrachtet.

4.2 Exkurs: Lagrangedichten für Teilchen mit Spin 0, $\frac{1}{2}$, 1

Ausgehend von den entsprechenden Feldern können relativistische Theorien von Teilchen mit Spin 0, $\frac{1}{2}$, 1 konstruiert werden. Wir hatten bereits gesehen, dass in der Hochenergiephysik $\hbar = c = 1$ gesetzt wird. Damit lassen sich alle Einheiten auf die Einheit 'Masse' zurückführen.

Wir haben

$$\begin{aligned} [m] &= [\text{Masse}] = 1 \\ [p^\mu] &= [\text{Impuls}] = 1 \\ [x^\mu] &= [\text{Zeit, Länge}] = -1 \\ [H] &= [\text{Energie}] = 1 \\ [d^3x] &= -3 \\ [\mathcal{L}] &= [\mathcal{H}] = 4 \quad (\text{da } H = \int d^3x \mathcal{H}) \\ [S] &= [\text{Wirkung}] = 0 . \end{aligned} \quad (4.12)$$

4.2.1 Konstruktion von Lagrangedichten

Bei der Konstruktion von Lagrangedichten wenden wir folgende Prinzipien an:

- 1) Es werden die Felder vorgegeben, welche die Theorie enthalten soll. (Felder)
- 2) Die Lagrangedichte hat die Form

$$\mathcal{L}(x) = \sum_i g_i \mathcal{O}_i(x) . \tag{4.13}$$

Bei den \mathcal{O}_i handelt es sich um Produkte von Feldern am selben Punkt (Lokalität). Diese transformieren sich wie Lorentz-Skalare. Damit ist die Wirkung und also auch die Dynamik relativistisch invariant. Die g_i sind Konstanten, deren Massendimension so gewählt wird, dass gilt

$$[g_i \mathcal{O}_i] = 4 . \tag{4.14}$$

Falls die Theorie innere Symmetrien besitzen soll, dann muss man fordern, dass die $\mathcal{O}_i(x)$ unter diesen ebenfalls invariant sind. (Relativistische Invarianz und Symmetrien)

- 3) Die Lagrangedichte \mathcal{L} muss Ableitungen ∂_μ der Felder enthalten. Ansonsten würde der dem Feld zugeordnete kanonisch konjugierte Impuls verschwinden, und die Euler-Lagrange Gleichung würde keine Zeitentwicklung ergeben. Es sei bemerkt, dass es manchmal aus technischen Gründen hilfreich sein kann, 'Hilfsfelder' einzuführen, auf die keine Ableitung wirkt, und die damit keine Dynamik haben. (Dynamik)
- 4) Die Massendimension der Feldprodukte \mathcal{O}_i soll nicht größer also vier sein. Warum dies gefordert wird, wird später klarwerden. Auch hier sein bemerkt, dass diese Forderung nicht fundamental ist. Sie kann in sogenannten 'effektiven Quantenfeldtheorien' aufgegeben werden. (Renormierbarkeit)
- 5) Ferner soll die Lagrangedichte *alle* Terme enthalten, die mit den Forderungen 2) und 4) verträglich sind. (Vollständigkeit)

4.3 Die Quantisierung des skalaren Feldes

Wir wollen das skalare Feld quantisieren, wobei weiterhin die Klein-Gordon-Gleichung

$$(\square + m^2)\phi = 0 \tag{4.15}$$

gelten soll. Hierfür interpretieren wir ϕ als Operator und bestimmen dessen Eigenwerte und Eigenfunktionen. Dies führt dann auf die Teilcheninterpretation.

Das klassische Feld φ erfüllt die Klein-Gordon-Gleichung

$$(\square + m^2)\varphi = 0 \tag{4.16}$$

Spezielle Lösungen dieser Gleichung sind gegeben durch ebene Wellen der Form $\exp(ikx)$ oder $\exp(-ikx)$, wobei $k^2 = m^2$. Das heißt also

$$k_0 = \pm \sqrt{m^2 + \vec{k}^2} \equiv \pm \omega(\vec{k}) = \omega_k . \tag{4.17}$$

Wir haben dann

$$\square \exp(ikx) = -k^2 \exp(ikx) . \quad (4.18)$$

Die Linearkombination beider Lösungen führt auf die allgemeine Lösung

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \left(\alpha(\vec{k}) \exp(-ikx) + \alpha^*(\vec{k}) \exp(ikx) \right) . \quad (4.19)$$

Hierbei ist der Faktor

$$\frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_k} \quad (4.20)$$

Konvention. Ferner sei darauf hingewiesen, dass das Maß

$$d^4k \delta(k^2 - m^2) \theta(k_0) = \frac{d^3k}{2\omega_k} \quad (4.21)$$

Lorentz-invariant ist.

Nebenrechnung: Herleitung von Glg. (4.21). Wir verwenden folgende Formel: Sei $f(x)$ stetig differenzierbar mit einfachen Nullstellen x_j , $j = 1, \dots, n$ und $f'(x_j) \neq 0$, dann gilt

$$\delta(f(x)) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\left| \frac{df}{dx}(x_j) \right|} \delta(x - x_j) . \quad (4.22)$$

Hier ist $x = k_0$ und

$$f(k_0) = k_0^2 - \vec{k}^2 - m^2 . \quad (4.23)$$

Die Nullstellen sind gegeben durch

$$k_{0,1,2} = \pm \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} . \quad (4.24)$$

Mit

$$\frac{df}{dk_0} = 2k_0 \quad (4.25)$$

finden wir

$$\delta(k^2 - m^2) = \frac{1}{2\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}} \left\{ \delta(k_0 - \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}) + \delta(k_0 + \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}) \right\} . \quad (4.26)$$

Wir definieren

$$\omega(\vec{k}) \equiv \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} , \quad (4.27)$$

das heisst, wir haben

$$\theta(k_0) \delta(k^2 - m^2) = \frac{1}{2\omega} \delta(k_0 - \omega) \quad (4.28)$$

$$\theta(-k_0) \delta(k^2 - m^2) = \frac{1}{2\omega} \delta(k_0 + \omega) . \quad (4.29)$$

Und damit finden wir Glg. (4.21).

4.3.1 Übergang zum quantisierten Feld

Sie $\varphi(x)$ die klassische Messgröße, die zum Erwartungswert eines Operators $\phi(x)$ gehört,

$$\varphi(x) = \langle \text{Zustand} | \phi(x) | \text{Zustand} \rangle . \quad (4.30)$$

Für ϕ soll Folgendes gelten:

1. Es sei ϕ hermitesch, also $\phi = \phi^\dagger$. Daraus folgt, dass der Eigenwert φ reell ist. Ferner soll ϕ die Klein-Gordon-Gleichung erfüllen, d.h.

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0 . \quad (4.31)$$

Daraus folgt,

$$(\square + m^2)\varphi(x) = 0 . \quad (4.32)$$

2. Es sei P_μ die Erzeugende einer Translation. Es soll ϕ die folgende Gleichung erfüllen,

$$\partial_\mu \phi(x) = i[P_\mu, \phi(x)] \quad (4.33)$$

Wir wollen eine Beschreibung von Teilchen durch ϕ finden. Jede Lösung der Klein-Gordon-Gleichung kann als Überlagerung von ebenen Wellen angegeben werden. Dabei sind die Fourierkoeffizienten dann Operatoren. Also

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \left(a(\vec{k}) \exp(-ikx) + a^\dagger(\vec{k}) \exp(ikx) \right) . \quad (4.34)$$

Anwendung von Glg. (4.33) liefert

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \left(-a(\vec{k}) ik_\mu \exp(-ikx) + a^\dagger(\vec{k}) ik_\mu \exp(ikx) \right) \quad (4.35)$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \left(i[P_\mu, a] \exp(-ikx) + i[P_\mu, a^\dagger] \exp(ikx) \right) . \quad (4.36)$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$[P_\mu, a(\vec{k})] = -k_\mu a \quad (4.37)$$

$$[P_\mu, a^\dagger(\vec{k})] = k_\mu a^\dagger . \quad (4.38)$$

Es sei hier an den harmonischen Oszillator erinnert, bei dem Auf- und Absteigeoperatoren durch die Vertauschungsrelationen

$$[H, a^\dagger] = \omega a^\dagger \quad \text{und} \quad [H, a] = -\omega a \quad (4.39)$$

charakterisiert sind.

4.3.2 Konstruktion der Zustände

Wir wollen nun auf algebraischem Weg die Zustände konstruieren. Es sei $|0\rangle$ der Vakuumzustand, wobei $|0\rangle \neq 0$. Er sei auf 1 normiert, also

$$\langle 0|0\rangle = 1 . \quad (4.40)$$

Da im Vakuum kein Teilchen vorhanden ist, ist $E = 0$ und $\vec{p} = 0$. Damit also

$$P_\mu|0\rangle = 0 . \quad (4.41)$$

Wir wenden Gleichung (4.38) auf $|0\rangle$ an und finden

$$\begin{aligned} (P_\mu a^\dagger - a^\dagger P_\mu)|0\rangle &= k_\mu a^\dagger|0\rangle \\ \Rightarrow P_\mu a^\dagger(\vec{k})|0\rangle &= k_\mu a^\dagger|0\rangle . \end{aligned} \quad (4.42)$$

Es ist also $a^\dagger|0\rangle$ ein Eigenzustand des Energie- und Impuls-Operators mit den Eigenwerten k_0 und \vec{k} falls $a^\dagger|0\rangle \neq 0$. Wenden wir Glg. (4.37) auf $|0\rangle$ an, so finden wir

$$P_0 a|0\rangle = -k_0 a|0\rangle . \quad (4.43)$$

Damit wäre also $a|0\rangle$ ein Eigenzustand zu einem negativen Energieeigenwert. Da wir fordern wollen, dass stets $E \geq 0$, folgt

$$a(\vec{k})|0\rangle = 0 \quad \forall \vec{k} . \quad (4.44)$$

Wenn $|p\rangle$ Eigenzustand zu P_μ ist, so gilt

$$P_\mu|p\rangle = p_\mu|p\rangle . \quad (4.45)$$

Verwendung von Gln. (4.38) und (4.37) liefert dann

$$P_\mu a^\dagger(\vec{k})|p\rangle = (p_\mu + k_\mu) a^\dagger(\vec{k})|p\rangle \quad (4.46)$$

$$P_\mu a(\vec{k})|p\rangle = (p_\mu - k_\mu) a(\vec{k})|p\rangle . \quad (4.47)$$

Und wir haben für

$$P^\mu a^\dagger(\vec{k}_1) a^\dagger(\vec{k}_2)|0\rangle = (k_1^\mu + k_2^\mu) a^\dagger(\vec{k}_1) a^\dagger(\vec{k}_2)|0\rangle . \quad (4.48)$$

Wir können also a^\dagger als Erzeugungsoperator und a als Vernichtungsoperator interpretieren. Wenden wir a^\dagger auf das Vakuum an, so haben wir

$$|\vec{k}\rangle = a^\dagger(\vec{k})|0\rangle . \quad (4.49)$$

Es handelt sich hier um einen 1-Teilchenzustand mit Impuls \vec{k} . Es wird ein Teilchen im Impulsraum erzeugt, mit der Energie $k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$. Somit kann der gesamte Hilbert-Raum (\equiv Fock-Raum) folgendermaßen konstruiert werden:

$$|\vec{k}_1, \vec{k}_2\rangle = a^\dagger(\vec{k}_1) a^\dagger(\vec{k}_2)|0\rangle \quad (4.50)$$

$$|\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n\rangle = a^\dagger(\vec{k}_1) \dots a^\dagger(\vec{k}_n)|0\rangle . \quad (4.51)$$

Bei letzterem handelt es sich um einen Zustand im Fock-Raum, der aus n Teilchen mit den Impulsen \vec{k}_i besteht.

Mikrokausalität: Wenn wir zwei Messungen bei x und y haben, so dürfen sich diese nicht beeinflussen, wenn x und y zueinander raumartig sind. Somit müssen wir fordern

$$[\phi(x), \phi(y)] = 0 \quad \text{für } (x - y)^2 < 0. \quad (4.52)$$

Es gilt damit im Speziellen auch für $\vec{x} \neq \vec{y}$

$$[\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{y}, t)] = 0 \quad (4.53)$$

$$\left[\phi(\vec{x}, t), \dot{\phi}(\vec{y}, t) \right] = 0. \quad (4.54)$$

Und trivialerweise

$$[\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}, t)] = 0. \quad (4.55)$$

Dies verwenden wir nun, um zu zeigen, dass daraus die Bose-Symmetrie der Teilchen folgt, was bedeutet

$$[a^\dagger(\vec{k}_1), a^\dagger(\vec{k}_2)] = 0 \quad (4.56)$$

$$\left[a(\vec{k}_1), a(\vec{k}_2) \right] = 0. \quad (4.57)$$

Wir können das Feld und seine zeitliche Ableitung schreiben als

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \exp(-i\vec{k}\vec{x}) \left(\exp(i\omega t) a^\dagger(\vec{k}) + \exp(-i\omega t) a(-\vec{k}) \right) \quad (4.58)$$

$$\dot{\phi}(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \exp(-i\vec{k}\vec{x}) \left(i\omega \exp(i\omega t) a^\dagger(\vec{k}) - i\omega \exp(-i\omega t) a(-\vec{k}) \right). \quad (4.59)$$

Die dazu gehörigen Fourier-Transformierten sind gegeben durch

$$\exp(i\omega t) a^\dagger(\vec{k}) + \exp(-i\omega t) a(-\vec{k}) = 2\omega \int d^3x \exp(i\vec{k}\vec{x}) \phi(\vec{x}, t) \quad (4.60)$$

$$\exp(i\omega t) a^\dagger(\vec{k}) - \exp(-i\omega t) a(-\vec{k}) = -2i \int d^3x \exp(i\vec{k}\vec{x}) \dot{\phi}(\vec{x}, t). \quad (4.61)$$

Da nun $[\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{y}, t)] = 0 \quad \forall \vec{x}, \vec{y}$ gilt, folgt

$$\begin{aligned} 0 &= [(4.60)(\vec{k}_1), (4.60)(\vec{k}_2)] \\ &= \exp(+i(\omega_1 + \omega_2)t) [a^\dagger(\vec{k}_1), a^\dagger(\vec{k}_2)] \\ &+ \exp(-i(\omega_1 + \omega_2)t) [a(-\vec{k}_1), a(-\vec{k}_2)] \\ &+ \exp(+i(\omega_1 - \omega_2)t) [a^\dagger(\vec{k}_1), a(-\vec{k}_2)] \\ &+ \exp(-i(\omega_1 - \omega_2)t) [a(-\vec{k}_1), a^\dagger(\vec{k}_2)]. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Die Zeitabhängigkeit der beiden ersten Terme wird durch keinen anderen Term kompensiert. Die beiden letzten Terme haben für $\omega_1 = \omega_2$ hingegen dieselbe Zeitabhängigkeit und kompensieren sich, s.u. Damit ist also

$$[a^\dagger(\vec{k}_1), a^\dagger(\vec{k}_2)] = 0 \quad \text{und} \quad [a(\vec{k}_1), a(\vec{k}_2)] = 0. \quad (4.63)$$

Diese Vertauschungsrelationen beinhalten die Bose-Symmetrie der Teilchen. Denn

$$|k_1, k_2\rangle \equiv a^\dagger(k_1)a^\dagger(k_2)|0\rangle = a^\dagger(k_2)a^\dagger(k_1)|0\rangle = |k_2, k_1\rangle . \quad (4.64)$$

Das bedeutet, dass Zwei-Teilchen-Zustände symmetrisch unter der Vertauschung von k_1 und k_2 sind. Wir haben hier das erste Beispiel für das Spin-Statistik-Theorem, dass nämlich Teilchen mit ganzzahligem Spin die Bosestatistik und Teilchen mit halbzahligen Spin die Fermistatistik erfüllen.

Wir betrachten den Kommutator $[a, a^\dagger]$. Mithilfe der Glgen. (4.60), (4.61) lassen sich $a^\dagger(\vec{k})$ und $a(\vec{k})$ berechnen:

$$a^\dagger(\vec{k}) = \exp(-i\omega t) \int d^3x \exp(+i\vec{k} \cdot \vec{x}) \left(\omega\phi(\vec{x}, t) - i\dot{\phi}(\vec{x}, t) \right) \quad (4.65)$$

$$a(\vec{k}) = \exp(+i\omega t) \int d^3x \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) \left(\omega\phi(\vec{x}, t) + i\dot{\phi}(\vec{x}, t) \right) . \quad (4.66)$$

Verwendung von (4.53), (4.54), (4.55) und

$$[\phi(\vec{x}), \phi(\vec{x})] = [\dot{\phi}(\vec{x}), \dot{\phi}(\vec{x})] = 0 \quad (4.67)$$

liefert

$$\begin{aligned} [a(\vec{k}_1), a^\dagger(\vec{k}_2)] &= \exp(i(\omega_1 - \omega_2)t) \int d^3x d^3y \exp(-i\vec{k}_1 \cdot \vec{x} + i\vec{k}_2 \cdot \vec{y}) \\ &\quad \left\{ i\omega_2[\dot{\phi}(\vec{x}, t), \phi(\vec{y}, t)] - i\omega_1[\phi(\vec{x}, t), \dot{\phi}(\vec{y}, t)] \right\} . \end{aligned} \quad (4.68)$$

Da a und ϕ nicht einfach komplexe Zahlen sein sollen, darf dieser Ausdruck nicht identisch null sein. Nun kann der Integrand nur für $\vec{x} = \vec{y}$ von Null verschieden sein, vgl. Glgen. (4.53)-(4.55). Deshalb fordern wir als Ansatz für die kanonische Vertauschungsrelation

$$[\phi(\vec{x}, t), \dot{\phi}(\vec{y}, t)] = i\delta(\vec{x} - \vec{y}) . \quad (4.69)$$

Damit folgt also für die Vertauschungsrelation von a und a^\dagger

$$[a(\vec{k}_1), a^\dagger(\vec{k}_2)] = (2\pi)^3 2\omega_1 \delta(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) . \quad (4.70)$$

Wir können den Ansatz dadurch rechtfertigen, dass wir ϕ als kanonische Koordinate, $\dot{\phi}$ als kanonischen Impuls und \vec{x} als Index auffassen.

Wir können also zusammenfassen, dass ϕ und $\dot{\phi}$ folgenden kanonischen Vertauschungsrelationen genügen:

$$[\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{y}, t)] = 0 \quad (4.71)$$

$$[\phi(\vec{x}, t), \dot{\phi}(\vec{y}, t)] = i\delta(\vec{x} - \vec{y}) . \quad (4.72)$$

Und damit sind die Kommutatoren von a und a^\dagger

$$[a^\dagger, a^\dagger] = 0 \quad (4.73)$$

$$[a, a] = 0 \quad (4.74)$$

$$[a(\vec{k}_1), a^\dagger(\vec{k}_2)] = (2\pi)^3 2\omega_1 \delta(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) . \quad (4.75)$$

Es sei bemerkt, dass sich manche Definitionen von a durch einen Faktor $\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}$ unterscheiden. Die mithilfe von a^\dagger konstruierten Ein-Teilchen-Zustände

$$a^\dagger(\vec{k})|0\rangle \equiv |\vec{k}\rangle \quad (4.76)$$

sind folgendermaßen normiert

$$\langle \vec{k} | \vec{k}' \rangle = (2\pi)^3 2\omega \delta(\vec{k} - \vec{k}') . \quad (4.77)$$

Es handelt sich um uneigentliche Zustände und wäre mathematisch sorgfältiger Zustände mithilfe von Wellenpaketen einzuführen, also

$$|a^\dagger[f]\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} f(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k})|0\rangle . \quad (4.78)$$

n -Teilchen-Zustände führen wir ein über

$$N a^\dagger(\vec{k}_1) \dots a^\dagger(\vec{k}_n) |0\rangle \quad (4.79)$$

bzw.

$$N a^\dagger[f_1] \dots a^\dagger[f_n] |0\rangle . \quad (4.80)$$

Hierbei sind die f_i orthornormiert durch die Forderung

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f_i^*(\vec{k}) f_j(\vec{k}) = \delta_{ij} . \quad (4.81)$$

Bei N handelt es sich um eine Normierungskonstante. Sie hat den Wert $N = 1$, falls alle f_i verschieden sind, und $N = (n!)^{-\frac{1}{2}}$, falls alle f_i gleich sind. Falls je r_1 der f_i und je r_2 der f_i gleich sind, dann ist

$$N = (r_1! r_2! \dots)^{-\frac{1}{2}} . \quad (4.82)$$

Interpretation: Die Heisenberg-Zustände mit einem Teilchen und der Impulswellenfunktion $f(\vec{k})$ sind

$$|f\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} f(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}) |0\rangle . \quad (4.83)$$

Und die Schrödinger-Zustände sind

$$|f, t\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \exp(-i\omega t) f(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}) |0\rangle \quad (4.84)$$

Aus

$$\langle f, t | f, t \rangle = 1 \quad (4.85)$$

folgt dann

$$\int |f(\vec{k})|^2 \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = 1 \quad (4.86)$$

und umgekehrt.

Bemerkung: Wir können

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f(\vec{k}) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t) \quad (4.87)$$

nicht als Ortswellenfunktion $\phi(x)$ eines Teilchens interpretieren. Denn es ist $\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle \neq 0$ auch für $(x-y)^2 < 0$, was als Ausbreitung mit Überlichtgeschwindigkeit interpretiert werden müsste und damit im Widerspruch zu Kausalität stünde.

Konstruktion von Operatoren: Operatoren wie Energie-, Impuls-, Teilchenzahloperatoren und weitere lassen sich aus den Quantenfeldern folgendermaßen aufbauen: Es werden die Noether-Ströme verwendet, die 0-Komponente integriert und eine Normalordnung durchgeführt. Diese bedeutet

$$\text{Normalordnung: } : a^\dagger a : \equiv : a a^\dagger : \equiv a^\dagger a . \quad (4.88)$$

Warum wir diese Normalordnung durchführen wird unten klar werden.

Teilchenzahloperator: Der Teilchenzahloperator ist gegeben durch

$$N \equiv \int d\tilde{k} a^\dagger a , \quad (4.89)$$

wobei

$$d\tilde{k} = \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 2\pi \delta(k^2 - m^2) \theta(k_0) = \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \quad (4.90)$$

ein Lorentz-invariantes Integrationsmaß ist. Somit erhalten wir mithilfe der Kommutatorrelationen und der Definition des Zustandes $|\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n\rangle$,

$$N|\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n\rangle = n|\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n\rangle . \quad (4.91)$$

Energie- und Impuls-Operatoren: Ausgehend vom Energie-Impuls-Tensor T_ν^μ bekommen wir die erhaltene Ladung, den Viererimpuls, als (siehe Glg. (3.67))

$$P_\mu = \int d^3x T_\mu^0 = \int d^3x \partial^0 \phi \partial_\mu \phi - g_\mu^0 \mathcal{L} . \quad (4.92)$$

Der Energieoperator ergibt sich aus

$$H = \int d^3x T_0^0 = \int d^3x \partial^0 \phi \partial_0 \phi - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \int d^3x \left(: \partial^0 \phi \partial_0 \phi : + : \vec{\nabla} \phi \vec{\nabla} \phi : + m^2 : \phi^2 : \right) \quad (4.93)$$

wobei die Doppelpunkte hier also die Normalordnung symbolisieren. Verwendung von

$$\phi = \int d\tilde{k} \left(\exp(i\omega t) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) a^\dagger(\vec{k}) + \exp(-i\omega t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) a(\vec{k}) \right) \quad (4.94)$$

$$\partial_0 \phi = \int d\tilde{k} \left(i\omega \exp(i\omega t) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) a^\dagger(\vec{k}) - i\omega \exp(-i\omega t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) a(\vec{k}) \right) \quad (4.95)$$

$$\vec{\nabla} \phi = \int d\tilde{k} \left(-i\vec{k} \exp(i\omega t) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) a^\dagger(\vec{k}) + i\vec{k} \exp(-i\omega t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) a(\vec{k}) \right) . \quad (4.96)$$

liefert

$$m^2 \int d^3x |\phi(\vec{x}, t)|^2|_{t=0} = (2\pi)^3 m^2 \int d\tilde{k} \int d\tilde{k}' \{ \delta(\vec{k} - \vec{k}') [a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}') + a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}')] + \delta(\vec{k} + \vec{k}') [a^\dagger(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}') + a(\vec{k})a(\vec{k}')] \} \quad (4.97)$$

und

$$\int d^3x |\partial_0 \phi(\vec{x}, t)|^2|_{t=0} = (2\pi)^3 \omega^2 \int d\tilde{k} \int d\tilde{k}' \{ \delta(\vec{k} - \vec{k}') [a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}') + a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}')] - \delta(\vec{k} + \vec{k}') [a^\dagger(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}') + a(\vec{k})a(\vec{k}')] \} \quad (4.98)$$

sowie

$$\int d^3x |\vec{\nabla} \phi(\vec{x}, t)|^2|_{t=0} = (2\pi)^3 \int d\tilde{k} d\tilde{k}' \{ \delta(\vec{k} - \vec{k}') [\vec{k} \cdot \vec{k}' a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}') + \vec{k}' \cdot \vec{k} a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}')] - \delta(\vec{k} + \vec{k}') [\vec{k} \cdot \vec{k}' a^\dagger(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}') + \vec{k}' \cdot \vec{k} a(\vec{k})a(\vec{k}')] \} . \quad (4.99)$$

Und damit haben wir

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int d\tilde{k} \int d\tilde{k}' (2\pi)^3 \{ \overbrace{[m^2 + \omega^2 + \vec{k}^2]}{=2\omega^2} (a^\dagger a + a a^\dagger) \delta(\vec{k} - \vec{k}') + \\ &\quad + \underbrace{[m^2 - \omega^2 + \vec{k}^2]}_{=0} (a^\dagger a^\dagger + a a) \delta(\vec{k} + \vec{k}') \} \\ &= \int d\tilde{k} \int d\tilde{k}' (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{k}') \omega^2 (a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}') + a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}')) \\ &= \frac{1}{2} \int d\tilde{k} \omega (a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k})) \\ &= \int d\tilde{k} \omega a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + \text{const} . \end{aligned} \quad (4.100)$$

Hierbei entspricht die Konstante der Vakuum-Energie, die für physikalische Prozesse irrelevant ist. Diese unendlich große Konstante wird subtrahiert, so dass das Vakuum die Energie Null hat. Der Trick, der hier angewandt wird, ist die Normalordnung. (Sie bedeutet - s.o. -, dass alle Erzeuger nach links müssen.) Damit haben wir

$$: H : = \int d\tilde{k} \frac{\omega}{2} : (a^\dagger a + a a^\dagger) : = \int d\tilde{k} \omega a^\dagger a . \quad (4.101)$$

Damit ist dann also im Vakuum: $\langle 0|H|0\rangle = 0$. Man findet analog ausgehend von

$$\vec{P} = \int d^3x T_j^0 = \int d^3x \partial_0 \phi \vec{\nabla} \phi \quad (4.102)$$

für

$$\vec{P} = \int d\tilde{k} \vec{k} a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) . \quad (4.103)$$

4.3.3 Der Kommutator $[\phi(x), \phi(y)]$

Wir berechnen den Kommutator $[\phi(x), \phi(y)]$, indem wir die Fourierzerlegung einsetzen und die Kommutatorrelationen der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren verwenden:

$$\begin{aligned}
[\phi(x), \phi(y)] &= \int d\tilde{k}d\tilde{k}' \left\{ [a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] e^{-ikx+ik'y} + [a^\dagger(\vec{k}), a(\vec{k}')] e^{ikx-ik'y} \right\} \\
&= \int \underbrace{d\tilde{k}}_{\frac{d^4k}{(2\pi)^3} \delta(k^2-m^2)\theta(k^0)} \left\{ e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)} \right\} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4k \epsilon(k^0) \delta(k^2 - m^2) e^{-ik(x-y)} \\
&\equiv i\Delta(x-y), \tag{4.104}
\end{aligned}$$

wobei

$$\epsilon(k^0) \equiv \theta(k^0) - \theta(-k^0). \tag{4.105}$$

Die Pauli-Jordan Distribution hat folgende Eigenschaften:

$$1) \quad (\square_x + m^2)\Delta(x-y) = (\square_y + m^2)\Delta(x-y) = 0 \tag{4.106}$$

(Massenschalen-Bedingung $k^2 = m^2$)

$$2) \quad \Delta(x-y) = -\Delta(y-x) \tag{4.107}$$

$$3) \quad \Delta(x-y)|_{x^0=y^0} = 0 \tag{4.108}$$

$$4) \quad \Delta(x-y) = 0, \quad \text{wenn } (x-y)^2 = (x_0-y_0)^2 - (\vec{x}-\vec{y})^2 < 0 \quad (\text{raumartig}) \tag{4.109}$$

$$5) \quad \frac{\partial}{\partial x_0} \Delta(x-y)|_{x_0=y_0} = -\delta(\vec{x}-\vec{y}). \tag{4.110}$$

Aus 4) folgt die Mikrokausalitat, d.h. $[\phi(x), \phi(y)] = 0$ fur $(x-y)^2 < 0$.

4.4 Geladenes skalares Feld

Das Feld $\phi = \phi^\dagger$ beschreibt selbstkonjugierte Teilchen, d.h. Teilchen, die gleich ihrem Antiteilchen sind. Beispiele hierfur sind das ungeladene Pion π^0 oder das Higgsboson. Es gibt aber auch Spin-0 Teilchen, die nicht gleich ihrem Antiteilchen sind, wie etwa die geladenen Pionen π^+, π^- oder das Kaon K^0, \bar{K}^0 . Diese Teilchen sind nicht durch ein hermitesches Feld beschreibbar. Wir betrachten daher ein Dublett von zwei hermiteschen Feldern ϕ_1, ϕ_2 mit $\phi_i^\dagger = \phi_i$ ($i = 1, 2$). Das Feld

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \tag{4.111}$$

ist dann nicht hermitesch. Die Lagrangedichte fur ein freies Feld ϕ lautet

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\phi) &= \mathcal{L}(\phi_1) + \mathcal{L}(\phi_2) \\
&= \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i - m^2 \phi_i \phi_i) \\
&= (\partial_\mu \phi^\dagger)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi \quad (\text{nachrechnen!}). \tag{4.112}
\end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichungen ergeben sich aus der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\square + m^2)\phi^\dagger = 0 \quad (4.113)$$

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\dagger)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\dagger} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\square + m^2)\phi = 0 . \quad (4.114)$$

Der kanonisch konjugierte Impuls zu ϕ ist

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \partial_0 \phi^\dagger = \dot{\phi}^\dagger , \quad (4.115)$$

und der zu ϕ^\dagger kanonisch konjugierte Impuls ist

$$\Pi^\dagger = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi^\dagger)} = \partial_0 \phi = \dot{\phi} . \quad (4.116)$$

Der Hamiltondichteoperator ist damit

$$\mathcal{H} = \Pi \dot{\phi} + \Pi^\dagger \dot{\phi}^\dagger - \mathcal{L} = \partial_0 \phi \partial_0 \phi^\dagger + (\vec{\nabla} \phi^\dagger)(\vec{\nabla} \phi) + m^2 \phi^\dagger \phi . \quad (4.117)$$

Der Hamiltondichteoperator bzw. der Hamiltonoperator soll normalgeordnet sein, damit $\langle 0|H|0\rangle = 0$. Also

$$H = \int d^3x : \left\{ \partial_0 \phi \partial_0 \phi^\dagger + (\vec{\nabla} \phi^\dagger)(\vec{\nabla} \phi) + m^2 \phi^\dagger \phi \right\} : . \quad (4.118)$$

Die hermiteschen Felder erfüllen

$$[\Pi_i(t, \vec{x}), \Pi_j(t, \vec{y})] = [\phi_i(t, \vec{x}), \phi_j(t, \vec{y})] = 0 \quad (4.119)$$

$$[\phi_i(t, \vec{x}), \Pi_j(t, \vec{y})] = i\delta_{ij}\delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad i, j = 1, 2 . \quad (4.120)$$

Beziehungswise allgemein (nach Voraussetzung gleicher Massenparameter)

$$[\phi_i(x), \phi_j(y)] = i\delta_{ij}\Delta(x - y) . \quad (4.121)$$

Und für das nicht-hermitesche Feld ϕ ergibt sich

$$[\phi(x), \phi^\dagger(y)] = i\Delta(x - y) \quad (\text{nachrechnen!}) . \quad (4.122)$$

Differentiation nach x_0 ergibt

$$(\partial_{x_0} \phi(x)) \phi^\dagger(y) - \phi^\dagger(y) (\partial_{x_0} \phi(x)) = i\partial_{x_0} \Delta(x - y) . \quad (4.123)$$

Wir setzen $x_0 = y_0$ und erhalten mit (4.110)

$$[\Pi^\dagger(x_0, \vec{x}), \phi^\dagger(x_0, \vec{y})] = -i\delta(\vec{x} - \vec{y}) . \quad (4.124)$$

Sowie durch hermitesche Adjugation

$$[\phi(x_0, \vec{x}), \Pi(x_0, \vec{y})] = i\delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad \Rightarrow \quad [\Pi(x_0, \vec{x}), \phi(x_0, \vec{y})] = -i\delta(\vec{x} - \vec{y}) . \quad (4.125)$$

Die Fourierzerlegung des Feldes ϕ , welches die Klein-Gordon-Gleichung erfüllt,

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0 , \quad (4.126)$$

ist gegeben durch

$$\phi(x) = \int d\vec{k} [a(\vec{k})e^{-ikx} + \underbrace{b^\dagger(\vec{k})}_{\neq a^\dagger, \text{ da } \phi \neq \phi^\dagger} e^{ikx}] . \quad (4.127)$$

Und die von ϕ^\dagger durch

$$\phi^\dagger(x) = \int d\vec{k} [b(\vec{k})e^{-ikx} + a^\dagger(\vec{k})e^{ikx}] . \quad (4.128)$$

Einsetzen von

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \quad (4.129)$$

und Ausdrücken von ϕ_1, ϕ_2 durch ihre jeweilige Fourierzerlegung liefert dann mit

$$a(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1(\vec{k}) + ia_2(\vec{k})) \quad (4.130)$$

$$b^\dagger(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^\dagger(\vec{k}) + ia_2^\dagger(\vec{k})) \quad (4.131)$$

sowie

$$[a_i(\vec{k}), a_j^\dagger(\vec{k}')] = (2\pi)^3 2\omega \delta_{ij} \delta(\vec{k} - \vec{k}') , \quad [a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0 \quad (4.132)$$

schließlich

$$[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = [b(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}')] = (2\pi)^3 2\omega \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (4.133)$$

$$\text{alle anderen Kommutatoren} = 0 . \quad (4.134)$$

Der normalgeordnete 4-er Impulsoperator P^μ ergibt sich zu (nachrechnen!)

$$\begin{aligned} P_\mu = \int d^3x : T_\mu^0 : &= \int d^3x : \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} \partial_\mu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi^\dagger)} \partial_\mu \phi^\dagger - g_\mu^0 \mathcal{L} \right\} : \\ &= \int d\vec{k} k_\mu [a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k})] . \end{aligned} \quad (4.135)$$

Und es gelten die Vertauschungsrelationen (nachrechnen!)

$$[P_\mu, a^\dagger(\vec{k})] = k_\mu a^\dagger(\vec{k}) , \quad [P_\mu, a(\vec{k})] = -k_\mu a(\vec{k}) , \quad (4.136)$$

$$[P_\mu, b^\dagger(\vec{k})] = k_\mu b^\dagger(\vec{k}) , \quad [P_\mu, b(\vec{k})] = -k_\mu b(\vec{k}) . \quad (4.137)$$

Die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger(x) \partial^\mu \phi(x) - m^2 \phi^\dagger(x) \phi(x) \quad (4.138)$$

ist invariant unter einer $U(1)$ -Symmetrie, d.h. unter den Phasentransformationen

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{i\lambda} \phi(x) \quad (4.139)$$

$$\phi^\dagger(x) \rightarrow \phi'^\dagger(x) = \phi^\dagger e^{-i\lambda} . \quad (4.140)$$

Der Noetherstrom ergibt sich mit

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \quad \delta x^\mu = A^\mu \lambda = 0 \quad (4.141)$$

$$\phi'(x) = \phi(x) + i\lambda\phi(x) \quad \delta\phi = i\phi \quad (4.142)$$

$$\phi^\dagger'(x) = \phi^\dagger(x) - i\lambda\phi^\dagger(x) \quad \delta\phi^\dagger = -i\phi^\dagger \quad (4.143)$$

$$(4.144)$$

(vergleiche Glgen. (3.86)-(3.89), wobei der Index k weggelassen wurde, da es sich um eine 1-parametrische Transformation handelt) zu

$$\begin{aligned} j^\mu &= -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}i\phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\dagger)}(-i\phi^\dagger) \\ &= -i(\partial^\mu\phi^\dagger)\phi + i(\partial^\mu\phi)\phi^\dagger. \end{aligned} \quad (4.145)$$

Der Strom wird normalgeordnet, damit für die Ladungsdichte j^0 garantiert ist, dass

$$j^0(x)|0\rangle = 0, \quad (4.146)$$

also

$$j^\mu(x)_{\text{normalgeordnet}} = : -i(\partial^\mu\phi^\dagger)\phi + i(\partial^\mu\phi)\phi^\dagger : \quad (4.147)$$

$$\equiv i : \phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi(x) : . \quad (4.148)$$

Die Ladung ist gegeben durch (nachrechnen!)

$$Q = \int d^3x j^0(x)_{\text{normalgeordnet}} = i \int d^3x : \phi^\dagger(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) : = \int d\vec{k} [a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) - b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k})] . \quad (4.149)$$

Es ist (nachrechnen!)

$$\dot{Q} = i[H, Q] = 0 \quad (4.150)$$

und damit ist Q also eine Erhaltungsgröße. Die Interpretation der Operatoren $a, a^\dagger, b, b^\dagger$ ist (analog zum hermiteschen Fall)

$$a^\dagger \quad \text{erzeugt ein Teilchen vom Typ } a \text{ mit Spin } 0 \text{ und Masse } m \quad (4.151)$$

$$b^\dagger \quad \text{erzeugt ein Teilchen vom Typ } b \text{ mit Spin } 0 \text{ und Masse } m \quad (4.152)$$

$$a \quad \text{vernichtet ein Teilchen vom Typ } a \text{ mit Spin } 0 \text{ und Masse } m \quad (4.153)$$

$$b \quad \text{vernichtet ein Teilchen vom Typ } b \text{ mit Spin } 0 \text{ und Masse } m . \quad (4.154)$$

Das heißt, das Feld

$$\phi \quad \text{vernichtet ein Quant vom Typ } a, \text{ erzeugt ein Quant vom Typ } b \quad (4.155)$$

$$\phi^\dagger \quad \text{vernichtet ein Quant vom Typ } b, \text{ erzeugt ein Quant vom Typ } a . \quad (4.156)$$

Wir betrachten den Zustandsraum (Fockraum). Der Grundzustand ist gegeben durch $|0\rangle$.

Wir fordern

$$a(\vec{k})|0\rangle = b(\vec{k})|0\rangle = 0, \quad (4.157)$$

so dass

$$P_\mu|0\rangle = 0, \quad Q|0\rangle = 0. \quad (4.158)$$

Die 1-Teilchenzustände zum scharfen 4-er Impuls k_μ sind gegeben durch

$$|a(\vec{k})\rangle := a^\dagger(\vec{k})|0\rangle \quad (4.159)$$

$$|b(\vec{k})\rangle := b^\dagger(\vec{k})|0\rangle. \quad (4.160)$$

Die Ladung dieser Zustände ist (nachrechnen!)

$$Q|a(\vec{k})\rangle = Qa^\dagger(\vec{k})|0\rangle = +|a(\vec{k})\rangle \quad (4.161)$$

$$Q|b(\vec{k})\rangle = Qb^\dagger(\vec{k})|0\rangle = -|b(\vec{k})\rangle. \quad (4.162)$$

Das heißt,

$$|a(\vec{k})\rangle \quad \text{ist ein 1-Teilchenzustand mit Masse } m, \text{ Spin } 0 \text{ und Ladung } + \quad (4.163)$$

$$|b(\vec{k})\rangle \quad \text{ist ein 1-Teilchenzustand mit Masse } m, \text{ Spin } 0 \text{ und Ladung } - . \quad (4.164)$$

Es handelt sich um das Teilchen und sein Antiteilchen.

4.5 Die Quantisierung von Spinorfeldern (Dirac-Feldern)

Die freie Lagrangedichte ohne Wechselwirkung ist gegeben durch

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\rlap{\not{\partial}} - m)\psi, \quad \text{wobei } \bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0. \quad (4.165)$$

Zur Erinnerung

$$(\gamma^0)^2 = 1. \quad (4.166)$$

Der kanonisch konjugierte Impuls in Komponentenform ($\alpha = 1, \dots, 4$) ist

$$\pi^\alpha(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi_\alpha)} = i\psi_\alpha^\dagger = i\psi_\alpha^*. \quad (4.167)$$

Die Lösung der Dirac-Gleichung vor der Quantisierung ist gegeben durch eine Entwicklung nach ebenen Wellen,

$$\psi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \left[\exp(ikx) \beta_s^*(\vec{k}) v_s(\vec{k}) + \exp(-ikx) \alpha_s(\vec{k}) u_s(\vec{k}) \right] \quad (4.168)$$

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \left[\exp(-ikx) \beta_s(\vec{k}) \bar{v}_s(\vec{k}) + \exp(ikx) \alpha_s^*(\vec{k}) \bar{u}_s(\vec{k}) \right]. \quad (4.169)$$

Die Felder erfüllen die Dirac-Gleichung

$$(i\rlap{\not{\partial}} - m)\psi = 0 \quad (4.170)$$

$$\bar{\psi}(i\overleftarrow{\not{\partial}} + m) = 0. \quad (4.171)$$

Aus (4.170) folgt

$$(\not{k} + m)v_s = 0 \quad \text{Lösung zu negativer Frequenz} \quad (4.172)$$

$$(\not{k} - m)u_s = 0 \quad \text{Lösung zu positiver Frequenz.} \quad (4.173)$$

4.5.1 Quantisierung

Zur Quantisierung werden α_s, β_s^* durch Operatoren ersetzt,

$$\alpha_s \rightarrow a_s \quad \text{und} \quad \beta_s^* \rightarrow b_s^\dagger. \quad (4.174)$$

Die Lösung der Dirac-Gleichung lautet damit in quantisierter Form

$$\psi(x) = \int d\tilde{k} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \left[\exp(ikx) b_s^\dagger(\vec{k}) v_s(\vec{k}) + \exp(-ikx) a_s(\vec{k}) u_s(\vec{k}) \right] \quad (4.175)$$

$$\bar{\psi}(x) = \int d\tilde{k} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \left[\exp(-ikx) b_s(\vec{k}) \bar{v}_s(\vec{k}) + \exp(ikx) a_s^\dagger(\vec{k}) \bar{u}_s(\vec{k}) \right]. \quad (4.176)$$

Es soll wiederum die Heisenberg Gleichung

$$\partial_\mu \psi = i[P_\mu, \psi] \quad (4.177)$$

erfüllt sein. Daraus folgt dann

$$[P_\mu, a_s^\dagger(\vec{k})] = k_\mu a_s^\dagger(\vec{k}) \quad (4.178)$$

$$[P_\mu, b_s^\dagger(\vec{k})] = k_\mu b_s^\dagger(\vec{k}) \quad (4.179)$$

$$[P_\mu, a_s(\vec{k})] = -k_\mu a_s(\vec{k}) \quad (4.180)$$

$$[P_\mu, b_s(\vec{k})] = -k_\mu b_s(\vec{k}) \quad (4.181)$$

Damit folgt wie beim skalaren Feld

$$a|0\rangle = b|0\rangle = 0, \quad (4.182)$$

da für alle Zustände die Energie positiv sein muss. Damit erzeugt ψ ein Antiteilchen (z.B. Positron e^+) und vernichtet ein Teilchen (z.B. Elektron e^-).

4.5.2 Operatoralgebra

Die Translationsinvarianz der zur Dirac-Lagrangedichte gehörenden Wirkung führt auf den Energie-Impuls-Tensor, der gegeben ist durch

$$T^{\mu\nu} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi - g^{\mu\nu}[\bar{\psi} \underbrace{(i\cancel{\partial} - m)\psi}_{=0 \text{ wg. Dirac-Gleichung}}]. \quad (4.183)$$

Das heißt

$$T^{\mu\nu} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi. \quad (4.184)$$

Der Impuls-Operator ergibt sich zu

$$P^\nu = \int d^3x T^{0\nu} = i \int d^3x \psi^\dagger \partial^\nu \psi. \quad (4.185)$$

Er muss noch normalgeordnet werden. Einsetzen der Fourierzerlegung liefert vor der Normalordnung für den Hamiltonoperator

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \psi^\dagger(x) i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) = \int d^3x \sum_{\alpha=1}^4 \psi_\alpha^\dagger i \frac{\partial}{\partial t} \psi_\alpha \\ &= \int d\vec{k} k_0 \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} [a_s^\dagger(\vec{k}) a_s(\vec{k}) - b_s(\vec{k}) b_s^\dagger(\vec{k})] . \end{aligned} \quad (4.186)$$

Dabei haben wir verwendet, dass

$$u^\dagger(k, s) u(k, s') = 2k_0 \delta_{ss'} \quad (4.187)$$

$$v^\dagger(k, s) v(k, s') = 2k_0 \delta_{ss'} \quad (4.188)$$

$$u^\dagger(k, s) v(\vec{k}, s') = 0 \quad (4.189)$$

$$u(k, s) v^\dagger(\vec{k}, s') = 0 , \quad \text{mit } \vec{k}^\mu = (k_0, -\vec{k})^T . \quad (4.190)$$

Es müssen für die Erzeuger und Vernichter Antivertauschungsrelationen gefordert werden, damit Teilchen und Antiteilchen nicht entgegengesetzte Energien haben. Wir fordern also

$$\{a_r(\vec{k}), a_s^\dagger(\vec{k}')\} = \delta_{rs} (2\pi)^3 2\omega_k \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (4.191)$$

$$\{b_r(\vec{k}), b_s^\dagger(\vec{k}')\} = \delta_{rs} (2\pi)^3 2\omega_k \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (4.192)$$

$$\{a, b\} = \{a, a\} = \{b, b\} = \dots = 0 . \quad (4.193)$$

Damit erhalten wir nach Normalordnung für den Hamiltonoperator

$$H = \int d\vec{k} k_0 \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} [a_s^\dagger(\vec{k}) a_s(\vec{k}) + b_s^\dagger(\vec{k}) b_s(\vec{k})] . \quad (4.194)$$

Und für den Impuls

$$\vec{P} = \int d\vec{k} \vec{k} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} [a_s^\dagger(\vec{k}) a_s(\vec{k}) + b_s^\dagger(\vec{k}) b_s(\vec{k})] \quad (4.195)$$

Für den Ladungsoperator (siehe Glg. (3.96)) findet man

$$Q = \int d^3x : j_0(x) : = \int d^3x : \psi^\dagger(x) \psi(x) : = \int d\vec{k} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} [a_s^\dagger(\vec{k}) a_s(\vec{k}) - b_s^\dagger(\vec{k}) b_s(\vec{k})] \quad (4.196)$$

Bemerkungen:

1. Die negative (unendliche große) Konstante entfällt aufgrund der Normalordnung.
2. Aus den Antivertauschungsrelationen der Erzeuger- und Vernichter-Operatoren folgen unter Verwendung von

$$\sum_{s=\pm\frac{1}{2}} u_\alpha(\vec{k}, s) \bar{u}_\beta(\vec{k}, s) = (\not{k} + m)_{\alpha\beta} \quad (4.197)$$

$$\sum_{s=\pm\frac{1}{2}} v_\alpha(\vec{k}, s) \bar{v}_\beta(\vec{k}, s) = (\not{k} - m)_{\alpha\beta} \quad (4.198)$$

die Antivertauschungsrelationen

$$\{\psi_\alpha(\vec{x}, t), \psi_\beta(\vec{y}, t)\} = \{\bar{\psi}_\alpha(\vec{x}, t), \bar{\psi}_\beta(\vec{y}, t)\} = 0 \quad (4.199)$$

$$\{\psi_\alpha(\vec{x}, t), \bar{\psi}_\beta(\vec{y}, t)\} = \gamma_{\alpha\beta}^0 \delta(\vec{x} - \vec{y}) . \quad (4.200)$$

Und damit

$$\{\psi_\alpha(\vec{x}, t), \psi_\beta^\dagger(\vec{y}, t)\} = \delta_{\alpha\beta} \delta(\vec{x} - \vec{y}) . \quad (4.201)$$

Es ist also ψ^\dagger kanonisch konjugierter Impuls zu ψ .

3. Konstruktion der Zustände: Der Ein-Teilchen-Zustand

$$a_s^\dagger |0\rangle = |\vec{k}, s\rangle \quad (4.202)$$

wird interpretiert als Elektron mit Impuls \vec{k} und Spin s . Der Vakuumzustand ist der Zustand mit $\vec{k} = \vec{0}$ und $s = 0$. Zwei-Teilchen-Zustände werden konstruiert durch

$$|\vec{k}_1, s_1; \vec{k}_2, s_2\rangle = a_{s_1}^\dagger(\vec{k}_1) a_{s_2}^\dagger(\vec{k}_2) |0\rangle = -a_{s_2}^\dagger(\vec{k}_2) a_{s_1}^\dagger(\vec{k}_1) |0\rangle = -|\vec{k}_2, s_2; \vec{k}_1, s_1\rangle . \quad (4.203)$$

Es gilt also das Pauliprinzip. Das Pauliprinzip ist das Ergebnis der zweiten Quantisierung des Spinorfeldes. Die Spin-1/2-Teilchen gehorchen also der Fermi-Statistik.

Mit der Identifikation

$$\begin{aligned} |1\rangle &\equiv a_1^\dagger(\vec{k}) |0\rangle , & |2\rangle &\equiv a_2^\dagger(\vec{k}) |0\rangle \\ |3\rangle &\equiv b_1^\dagger(\vec{k}) |0\rangle , & |4\rangle &\equiv b_2^\dagger(\vec{k}) |0\rangle \end{aligned} \quad (4.204)$$

ist also

$$H|c\rangle = +k_0|c\rangle , \quad c = 1, 2, 3, 4 \quad (4.205)$$

positiv definit. Und für den Ladungsoperator Q gilt

$$Q|c\rangle = \begin{cases} +|c\rangle & \text{für } c = 1, 2 \\ -|c\rangle & \text{für } c = 3, 4 \end{cases} . \quad (4.206)$$

4.6 Der Feynman-Propagator für ein skalares Feld

Wenden wir den Feldoperator $\phi^\dagger(x)$ auf einen beliebigen Fockzustand an, so

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{erzeugt er ein Teilchen mit der Ladung } +1 \\ \text{oder vernichtet er ein Teilchen mit der Ladung } -1 \end{array} \right\} \rightsquigarrow \text{d.h. "addiert" die Ladung } +1 . \quad (4.207)$$

Analog nimmt der Feldoperator $\phi(y)$ die Ladung $+1$ weg. Wir betrachten für $t' > t$

$$\theta(t' - t) \langle 0 | \underbrace{\phi(t', \vec{x}')}_{\text{Vernichtung von Ladung } +1 \text{ zu späterer Zeit } t' \text{ und bei } \vec{x}'} \underbrace{\phi^\dagger(t, \vec{x})}_{\text{Erzeugung von Ladung } +1 \text{ zur Zeit } t \text{ und bei } \vec{x}} | 0 \rangle . \quad (4.208)$$

Wenn $t > t'$ betrachte

$$\theta(t - t') \langle 0 | \underbrace{\phi^\dagger(t, \vec{x})}_{\substack{\text{Vernichtung von Ladung} \\ -1 \text{ zu späterer} \\ \text{Zeit } t \text{ und bei } \vec{x}}} \underbrace{\phi(t', \vec{x}')}_{\substack{\text{Erzeugung von Ladung} \\ -1 \text{ zur} \\ \text{Zeit } t' \text{ und bei } \vec{x}'}} | 0 \rangle . \quad (4.209)$$

In beiden Fällen wird die Ladung erhöht bei (t, \vec{x}) und erniedrigt bei (t', \vec{x}') . Der sogenannte Feynman-Propagator $i\Delta_F(x - x')$ ist die Summe der Amplituden (4.208) und (4.209). Also

$$i\Delta_F(x - x') = \theta(t' - t) \langle 0 | \phi(x') \phi^\dagger(x) | 0 \rangle + \theta(t - t') \langle 0 | \phi^\dagger(x) \phi(x') | 0 \rangle . \quad (4.210)$$

Mithilfe des zeitgeordneten Produkts, welches für Bosefelder definiert ist durch

$$T[A(x)B(y)] = A(x)B(y)\theta(x_0 - y_0) + B(y)A(x)\theta(y_0 - x_0) , \quad (4.211)$$

wobei A, B Bosefelder sind, lässt sich der Feynman-Propagator schreiben als

$$i\Delta_F(x - y) = \langle 0 | T[\phi(x)\phi^\dagger(y)] | 0 \rangle . \quad (4.212)$$

Wir wollen nun die Darstellung von Δ_F bestimmen. Dazu berechnen wir

$$\langle 0 | \phi(x)\phi^\dagger(y) | 0 \rangle = \int d\tilde{k} e^{-ik(x-y)} \quad (4.213)$$

$$\langle 0 | \phi^\dagger(y)\phi(x) | 0 \rangle = \int d\tilde{k} e^{+ik(x-y)} . \quad (4.214)$$

Dies ergibt sich durch Einsetzen der Fourierzerlegung von ϕ, ϕ^\dagger und Verwenden der Vertauschungsrelationen (4.133), (4.134). Einsetzen von (4.213), (4.214) in (4.210) liefert

$$\begin{aligned} \Delta_F(x - y) &= \frac{1}{i} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \{ \theta(x_0 - y_0) e^{-ik(x-y)} + \theta(y_0 - x_0) e^{+ik(x-y)} \} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik(x-y)} . \end{aligned} \quad (4.215)$$

Um die letzte Zeile zu beweisen, wird die Integration $\int_{-\infty}^{+\infty} dk_0$ ausgeführt. Der Nenner weist zwei komplexe Nullstellen auf,

$$k_0 = \pm \sqrt{\vec{k}^2 + m^2 - i\epsilon} \approx \pm \underbrace{\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}}_{\omega} \mp i\epsilon' , \quad (4.216)$$

wobei $\epsilon' = \epsilon/(2(\vec{k}^2 + m^2))$. Die $i\epsilon$ -Vorschrift entspricht einer Deformation des Integrationsweges. Es gilt für

$$x_0 > y_0 : \quad e^{-ik_0(x_0 - y_0)} \rightarrow 0 \quad \text{falls } \text{Im}k_0 \rightarrow -\infty . \quad (4.217)$$

D.h. der Integrationsweg kann durch einen großen Halbkreis in der unteren Halbebene ergänzt werden. Damit findet man

$$\oint dk_0 f(k_0) = \underbrace{\int_{\text{unterer Halbkreis}} dk_0 f(k_0)}_{=0} + \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 f(k_0) . \quad (4.218)$$

Laut dem Residuensatz ist aber

$$\oint dk_0 f(k_0) = (-1) 2\pi i f(k_0) (k_0 - \omega)|_{k_0=\omega} . \quad (4.219)$$

Das Minuszeichen kommt daher, dass die Kurve im mathematisch negativen Sinn durchlaufen wird. Damit ist also

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 f(k_0) &= -2\pi i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} (k_0 - \omega) e^{-ik(x-y)}|_{k_0=\omega} \\ &= (-i) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} e^{-i\omega(x_0-y_0)} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} . \end{aligned} \quad (4.220)$$

Es gilt für

$$y_0 > x_0 : \quad e^{-ik_0(x_0-y_0)} \rightarrow 0 \quad \text{falls } \text{Im}k_0 \rightarrow +\infty . \quad (4.221)$$

Somit kann der Integrationsweg nach oben geschlossen werden. Dieser umschließt den Pol bei $k_0 = -\sqrt{\vec{k}^2 + m^2 - i\epsilon}$, d.h.

$$\oint dk_0 f(k_0) = \underbrace{\int_{\text{oberer Halbkreis}} dk_0 f(k_0)}_{=0} + \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 f(k_0) . \quad (4.222)$$

Und mit dem Residuensatz

$$\oint dk_0 f(k_0) = 2\pi i f(k_0) (k_0 + \omega)|_{k_0=-\omega} . \quad (4.223)$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 f(k_0) &= 2\pi i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} (k_0 + \omega) e^{-ik(x-y)}|_{k_0=-\omega} \\ &= (-i) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} e^{+i\omega(x_0-y_0)} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} = -i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} e^{+ik(x-y)} \end{aligned} \quad (4.224)$$

wobei im letzten Schritt eine Variablentransformation $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ durchgeführt wurde. Die Summe von (4.220) und (4.224) ergibt (4.215).

Eigenschaften von $\Delta_F(x-y)$

1. Es ist

$$\Delta_F(x-y) = \Delta_F(y-x) . \quad (4.225)$$

Es handelt sich also um eine gerade Distribution.

2. Δ_F is eine Greensfunktion der Klein-Gordon-Gleichung, denn es gilt

$$(\square_x + m^2)\Delta_F(x-y) = -\delta^{(4)}(x-y) . \quad (4.226)$$

Die $i\epsilon$ -Vorschrift entspricht einer bestimmten Randbedingung, nämlich: Positive Frequenzen $+\omega$ breiten sich vorwärts in der Zeit aus, negative Frequenzen $-\omega$ breiten sich rückwärts in der Zeit aus. Deswegen heißt Δ_F auch kausale Greensfunktion.

3. Das hermitesche Spin-0-Feld $\phi = \phi^\dagger$ hat denselben Feynman-Propagator:

$$\langle 0|T[\phi(x), \phi(y)]|0\rangle = i\Delta_F(x-y). \quad (4.227)$$

4. Die Distribution $\Delta_F(x-y)$ ist Poincaré-invariant:

$$x' = \Lambda x + b, \quad y' = \Lambda y + b \quad \Rightarrow \quad \Delta_F(x' - y') = \Delta_F(x - y). \quad (4.228)$$

4.7 Der Fermionpropagator

Es gilt analog zum Klein-Gordon-Feld (siehe Glg. (4.104), wobei hier der Antikommutator verwendet wird)

$$\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)\} = (i\partial + m)_{\alpha\beta} i\Delta(x-y), \quad (4.229)$$

denn

$$\begin{aligned} \{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)\} &= \int d\tilde{k} \int d\tilde{k}' \sum_{s,s'} \{ \exp(ikx) v_{s_\alpha}(\vec{k}) b_s^\dagger(\vec{k}) + \exp(-ikx) u_{s_\alpha}(\vec{k}) a_s(\vec{k}), \\ &\quad \exp(-ik'y) \bar{v}_{s'_\beta}(\vec{k}') b_{s'}(\vec{k}') + \exp(ik'y) \bar{u}_{s'_\beta}(\vec{k}') a_{s'}^\dagger(\vec{k}') \} \\ &= \int d\tilde{k} \sum_s \left(u_{s_\alpha}(\vec{k}) \bar{u}_{s_\beta}(\vec{k}) \exp(-ik(x-y)) + v_{s_\alpha}(\vec{k}) \bar{v}_{s_\beta}(\vec{k}) \exp(ik(x-y)) \right) \\ &= \int d\tilde{k} \sum_s \left((\not{k} + m)_{\alpha\beta} \exp(-ik(x-y)) + (\not{k} - m)_{\alpha\beta} \exp(ik(x-y)) \right) \\ &= (i\partial_x + m)_{\alpha\beta} \int d\tilde{k} (\exp(-ik(x-y)) - \exp(+ik(x-y))) \\ &= (i\partial_x + m)_{\alpha\beta} (i\Delta(x-y)). \end{aligned} \quad (4.230)$$

Der Feynman-Propagator ist gegeben durch das zeitgeordnete Produkt (für Fermionen!)

$$S_{F_{\alpha\beta}}(x-y) \equiv \langle 0|T \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) |0\rangle = \langle 0|\theta(x^0 - y^0) \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) - \theta(y^0 - x^0) \bar{\psi}_\beta(y) \psi_\alpha(x) |0\rangle. \quad (4.231)$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} (i\partial_x + m) i\Delta_F(x-y) \\ = S_F(x-y) &= (i\partial_x + m) \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik(x-y)} \\ &= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik(x-y)} \\ &\stackrel{k^2 = k^2}{=} i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{k} - m + i\epsilon} e^{-ik(x-y)}. \end{aligned} \quad (4.232)$$

Damit ist

$$(i\partial_x - m) S_F(x-y) = i\delta^{(4)}(x-y). \quad (4.233)$$

Der Fermionpropagator ist also Greensfunktion zur freien Diracgleichung. Und es gilt die Kausalität für $\{\psi, \bar{\psi}\}$.

4.8 Quantisierung von Spin-1-Feldern (Vektorfeldern)

Wir wollen nun Vektorfelder quantisieren. Aus der Elektrodynamik ist der klassische Limes bekannt. Dieser ist durch die Maxwell-Gleichungen gegeben. Allerdings ist die Quantisierung von Feldern, die durch die Maxwell-Gleichungen definiert sind, schwierig. Das Problem kommt von den Freiheitsgraden. Das Viererpotential

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} \quad (4.234)$$

hat vier Freiheitsgrade. Das Photon hat aber nur zwei Freiheitsgrade. Es muss also dafür gesorgt werden, dass die nicht-dynamischen Freiheitsgrade, die nicht zum Photon beitragen, nicht quantisiert werden.

Wir werden zunächst ein massives Vektorfeld quantisieren. Dieses besitzt drei Freiheitsgrade. Beispiele für massive Vektorfelder sind die W^\pm - und Z -Bosonen der schwachen Wechselwirkung. Weitere Beispiele sind die Spin-1 Mesonen ρ, ω, ϕ , die aus Quarks aufgebaut sind. Der Grund für die Diskrepanz in der Anzahl der Freiheitsgrade ist eine innere Symmetrie (Eichinvarianz).

4.8.1 Massives Vektorfeld

Das Feld A^μ besitzt vier Freiheitsgrade, das massive Vektorfeld aber nur drei. Wir benötigen also eine Nebenbedingung, um die Anzahl der Freiheitsgrade zu verringern.

Wir stellen zunächst die Feldgleichungen auf, indem wir uns an die Maxwell Gleichungen anlehnen, welche sich kovariant aufschreiben lassen. Wir haben also

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0, \quad (4.235)$$

mit dem Feldstärkentensor

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (4.236)$$

Diese Gleichung nennt man *Proca-Gleichung*. Anwenden der Vierer-Divergenz auf die Gleichung liefert

$$\partial_\nu (\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu) = \partial_\nu \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + m^2 \partial_\nu A^\nu = 0. \quad (4.237)$$

Der erste Ausdruck liefert null, da hier ein symmetrischer Tensor mit einem antisymmetrischen Tensor kombiniert wird. Dies sieht man auch durch explizites Nachrechnen:

$$\begin{aligned} \partial_\nu \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) &= \partial_\nu \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\nu \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = \partial_\mu \partial_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial_\nu \partial_\mu \partial^\nu A^\mu \\ &= \partial_\nu \partial_\mu \partial^\nu A^\mu - \partial_\nu \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = 0. \end{aligned} \quad (4.238)$$

Dabei wurden im ersten Summanden die Summationsindizes μ und ν vertauscht, was zulässig ist, da über alle Indizes summiert wird. Die partiellen Ableitungen ∂_μ und ∂_ν können nach dem Schwarzschen Satz dann wieder vertauscht werden. Somit gilt $m^2 \partial_\nu A^\nu = 0$. Unter der Annahme, dass die Masse ungleich null ist, folgt dann die Nebenbedingung

$$\partial_\nu A^\nu = 0. \quad (4.239)$$

Einsetzen in (4.236) liefert

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \square A^\nu \quad (4.240)$$

und somit

$$(\square + m^2)A^\nu(x) = 0 \quad \text{mit} \quad \partial_\nu A^\nu = 0. \quad (4.241)$$

Wir haben also die Klein-Gordon-Gleichung für jede Komponente von A^ν gefunden. Durch die Nebenbedingung $\partial_\nu A^\nu$ reduziert sich die Anzahl der Freiheitsgrade auf drei. Die zu (4.241) gehörige Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu, \quad (4.242)$$

wobei A_μ ein reelles Vektorfeld darstellt. Als Ansatz einer Lösung von (4.241) wählen wir ebene Wellen der Form

$$A_\nu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \exp(-ikx) \epsilon_\nu^{(\lambda)}(\vec{k}) \alpha(\vec{k}) + \text{h.c.}, \quad \text{mit} \quad \omega_k = k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}. \quad (4.243)$$

Bei $\epsilon_\nu^{(\lambda)}$ handelt es sich um den Polarisationsvektor. Aus der Nebenbedingung ergibt sich

$$k^\nu \epsilon_\nu^{(\lambda)}(\vec{k}) = 0. \quad (4.244)$$

Somit gibt es also drei linear unabhängige $\epsilon_\nu^{(\lambda)}$. Im Ruhesystem des Teilchens haben wir $k^\nu = (m, \vec{0})^T$. Daraus folgt dann

$$\epsilon_0^{(\lambda)} = 0, \quad \text{damit} \quad k^\nu \epsilon_\nu(\vec{k}) = 0. \quad (4.245)$$

Dies ist erfüllt durch die Wahl

$$\epsilon_\nu^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_\nu^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \epsilon_\nu^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.246)$$

Es handelt sich um die kartesische Standardbasis. Alternativ kann man die folgende komplexe Basis wählen:

$$\epsilon_\nu^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \epsilon_\nu^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.247)$$

Die ersten beiden Vektoren beschreiben die zirkuläre Polarisation. Es gilt für beliebige Bezugssysteme

$$\epsilon_\mu^{(\lambda)} (\epsilon^{*\lambda})^{(\lambda')\mu} = \epsilon^{(\lambda)} \cdot \epsilon^{(\lambda')*} = -\delta^{\lambda\lambda'} \quad \text{für} \quad \lambda, \lambda' = 1, 2, 3. \quad (4.248)$$

Und die Vollständigkeitsrelation lautet

$$\sum_\lambda \epsilon_\mu^{(\lambda)} \epsilon_\nu^{*(\lambda)} = - \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m^2} \right). \quad (4.249)$$

Für die allgemeine Lösung in quantisierter Form haben wir

$$A_\mu(x) = \int d\tilde{k} \sum_{\lambda=1,2,3} \left(\exp(-ikx) \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{k}) a^{(\lambda)}(\vec{k}) + \exp(ikx) \epsilon_\mu^{*(\lambda)}(\vec{k}) a^{\dagger(\lambda)}(\vec{k}) \right). \quad (4.250)$$

Der Operator $a^{\dagger(\lambda)}(\vec{k})$ erzeugt ein Teilchen mit Impuls \vec{k} und Polarisation λ . Es gelten folgende Kommutatorrelationen

$$[A_\nu(x), A_\nu(y)] = 0 \quad \text{für } (x - y)^2 < 0. \quad (4.251)$$

Und für die Operatoren

$$[a^{(\lambda)}(\vec{k}), a^{\dagger(\lambda')}(\vec{k}')] = \delta_{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 2\omega_k \delta(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (4.252)$$

4.8.2 Masseloses Vektorfeld (Photonfeld)

Eichfreiheit

Die Maxwell-Gleichungen lauten

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad \text{inhomogene Maxwellgleichungen} \quad (4.253)$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad \text{homogene Maxwellgleichungen,} \quad (4.254)$$

mit dem dualen Feldstärkentensor

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}. \quad (4.255)$$

Der Feldstärkentensor ausgedrückt durch die Potentiale lautet

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (4.256)$$

Damit ist die Gleichung (4.254) automatisch erfüllt (nachrechnen!). Das Vektorpotential ist hierbei aber noch nicht eindeutig festgelegt. Wir haben also eine Eichfreiheit. So bleibt $F_{\mu\nu}$ unverändert unter der Ersetzung

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x), \quad (4.257)$$

wobei $\Lambda(x)$ ein beliebiges Skalarfeld ist. Wir können die

$$\underline{\text{Lorentz-Eichung:}} \quad \partial_\mu A^\mu = 0 \quad (4.258)$$

wählen. Denn, falls

$$\partial_\mu A^\mu = G(x) \neq 0, \quad (4.259)$$

dann wähle $\Lambda(x)$ so, dass

$$\square \Lambda(x) = -G(x). \quad (4.260)$$

Für das neue Feld $A'_\mu(x)$ gilt dann (4.258). In der Lorentz-Eichung ist die Maxwellgleichung (4.253) äquivalent zu

$$\square A^\nu = j^\nu \quad (4.261)$$

bzw. im freien Fall ($j = 0$)

$$\square A^\nu = 0 . \quad (4.262)$$

Als weitere Freiheit in der Wahl der Eichung können noch solche Λ gewählt werden, für die gilt

$$\square \Lambda(x) = 0 . \quad (4.263)$$

Neben der Lorentz-Eichung gibt es noch die Coulomb-Eichung. Hier wird gefordert

$$\text{Coulomb-Eichung: } \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 . \quad (4.264)$$

Diese Eichung ist allerdings nicht kovariant. Ein weiteres Beispiel einer Eichung ist die axiale Eichung, für die gilt

$$\text{Axiale Eichung: } A_z = 0 . \quad (4.265)$$

Im folgenden wird die Lorentz-Eichung verwendet werden.

Lagrange Formalismus

Als einfachsten Ansatz für die Lagrangedichte wählen wir

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} . \quad (4.266)$$

Ferner fordern wir die Kommutatorrelation

$$[A_\mu(x), \Pi_\nu(y)]_{x_0=y_0} \stackrel{!}{=} -ig_{\mu\nu} \delta(\vec{x} - \vec{y}) . \quad (4.267)$$

Das Minuszeichen wird später erklärt werden. Der kanonisch konjugierte Impuls ist gegeben durch

$$\Pi^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = -\partial^0 A^\mu + \partial^\mu A^0 . \quad (4.268)$$

Wie wir sehen, verschwindet die Nullkomponente Π^0 . Wir können also nicht mit dieser Lagrangedichte arbeiten. Wir betrachten daher nun die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^2 - \frac{1}{2} \lambda (\partial_\mu A^\mu)^2 . \quad (4.269)$$

Die dazu gehörigen Feldgleichungen lauten

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \lambda \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0 \quad \leftrightarrow \quad \square A^\nu - (1 - \lambda) \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0 . \quad (4.270)$$

Die Gleichungen ähneln der Klein-Gordon-Gleichung. Der kanonisch konjugierte Impuls ergibt sich zu

$$\Pi^\mu = -\partial^0 A^\mu + \partial^\mu A^0 - \lambda g^{0\mu} (\partial_\nu A^\nu) \Rightarrow \Pi^0 = -\lambda \partial_\nu A^\nu \neq 0 \text{ falls } \lambda \neq 0 \text{ und } \partial_\nu A^\nu \neq 0 . \quad (4.271)$$

Im folgenden wird $\lambda = 1$ gesetzt.

Wir fordern nun nicht die Lorentz-Eichung $\partial_\mu A^\mu = 0$, sondern $\partial_\mu A^\mu |\psi\rangle = 0$, wobei $|\psi\rangle$ ein physikalischer Zustand ist. Der Erwartungswert der geforderten Kommutatorrelation (4.267) ist

$$\langle \psi | [A_\mu(x), \Pi_\nu(y)]_{x_0=y_0} | \psi \rangle = -ig_{\mu\nu} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \langle \psi | \psi \rangle . \quad (4.272)$$

Das allerdings ist inkonsistent mit der Forderung $\partial_\nu A^\nu = 0$. Denn wegen $\Pi^0 = -\partial_\nu A^\nu$ ist die linke Seite von (4.272) identisch 0 (für $\nu = 0$).

Wir fordern jetzt

$$\text{Gupta-Bleuler-Bedingung: } \partial_\mu A^{(+)\mu} |\psi\rangle = 0 , \quad (4.273)$$

wobei

$$A_\mu = A_\mu^{(+)} + A_\mu^{(-)} \quad (4.274)$$

mit

$$A_\mu^{(+)}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \sum_{\lambda=0}^3 \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{k}) a^{(\lambda)}(\vec{k}) \exp(-ikx) . \quad (4.275)$$

Es handelt sich hier also um den Anteil mit den positiven Frequenzen. Dabei verwenden wir die Notation, dass eine nach rechts laufende ebene Welle durch $\exp(-ikx)$ beschrieben wird. Der Anteil

$$A_\mu^{(-)}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \sum_{\lambda=0}^3 \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{k}) a^{\dagger(\lambda)}(\vec{k}) \exp(ikx) \quad (4.276)$$

beinhaltet die negativen Frequenzen. Die Summation wird über die vier linear unabhängigen Polarisierungen ausgeführt. Für diese gilt

$$\text{Orthogonalität: } \epsilon_\mu(\lambda) \epsilon^\mu(\lambda') = -\zeta^{(\lambda)} \delta^{\lambda\lambda'} \quad \text{mit } \zeta^{(0)} = -1, \zeta^{(1)} = \zeta^{(2)} = \zeta^{(3)} = 1 \quad (4.277)$$

$$\text{Vollständigkeit: } \sum_{\lambda=0}^3 \zeta^{(\lambda)} \epsilon_\mu^{(\lambda)} \epsilon_\nu^{(\lambda)} = -g_{\mu\nu} . \quad (4.278)$$

Wir gehen nun in ein bestimmtes Bezugssystem mit

$$\epsilon^{(0)\mu} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \epsilon^{(\lambda)\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{\epsilon}_\lambda \end{pmatrix} \quad \text{für } \lambda = 1, 2, 3 . \quad (4.279)$$

Im Fall, dass nur die nullte Komponente, $\epsilon^{(0)\mu}$ vorhanden ist, spricht man von skalarer Polarisation. Ferner ist

$$\vec{\epsilon}_3 = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} . \quad (4.280)$$

Die beschreibt eine longitudinale Polarisation.

Aus der Forderung (4.273), die äquivalent ist zu

$$\langle \psi | \partial_\mu A^{(-)\mu} = 0 \quad (4.281)$$

folgt

$$\langle \psi | \partial_\mu A^\mu | \psi \rangle = 0 . \quad (4.282)$$

Dies ist die Lorentz-Bedingung für den Mittelwert.

Einsetzen der Entwicklung nach ebenen Wellen in

$$[A_\mu(x), \Pi_\nu(y)]_{x_0=y_0} = -ig_{\mu\nu} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (4.283)$$

liefert

$$[a^{(\lambda)}(\vec{k}), a^{\dagger(\lambda')}(\vec{k}')] = \zeta^{(\lambda)} \delta^{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 2\omega \delta(\vec{k} - \vec{k}') . \quad (4.284)$$

Für $\lambda = 0$ tauschen Erzeuger und Vernichter die Rollen, da $\zeta^{(0)} = -1$. Wie gehabt gilt

$$[a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0 . \quad (4.285)$$

Wir interpretieren $a^{(\lambda)}(\vec{k})$ als Vernichtungsoperator und $a^{(\lambda)\dagger}(\vec{k})$ als Erzeugungsoperator. Die skalare Polarisation wird durch $\lambda = 0$ beschrieben, die longitudinale durch $\lambda = 3$ und die transversalen durch $\lambda = 1, 2$. Wir haben

$$\text{für den Vakuumzustand: } a^{(\lambda)}(\vec{k})|0\rangle = 0 \quad (4.286)$$

$$\text{den Ein-Photonzustand: } a^{(\lambda)\dagger}(\vec{k})|0\rangle = |\vec{k}, \lambda\rangle . \quad (4.287)$$

(Hier wurde wieder der Einfachheit halber das Verschmieren mit der Funktion $f(\vec{k})$ weggelassen, das aber für die korrekte Normierung notwendig ist, also eigentlich $\int d\vec{k} f(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k})|0\rangle = |\vec{k}, \lambda\rangle$.) Im folgenden soll diese Interpretation gerechtfertigt werden. Wir wenden hierfür den Hamiltonoperator auf einen Zustand $|\vec{k}', \lambda'\rangle$ an,

$$\begin{aligned} : H : |\vec{k}', \lambda'\rangle &= \int d\vec{k} \omega_k \sum_{\lambda=0}^3 \zeta^{(\lambda)} a^{\dagger(\lambda)}(\vec{k}) a^{(\lambda)}(\vec{k}) a^{(\lambda')\dagger}(\vec{k}') |0\rangle \\ &= \int d\vec{k} \omega_k \sum_{\lambda=0}^3 \zeta^{(\lambda)} a^{\dagger(\lambda)}(\vec{k}) (2\pi)^3 2\omega_k \zeta^{(\lambda)} \delta^{\lambda\lambda'} \delta(\vec{k} - \vec{k}') |0\rangle = \omega_{k'} |\vec{k}', \lambda'\rangle . \end{aligned} \quad (4.288)$$

Wir haben für das masselose Photon

$$\omega_k = |\vec{k}| . \quad (4.289)$$

Damit ist $\omega_k > 0$ und der Hamiltonoperator also positiv definit. Allerdings gibt es Zustände mit negativer Norm. Denn

$$\langle \vec{k}, \lambda | \vec{k}, \lambda \rangle = \langle 0 | a^{(\lambda)}(\vec{k}) a^{\dagger(\lambda)}(\vec{k}) | 0 \rangle = \zeta^{(\lambda)} < 0 \quad \text{für } \lambda = 0 . \quad (4.290)$$

Skalare Photonen haben also die Norm -1. Es folgt aber aus

$$k_\mu \sum_{\lambda=0}^3 \epsilon^{\mu(\lambda)} a^{(\lambda)} = \sum_{\lambda=0,3} k_\mu \epsilon^{\mu(\lambda)} a^{(\lambda)} \quad (4.291)$$

mit der Forderung

$$\partial_\mu A^{(+)\mu} | \psi \rangle = 0 , \quad (4.292)$$

dass

$$\left(a^{(3)}(\vec{k}) - a^{(0)}(\vec{k}) \right) |\psi\rangle = 0 . \quad (4.293)$$

Dies ist eine Bedingung an die skalaren und longitudinalen Photonen. Die Gupta-Bleuler Bedingung stellt keine Bedingungen an die transversalen Photonen. Es gilt insbesondere

$$\langle \psi | a^{\dagger(3)} a^{(3)} - a^{\dagger(0)} a^{(0)} | 0 \rangle = \langle \psi | a^{\dagger(3)} (a^{(3)} - a^{(0)}) | \psi \rangle = 0 . \quad (4.294)$$

Dies folgt aus $\left(a^{(3)}(\vec{k}) - a^{(0)}(\vec{k}) \right) |\psi\rangle = 0$. Und für den Erwartungswert der Energie ergibt sich

$$\langle \psi | H | \psi \rangle = \left\langle \psi \left| \int d\tilde{k} \sum_{\lambda=0}^3 \omega_k \zeta^{(\lambda)} a^{(\lambda)\dagger} a^{(\lambda)} \right| \psi \right\rangle = \left\langle \psi \left| \int d\tilde{k} \sum_{\lambda=1}^2 \omega_k a^{(\lambda)\dagger} a^{(\lambda)} \right| \psi \right\rangle . \quad (4.295)$$

Es tragen also nur die transversalen Anteile bei. Durch die Gupta-Bleuler-Bedingung wird erreicht, dass in den physikalischen Größen nur die physikalischen Freiheitsgrade beitragen. Die kann man analog auch für andere physikalische Größen zeigen. Aus $\partial_\mu A^{(+)\mu} |\psi\rangle = 0$ folgt, dass nur transversale Photonen zu beobachtbaren Größen beitragen.

Zusammenfassung

- Es gibt neben den beiden physikalischen zwei zusätzliche Freiheitsgrade (longitudinal und skalar).
- Einer davon wird durch die Gupta-Bleuler-Bedingung untersagt.
- Der andere entspricht einer zusätzlichen Eichfreiheit, die man trotz der Lorentz-Bedingung noch hat, nämlich $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda$ mit $\square \Lambda = 0$.
- Bei Streuprozessen spielen die skalaren und longitudinalen Photonen eine wichtige Rolle. Für Eichtheorien gilt allgemein, dass die Forderung nach Kovarianz zu unphysikalischen Zuständen (Zuständen mit negativer Norm) mit sogenannten Geistteilchen führt. In der Quantenelektrodynamik (QED) ist die Lösung trivial, da hier die Geister entkoppeln. In der Quantenchromodynamik (QCD) und der elektroschwachen Wechselwirkung treten diese Zustände in der Rechnung auf. Allerdings gibt es für einlaufende Wellen ohne Geister auch nur auslaufende Wellen ohne Geister, so dass die Wahrscheinlichkeitsinterpretation gewährleistet ist.

4.9 Der Feynman-Propagator für das Photonfeld

Für den Feynman-Propagator des Photonfeldes betrachten wir den Kommutator

$$[A^\mu(x), A^\nu(y)] \equiv iD^{\mu\nu}(x-y) . \quad (4.296)$$

Der Feynman-Propagator des Photonfeldes ist dann gegeben durch

$$D_F^{\mu\nu}(x-y) = -g^{\mu\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \exp(-ik(x-y)) = \langle 0 | T A^\mu(x) A^\nu(y) | 0 \rangle . \quad (4.297)$$

Dies findet man, indem das Photonfeld Glg. (4.176) eingesetzt wird und die Kommutatorrelationen Glgen. (4.284), (4.285) sowie die Vollständigkeitsrelation(4.278) verwendet werden.

Wir wollen den Propagator analog zum skalaren Feld interpretieren. Allerdings werden hier vier Arten von Photonen ausgetauscht, zwei transversale, ein longitudinales und ein skalares Photon.

Wir betrachten den Feynmanpropagator im Impulsraum in dem Bezugssystem mit den Polarisationsvektoren

$$n^\mu = \epsilon_0^\mu(\vec{k}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \epsilon_3^\mu = \frac{k^\mu - (n \cdot k)n^\mu}{\sqrt{(n \cdot k)^2 - k^2}}. \quad (4.298)$$

Der Feynmanpropagator im Impulsraum ist gegeben durch

$$\begin{aligned} D_F^{\mu\nu} &= -\frac{g^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \stackrel{(4.278)}{=} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \sum_{\lambda=0}^3 \zeta^{(\lambda)} \epsilon^{(\lambda)\mu} \epsilon^{(\lambda)\nu} \\ &= \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \left[\sum_{\lambda=1}^2 \zeta^{(\lambda)} \epsilon^{(\lambda)\mu} \epsilon^{(\lambda)\nu} + \frac{(k^\mu - (n \cdot k)n^\mu)(k^\nu - (n \cdot k)n^\nu)}{(n \cdot k)^2 - k^2} - n^\mu n^\nu \right] \\ &= \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \left[\sum_{\lambda=1}^2 \zeta^{(\lambda)} \epsilon^{(\lambda)\mu} \epsilon^{(\lambda)\nu} + \underbrace{\frac{k^2 n^\mu n^\nu}{(n \cdot k)^2 - k^2}}_{D_{F,C}^{\mu\nu}} + \underbrace{\frac{k^\mu k^\nu - k \cdot n (k^\mu n^\nu + k^\nu n^\mu)}{(n \cdot k)^2 - k^2}}_{D_{F,R}^{\mu\nu}} \right]. \quad (4.299) \end{aligned}$$

Der erste Term beschreibt den Austausch von transversalen Photonen. Damit haben wir also

$$D_F^{\mu\nu} = D_{F,T}^{\mu\nu} + D_{F,C}^{\mu\nu} + D_{F,R}^{\mu\nu}. \quad (4.300)$$

Der zweite Term ist im Ortsraum

$$D_{F,C}^{\mu\nu} = g^{\mu 0} g^{\nu 0} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{|\vec{k}|^2} \exp(-ikx) = g^{\mu 0} g^{\nu 0} \frac{1}{4\pi|\vec{x}|} \delta(x_0). \quad (4.301)$$

Dies entspricht einem instantanten Coulomb-Potential. Der dritte Term $D_{F,R}^{\mu\nu}$ verschwindet, da das Photon an einen erhaltenen Strom koppelt. Das heißt, es gilt $\partial_\mu j^\mu = 0$ und damit im Impulsraum $k_\mu j^\mu = 0$.

Kapitel 5

Wechselwirkung, Störungstheorie

5.1 Freie Theorie

Wir haben uns bisher mit der freien Theorie beschäftigt. Diese enthält in der Lagrangedichte nur quadratische Terme in den Feldern. Mithilfe der Euler-Lagrange Gleichung ergeben sich daraus homogene, lineare Feldgleichungen. Diese sind exakt lösbar durch Fourier-Entwicklung. Dies führt dann zur Berechnung des Propagators. So wird ein reelles skalares Feld durch die Klein-Gordon-Gleichung beschrieben. Die Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2. \quad (5.1)$$

Anwenden der Euler-Lagrange Gleichung führt auf die Feldgleichung

$$(\square + m^2)\phi = 0. \quad (5.2)$$

Der Feynman-Propagator ist gegeben durch

$$D_F(x - y) = \langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \exp(-ik(x - y)). \quad (5.3)$$

Das ist sozusagen die Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür, dass sich ein Teilchen vom Ort \vec{x} zum Ort \vec{y} ausbreitet. Jedoch sind Felder ohne Wechselwirkung nicht nachweisbar. Deshalb werden wir im folgenden die Wechselwirkung zwischen Feldern betrachten. Allerdings ist bisher eine exakte Lösung nicht möglich bzw. nur in Gitterfeldtheorie unter bestimmten Annahmen und für bestimmte Lagrangedichten. Es werden daher die Wechselwirkungsphänomene mithilfe der Störungstheorie auf eine Beschreibung durch freie Felder zurückgeführt.

5.2 Wechselwirkungsterme

Die Lagrangedichte wird aufgeteilt in eine freie Lagrangedichte \mathcal{L}_0 und eine Lagrangedichte \mathcal{L}_W , die die Wechselwirkung beschreibt,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_W. \quad (5.4)$$

Die freie Lagrangedichte ist quadratisch in den Feldern, die Wechselwirkungslagrangedichte enthält Terme mit mehr als zwei Feldern.

Wir betrachten als Beispiel die Elektrodynamik. Klassisch wechselwirken elektromagnetische Felder mit dem elektrischen Strom,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu . \quad (5.5)$$

Der Strom j^ν wird z.B. durch Elektronen hervorgerufen. Damit wird ein Wechselwirkungsterm zwischen Photonen (A_μ) und Elektronen (ψ) konstruiert. Nun muss aber \mathcal{L} ein Lorentz- bzw. Dirac-Skalar sein. Mögliche Terme sind z.B. $\bar{\psi}\psi$, $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ etc. Wir führen also den Wechselwirkungsterm

$$\mathcal{L}_W = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \quad (5.6)$$

ein, wobei e eine Kopplungskonstante ist und die Stärke der Wechselwirkung bestimmt. Damit ist die Lagrangedichte der Quantenelektrodynamik (QED) gegeben durch

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu + \text{Eichfixierung} . \quad (5.7)$$

Der erste Term ist der kinetische Term für das Photon, der zweite Term der kinetische Term für das Elektron (Dirac-Feld). Die zu \mathcal{L}_{QED} gehörigen Euler-Lagrange Gleichungen lauten

$$(i\cancel{\partial} - e\cancel{A} - m)\psi(x) = 0 \quad (5.8)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = e\bar{\psi}\gamma^\nu\psi \equiv j^\nu . \quad (5.9)$$

Die zweite Gleichung hat die Form, die bereits aus der Elektrodynamik bekannt ist. Damit können wir

$$j^\nu = e\bar{\psi}\gamma^\nu\psi \quad (5.10)$$

als Noetherstrom interpretieren. Es handelt sich hierbei um den erhaltenen Strom für eine Dirac-Theorie. Die beiden Gleichungen sind gekoppelte nichtlineare Feldgleichungen! Es stellt sich die Frage, wie man diese lösen kann.

Es sei bemerkt, dass \mathcal{L}_{QED} invariant ist unter einer lokalen Eichtransformation. So kann man $\psi(x)$ ersetzen durch

$$\psi(x) \rightarrow \exp(i\alpha(x))\psi(x) , \quad \text{mit } \alpha(x) \in \mathbb{R} , \text{ und gleichzeitig} \quad (5.11)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x) \quad (5.12)$$

Durch diese Eichtransformation ist die Quantenelektrodynamik charakterisiert.

Weitere Beispiele für Wechselwirkungen sind

- ϕ^4 -Theorie:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \quad (5.13)$$

- Yukawa-Theorie (Wechselwirkung zwischen einem Skalar und Fermionen):

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\phi^{\text{frei}} + \mathcal{L}_\psi^{\text{frei}} - g\bar{\psi}\psi\phi \quad (5.14)$$

- Skalare Elektrodynamik

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + [(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi]^*(\partial^\mu + ieA^\mu)\phi - m^2\phi^*\phi \quad (5.15)$$

Wir haben bisher nur kubische und quartische Terme in der Wechselwirkungslagrangedichte betrachtet. Es stellt sich die Frage, ob es auch höhere Potenzen wie etwa ϕ^6 gibt. Die Antwort ist, dass Produkte aus Feldern in der Lagrangedichte, die eine Massendimension > 4 haben, nicht renormierbar sind. Sie führen zu Observablen, die von einem Cut-Off abhängen. Hierzu äquivalent ist, dass bei Wechselwirkungstermen die Massendimension der Kopplungskonstanten immer ≥ 0 sein muss. Wir hatten folgende Massendimensionen

$$[\phi] = 1, [A_\mu] = 1, [\psi] = \frac{3}{2}, [x] = -1, [\partial_\mu] = 1, \dots \quad (5.16)$$

5.3 Wechselwirkungsbild

Der Hamiltonoperator kann genauso wie die Lagrangedichte als Summe aus einem freien Operator H_0 und einem Operator H_W , der die Wechselwirkung beschreibt, geschrieben werden, d.h.

$$H = H_0 + H_W . \quad (5.17)$$

Der Vergleich zwischen Schrödinger, Heisenberg- und Wechselwirkungsbild ist in Tabelle 5.1 gegeben.

Bild	Zustände	Operatoren
Schrödingerbild	$i\partial_t \psi\rangle^S = H \psi\rangle^S$	$i\partial_t O^S = 0$
Heisenbergbild	$i\partial_t \psi\rangle^H = 0$	$i\partial_t O^H = [O^H, H]$
Wechselwirkungsbild	$i\partial_t \psi\rangle^W = H_W \psi\rangle^W$	$i\partial_t O^W = [O^W, H_0]$

Tabelle 5.1: Vergleich Schrödingerbild, Heisenbergbild und Wechselwirkungsbild.

Dies gilt insbesondere für $O = \pi, \phi, A_\mu, \dots$. Die Operatoren erfüllen im Wechselwirkungsbild also die Bewegungsgleichung der freien Theorie. Daraus folgt dann, dass die Feldoperatoren wie zuvor eine Fourier-Zerlegung haben. So gilt etwa für den Feldoperator des Skalarfelds im Wechselwirkungsbild

$$\phi^W(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[\exp(ikx) a^\dagger(\vec{k}) + \exp(-ikx) a(\vec{k}) \right] \quad \text{mit} \quad \omega_k = k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} . \quad (5.18)$$

Wir werden im folgenden immer im Wechselwirkungsbild arbeiten und den Index W weglassen.

5.4 Die Zeitentwicklung der Zustände - S -Matrix

Wir müssen die wechselwirkende Theorie näherungsweise im Rahmen der Störungstheorie lösen. Diese ist als Potenzreihe in der Kopplungskonstanten gegeben. Die Vermutung (Hoffnung, Erfahrung!) ist, dass die Reihe konvergiert, so dass eine Approximation durch die führenden Terme in der Entwicklung möglich ist. Betrachten wir als Beispiel das anomale magnetische Moment a des Elektrons, das berechnet wurde zu

$$a \equiv \frac{g_e - 2}{2} = \frac{\alpha}{2\pi} - 0.32... \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + 1.18... \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 - 1.51... \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 = 0.0011596521866 \quad (5.19)$$

Hier ist α die Kopplungskonstante $\alpha = e^2/(4\pi)$. Experimentell findet man $a = 0.0011596521884(43)$.

Wir wollen Streuexperimente beschreiben. Die Wechselwirkung soll hierfür nur über einen endlichen Zeitraum $[T_1, T_2]$ wirken. Die asymptotischen Zustände $|\phi(t \rightarrow -\infty)\rangle$ und $|\phi(t \rightarrow +\infty)\rangle$ erfüllen die freie Bewegungsgleichung mit $H_W = 0$, also

$$|\phi(-\infty)\rangle \longrightarrow \text{Wechselwirkungsgebiet} \longrightarrow |\phi(+\infty)\rangle. \quad (5.20)$$

Die Wechselwirkung findet hierbei nur zwischen T_1 und T_2 statt. Wir werden also keine Wechselwirkungszustände beschreiben. Wenn $|n\rangle$ die Eigenzustände von H_0 sind, so lässt sich schreiben

$$|\phi(-\infty)\rangle = \sum_n a_n |n\rangle \quad \text{mit} \quad \sum_n |a_n|^2 = 1 \quad (5.21)$$

$$|\phi(+\infty)\rangle = \sum_n b_n |n\rangle \quad \text{mit} \quad \sum_n |b_n|^2 = 1. \quad (5.22)$$

Das heißt, der Zustand wird durch die Wechselwirkung geändert, aber seine Norm bleibt erhalten. Dies entspricht einer Drehung im Zustandsraum. Es gibt also eine unitäre Transformation S mit

$$|\phi(+\infty)\rangle = S|\phi(-\infty)\rangle. \quad (5.23)$$

Im folgenden soll die sogenannte S -Matrix S bestimmt werden.

5.5 Bestimmung der S -Matrix

Unser Ausgangspunkt ist die Schrödingergleichung

$$i\partial_t |\phi(t)\rangle = H_W |\phi(t)\rangle \quad \text{mit der Anfangsbedingung} \quad |\phi(-\infty)\rangle = |i\rangle. \quad (5.24)$$

Die Differentialgleichung lässt sich in eine Integralgleichung umschreiben, aus der eine iterative Lösung bestimmt wird, indem immer wieder $|\phi(t)\rangle$ mit $t = t_1, t_2, \dots$ in die Gleichung eingesetzt wird. Also

$$\begin{aligned} |\phi(t)\rangle &= |i\rangle + (-i) \int_{-\infty}^t dt_1 H_W(t_1) |\phi(t_1)\rangle = |i\rangle + (-i) \int_{-\infty}^t dt_1 H_W(t_1) |i\rangle \\ &\quad + (-i)^2 \int_{-\infty}^t dt_1 H_W(t_1) \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 H_W(t_2) |\phi(t_2)\rangle \\ &= |i\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n H_W(t_1) H_W(t_2) \dots H_W(t_n) |i\rangle. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Für $t \rightarrow \infty$ können wir daraus die S -Matrix bestimmen. Zunächst bringen wir den obigen Ausdruck für $t \rightarrow \infty$ in kompaktere Form, indem wir verwenden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 H_W(t_1) H_W(t_2) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 T(H_W(t_1) H_W(t_2)) , \quad (5.26)$$

wobei der Zeitordnungoperator T , definiert über

$$T(H_W(t_1) H_W(t_2)) = \begin{cases} H_W(t_1) H_W(t_2) & t_2 \leq t_1 \\ H_W(t_2) H_W(t_1) & t_2 \geq t_1 \end{cases} , \quad (5.27)$$

verwendet wurde. Somit erhält man

$$|\phi(\infty)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n T(H_W(t_1) \dots H_W(t_n)) |i\rangle . \quad (5.28)$$

Damit erhalten wir für die S -Matrix den Ausdruck

$$S = T \left[\exp \left(-i \int_{-\infty}^{\infty} dt H_W(t) \right) \right] = T \left[\exp \left(i \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \mathcal{L}_W(x) \right) \right] . \quad (5.29)$$

Und die Übergangswahrscheinlichkeiten sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \langle f|S|i\rangle &= \langle f|\phi(+\infty)\rangle \\ &= \left\langle f \left| \left(1 + i \int d^4x T \mathcal{L}_W(x) + \frac{i^2}{2!} T \int d^4x \int d^4y T \mathcal{L}_W(x) \mathcal{L}_W(y) + \dots \right) \right| i \right\rangle \end{aligned} \quad (5.30)$$

Zum Beispiel haben wir in der Quantenelektrodynamik eine Lagrangedichte der Form $\mathcal{L}_W \sim e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$, die die Wechselwirkung beschreibt. Zu berechnen ist also

$$\langle f|T(\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x))(\bar{\psi}(y)\gamma^\nu\psi(y)A_\nu(y))\dots|i\rangle . \quad (5.31)$$

Benötigt werden Matrixelemente der Form $\langle f|T\varphi_1(x_1)\dots\varphi_n(x_n)|i\rangle$, wobei die $\varphi_i(x_i)$ allgemein Quantenfelder im Wechselwirkungsbild sein sollen. Ferner sollen die φ sowohl bosonische als auch fermionische Felder sein, $\varphi_i \in \{\psi, A_\mu, \phi, \dots\}$. Die Zeitentwicklung ist analog zu freien Feldern. Wir wollen nun das zeitgeordnete Produkt genauer betrachten.

5.6 Das Wick-Theorem

Wir schreiben

$$\varphi_i(x_i) = \varphi_i^{(+)}(x_i) + \varphi_i^{(-)}(x_i) , \quad (5.32)$$

mit

$$\varphi_i^{(+)}(x_i) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} a_i(\vec{k}) \exp(-ikx_i) \quad (5.33)$$

$$\varphi_i^{(-)}(x_i) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} a_i^\dagger(\vec{k}) \exp(ikx_i) \text{ mit} \quad (5.34)$$

$$\omega_k = k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} . \quad (5.35)$$

Das (+) steht für positive, (-) für negative Frequenzen. Im folgenden sei $\varphi_i \equiv \varphi_i(x_i)$. Wir haben

$$:\varphi_i^{(+)}\varphi_j^{(-)}: = \begin{cases} -\varphi_j^{(-)}\varphi_i^{(+)} & \text{falls } \varphi_i, \varphi_j \text{ Fermion-Felder} \\ +\varphi_j^{(-)}\varphi_i^{(+)} & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.36)$$

$$:\varphi_i^{(-)}\varphi_j^{(+)}: = \varphi_i^{(-)}\varphi_j^{(+)} . \quad (5.37)$$

Es ist

$$\varphi_1\varphi_2 = (\varphi_1^{(+)} + \varphi_1^{(-)})(\varphi_2^{(+)} + \varphi_2^{(-)}) = \varphi_1^{(+)}\varphi_2^{(+)} + \varphi_1^{(-)}\varphi_2^{(+)} + \varphi_1^{(-)}\varphi_2^{(-)} + \varphi_1^{(+)}\varphi_2^{(-)} . \quad (5.38)$$

Es sind alle Terme bis auf den letzten normalgeordnet. Dieser kann unter Verwendung des (Anti-)Kommutators ('+' bezieht sich auf den Kommutator, '-' auf den Antikommutator) umgeschrieben werden. Denn

$$\varphi_1^{(+)}\varphi_2^{(-)} = [\varphi_1^{(+)}, \varphi_2^{(-)}]_{\pm} \pm \varphi_2^{(-)}\varphi_1^{(+)} . \quad (5.39)$$

Und somit

$$\varphi_1\varphi_2 = :\varphi_1\varphi_2: + \begin{cases} \{\varphi_1^{(+)}, \varphi_2^{(-)}\} & \text{falls } \varphi_1, \varphi_2 \text{ Fermion-Felder} \\ [\varphi_1^{(+)}, \varphi_2^{(-)}] & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.40)$$

Falls φ_1, φ_2 bosonische Felder sind, so können wir für $x_1^0 > x_2^0$ auch schreiben

$$[\varphi_1^{(+)}, \varphi_2^{(-)}] = \langle 0 | [\varphi_1^{(+)}, \varphi_2^{(-)}] | 0 \rangle = \langle 0 | \varphi_1^{(+)}\varphi_2^{(-)} | 0 \rangle = \langle 0 | \varphi_1\varphi_2 | 0 \rangle \stackrel{x_1^0 > x_2^0}{\equiv} \langle 0 | T\varphi_1\varphi_2 | 0 \rangle . \quad (5.41)$$

Das gilt analog, falls φ_1, φ_2 fermionisch sind (zeigen!). Falls $x_1^0 < x_2^0$, werden die Indizes 1 und 2 vertauscht, und man erhält dieselbe Gleichung:

$$\varphi_2\varphi_1 = :\varphi_2\varphi_1: + \langle 0 | T\varphi_2\varphi_1 | 0 \rangle . \quad (5.42)$$

Und also

1. Seien φ_1, φ_2 Fermionen, dann ist ($x_2^0 > x_1^0$)

$$T(\varphi_1\varphi_2) = -\varphi_2\varphi_1 = -:\varphi_2\varphi_1: - \langle 0 | T\varphi_2\varphi_1 | 0 \rangle = :\varphi_1\varphi_2: + \langle 0 | T\varphi_1\varphi_2 | 0 \rangle . \quad (5.43)$$

2. Seien φ_1 oder φ_2 ein Boson, so erhält man ein analoges Ergebnis.

Es folgt also

$$T(\varphi_1\varphi_2) = :\varphi_1\varphi_2: + \langle 0 | T\varphi_1\varphi_2 | 0 \rangle \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \text{ und } \forall x_1, x_2 . \quad (5.44)$$

Die Felder φ_i verhalten sich wie freie Felder. Das heißt, dass

$$\langle 0 | T\varphi_i(x)\varphi_j(y) | 0 \rangle = D_F^i(x-y) \quad (5.45)$$

der Feynmanpropagator für Felder vom Typ i ist. Falls φ_1, φ_2 unterschiedliche Felder sind, gilt

$$\langle 0 | T\varphi_1\varphi_2 | 0 \rangle = 0 . \quad (5.46)$$

Wir führen folgende Abkürzung ein:

$$\varphi_1 \varphi_2 \equiv \langle 0 | T \varphi_1 \varphi_2 | 0 \rangle . \quad (5.47)$$

I—I

Man nennt dies Wick-Kontraktion.

Für drei bosonische Felder gilt

$$\begin{aligned} T\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) &= : \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) : + : \phi(x_1) : \langle 0 | T\phi(x_2)\phi(x_3) | 0 \rangle \\ &+ : \phi(x_2) : \langle 0 | T\phi(x_1)\phi(x_3) | 0 \rangle \\ &+ : \phi(x_3) : \langle 0 | T\phi(x_1)\phi(x_2) | 0 \rangle . \end{aligned} \quad (5.48)$$

Allgemein ist

$$\begin{aligned} T\phi(x_1)\dots\phi(x_n) &= : \phi(x_1)\dots\phi(x_n) : \\ &+ \sum_{k<l} : \phi(x_1)\phi(x_2)\dots\cancel{\phi(x_k)}\dots\cancel{\phi(x_l)}\dots\phi(x_n) : \langle 0 | T\phi(x_k)\phi(x_l) | 0 \rangle + \dots \\ &+ \sum_{p \geq 2} \left(\sum_{\substack{k_1 < k_2 \\ < \dots < k_{2p}}} : \phi(x_1)\dots\cancel{\phi(x_{k_1})}\dots\cancel{\phi(x_{k_{2p}})}\dots\phi(x_n) : \star \right. \\ &\left. \star \sum_{\text{Alle Perm}} \langle 0 | T\phi(x_{k_1})\phi(x_{k_2}) | 0 \rangle \dots \langle 0 | T\phi(x_{k_{2p-1}})\phi(x_{k_{2p}}) | 0 \rangle \right) . \end{aligned} \quad (5.49)$$

Beachte bei Fermionfeldern das Minuszeichen: Zum Beispiel gilt im Fall von drei Feldern:

$$\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \equiv \begin{cases} - \varphi_1 \varphi_3 \varphi_2 & \text{falls } \varphi_2, \varphi_3 \text{ Fermionfelder} \\ + \varphi_1 \varphi_3 \varphi_2 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.50)$$

Allgemein ist

$$\varphi_1 \dots \varphi_k \dots \varphi_l \dots \varphi_n = (-1)^p \varphi_k \varphi_l \varphi_1 \dots \varphi_n , \quad (5.51)$$

I—I

wobei p die Anzahl der fermionischen Vertauschungen ist.

Wir betrachten ein Beispiel für $n = 4$:

$$\begin{aligned} T(\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4) &= : \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 : + : \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 : + : \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 : + : \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 : \\ &\quad \text{I—I} \quad \text{I—II} \quad \text{I—III} \\ &+ : \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 : + : \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 : + : \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 : \\ &\quad \text{I—I} \quad \text{I—II} \quad \text{I—II} \\ &+ : \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 : + : \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 : + : \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 : \\ &\quad \text{I—I I—I} \quad \text{I—II—II} \quad \text{I—II—II} \end{aligned} \quad (5.52)$$

Wir betrachten den Vakuumerwartungswert für $\varphi_i \equiv \varphi(x_i)$, also gleiche bosonische Felder:

$$\langle 0 | : \varphi_1 \dots \varphi_n : | 0 \rangle = 0 \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned} \langle 0 | T(\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4) | 0 \rangle &= D_F(x_1 - x_2) D_F(x_3 - x_4) + D_F(x_1 - x_4) D_F(x_2 - x_3) \\ &+ D_F(x_1 - x_3) D_F(x_2 - x_4) \end{aligned} \quad (5.54)$$

5.7 Berechnung von S -Matrix-Elementen

Die Auswertung von $\langle f|S|i\rangle$ mit $S = T \exp(i \int d^4x \mathcal{L}_W(x))$ führt auf S -Matrix-Elemente der Form $\langle f|T\varphi_1(x_1)\dots\varphi_n(x_n)|i\rangle$. Dieses wird über das Wick-Theorem auf normalgeordnete Produkte und Propagatoren reduziert,

$$T\varphi_1\dots\varphi_n = : \varphi_1\dots\varphi_n : + \sum_{\text{I---I}} : \varphi_1\dots\varphi_i\dots\varphi_k\dots\varphi_n : + \dots \text{ (alle Kontraktionen) .} \quad (5.55)$$

Wir betrachten zunächst ein reelles Skalarfeld ϕ . Es sei der Anfangszustand

$$|i\rangle = |\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n\rangle = a^\dagger(\vec{p}_1)a^\dagger(\vec{p}_1)\dots a^\dagger(\vec{p}_n)|0\rangle . \quad (5.56)$$

Und analog für den Endzustand $|f\rangle$. Das Skalarfeld wird in Komponenten zerlegt, die nur Erzeuger und Vernichter enthalten, d.h.

$$\phi = \phi^{(+)} + \phi^{(-)} \quad \text{mit} \quad (5.57)$$

$$\phi^{(+)}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega_k} a(\vec{p}) \exp(-ipx) \equiv \int_p a(\vec{p}) \exp(-ipx) \quad \text{und} \quad (5.58)$$

$$\phi^{(-)}(x) = \int_p a^\dagger(\vec{p}) \exp(ipx) , \quad (5.59)$$

wobei $\omega = p_0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. Da $\phi^{(+)}$ nur Vernichter enthält, gilt

$$\phi^{(+)}(x)|0\rangle = 0 . \quad (5.60)$$

Und ferner

$$\begin{aligned} [\phi^{(+)}(x), a^\dagger(\vec{p})] &= \int_{p'} [a(\vec{p}') \exp(-ip'x), a^\dagger(\vec{p})] = \int_{p'} \exp(-ip'x) [a(\vec{p}'), a^\dagger(\vec{p})] \\ &= \int d^3p' \exp(-ip'x) \delta(\vec{p} - \vec{p}') = \exp(-ipx) . \end{aligned} \quad (5.61)$$

Damit haben wir also

$$\phi^{(+)}|\vec{p}\rangle = \phi^{(+)}a^\dagger(\vec{p})|0\rangle = \exp(-ipx)|0\rangle \quad (5.62)$$

und

$$\begin{aligned} \phi^{(+)}|\vec{p}_1\dots\vec{p}_k\rangle &= \phi^{(+)}a^\dagger(\vec{p}_1)\dots a^\dagger(\vec{p}_k)|0\rangle \\ &= a^\dagger(\vec{p}_1)\phi^{(+)}a^\dagger(\vec{p}_2)\dots a^\dagger(\vec{p}_k)|0\rangle + \exp(-ip_1x)a^\dagger(\vec{p}_2)\dots a^\dagger(\vec{p}_k)|0\rangle \\ &= \sum_{n=1}^k \phi^{(+)}a^\dagger(\vec{p}_n) a^\dagger(\vec{p}_1)\dots \cancel{a^\dagger(\vec{p}_n)}\dots a^\dagger(\vec{p}_k)|0\rangle \quad \text{mit} \end{aligned} \quad (5.63)$$

$$\phi^{(+)}(x)a^\dagger(\vec{p}) \equiv \exp(-ipx) . \quad (5.64)$$

Daraus folgt dann, dass

$$\phi^{(+)}(x_1)\dots\phi^{(+)}(x_N)|\vec{p}_1\dots\vec{p}_n\rangle = 0 \quad \text{für } N > n . \quad (5.65)$$

Zum Beispiel können wir für N Skalarfelder haben

$$\begin{aligned} \langle f | : \phi \dots \phi : | i \rangle &= \langle f | \phi^{(+)} \dots \phi^{(+)} | i \rangle + \langle f | \phi^{(-)} \phi^{(+)} \dots \phi^{(+)} | i \rangle + \dots + \dots \\ &= \langle f | \underbrace{\phi^- \dots \phi^-}_{N_-} \underbrace{\phi^+ \dots \phi^+}_{N_+} | i \rangle + \dots \end{aligned} \quad (5.66)$$

Dieser Ausdruck ist nur dann ungleich null, wenn $N_+ \leq n_i$ und $N_- \leq n_f$. Dabei sind n_i (n_f) die Anzahl der Teilchen im Anfangs-(End-)Zustand und N_+ (N_-) jeweils die Anzahl der Felder mit positiven bzw. negativen Frequenzen in den einzelnen obigen Ausdrücken ($N_+ + N_- = N$). Falls $N_+ < n_i$ und $N_- < n_f$, dann ist

$$\langle f | \phi^{(-)} \dots \phi^{(-)} \phi^{(+)} \dots \phi^{(+)} | i \rangle \sim \langle f' | i' \rangle \text{ nur } \neq 0, \text{ falls } |i'\rangle = |f'\rangle. \quad (5.67)$$

5.7.1 Modifikationen für Dirac- und Vektorfelder

Wir hatten die Fourierzerlegungen

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega_p} (a(\vec{p}) \exp(-ipx) + a^\dagger \exp(ipx)) \equiv \phi^{(+)} + \phi^{(-)} \quad (5.68)$$

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega_p} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} (a_s(\vec{p}) u_s(\vec{p}) \exp(-ipx) + b_s^\dagger(\vec{p}) v_s(\vec{p}) \exp(ipx)) \equiv \psi^{(+)} + \psi^{(-)} \quad (5.69)$$

$$A_\mu(x) = \int d\vec{p} \sum_\lambda (c_\lambda(\vec{p}) \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{p}) \exp(-ipx) + c_\lambda^\dagger(\vec{p}) \epsilon_\mu^{(\lambda)*}(\vec{p}) \exp(ipx)) \equiv A_\mu^{(+)} + A_\mu^{(-)}. \quad (5.70)$$

Analog wie vorher ergibt sich

$$\psi^{(+)}(x) a_s^\dagger(\vec{p}) = u_s(\vec{p}) \exp(-ipx) \quad (5.71)$$

$$\bar{\psi}^{(-)}(x) b_s^\dagger(\vec{p}) = \bar{v}_s(\vec{p}) \exp(-ipx) \quad (5.72)$$

$$a_s(\vec{p}) \bar{\psi}^{(+)}(x) = \bar{u}_s(\vec{p}) \exp(ipx) \quad (5.73)$$

$$b_s(\vec{p}) \psi^{(-)}(x) = v_s(\vec{p}) \exp(ipx) \quad (5.74)$$

$$A_\mu^{(+)} c_\lambda^\dagger(\vec{p}) = \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{p}) \exp(-ipx) \quad (5.75)$$

$$c_\lambda(\vec{p}) A_\mu^{(-)} = \epsilon_\mu^{(\lambda)*}(\vec{p}) \exp(ipx). \quad (5.76)$$

Ferner ist zu beachten, dass

$$\psi^{(+)}(x) a_s^\dagger(\vec{p}_1) a_t^\dagger(\vec{p}_2) | 0 \rangle = \psi^{(+)} a_1^\dagger a_2^\dagger | 0 \rangle - \psi^{(+)} a_1^\dagger a_2^\dagger | 0 \rangle. \quad (5.77)$$

5.7.2 Beispiel: Quantenelektrodynamik

Ausgangspunkt ist die Wechselwirkungs-Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_W = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu = -e\bar{\psi}_\alpha\gamma^\mu_{\alpha\beta}\psi_\beta A_\mu = -e\bar{\psi}_\alpha\psi_\beta\gamma^\mu_{\alpha\beta}A_\mu. \quad (5.78)$$

Im folgenden wird der Spinorindex (α, β) unterdrückt. Wir betrachten die Möller-Streuung, d.h. den Prozess

$$e^-(p_1, r_1) + e^-(p_2, r_2) \rightarrow e^-(p_3, r_3) + e^-(p_4, r_4). \quad (5.79)$$

Das heißt, wir haben Anfangs- und Endzustand

$$|i\rangle = a_{r_1}^\dagger(\vec{p}_1)a_{r_2}^\dagger(\vec{p}_2)|0\rangle \quad \text{und} \quad |f\rangle = a_{r_3}^\dagger(\vec{p}_3)a_{r_4}^\dagger(\vec{p}_4)|0\rangle. \quad (5.80)$$

An dem Prozess sind vier Teilchen beteiligt. Damit benötigen wir im T -Produkt mindestens vier Felder ψ , so dass $N_+ = n_i$ und $N_- = n_f$. Es muss also mindestens \mathcal{L}_W^2 betrachtet werden. Wir haben

$$\begin{aligned} \langle f|S|i\rangle &= \langle f|i\rangle + \left\langle f \left| iT \int d^4x \mathcal{L}_W(x) \right| i \right\rangle \\ &+ \frac{i^2 e^2}{2!} \int d^4x \int d^4y \langle f|T(\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x))(\bar{\psi}(y)\gamma^\nu\psi(y)A_\nu(y))|i\rangle + \dots \end{aligned} \quad (5.81)$$

Folgende Bemerkungen sind zu machen

1. Die Felder A_μ müssen Wick-kontrahiert sein, da es keine Photonen im äußeren Zustand gibt. Ansonsten stehen sie im Normalprodukt, welches verschwindet:

$$\langle 0| : A_\mu A_\nu : |0\rangle = 0 \quad \text{und} \quad \langle 0| \underset{\text{I---I}}{A_\mu A_\nu} |0\rangle \neq 0. \quad (5.82)$$

2. Kein Feld ψ darf Wick-kontrahiert sein, da für die äußeren Zustände vier ψ 's benötigt werden.
3. Es ergeben sich damit die folgenden möglichen Terme: a) Erster Term, siehe Fig. 5.1 (links). b) Zweiter Term, siehe Fig. 5.1 (rechts). Durch eine fermionische Vertauschung ergibt sich ein relatives Minuszeichen zum ersten Fall.

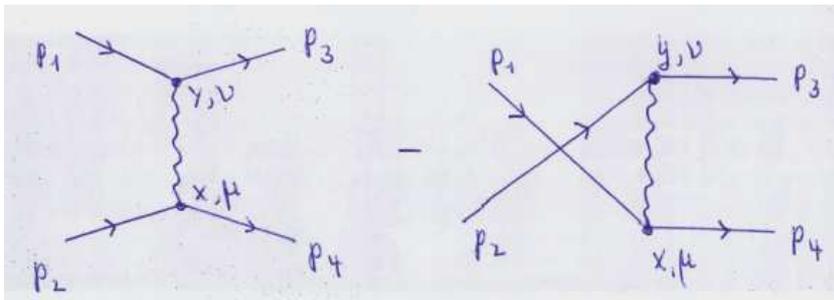


Abbildung 5.1: Feynman-Diagramme, die zum Prozess $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ beitragen.

4. Dritter Term: Dieser Term entspricht dem ersten mit der Vertauschung $x \leftrightarrow y$.

5. Vierter Term: Dieser Term entspricht dem zweiten Term mit der Vertauschung $x \leftrightarrow y$.

Somit erhält man einen zusätzlichen Vorfaktor 2, der den Vorfaktor $1/2!$ aus der Entwicklung der S -Matrix kanzelliert. Ausgedrückt durch Formeln ergibt sich für die Diagramme 1 und 3:

$$\begin{aligned}
 & -e^2 \int d^4x \int d^4y \langle 0 | a(3) a(4) T [\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) A_\mu(x) \bar{\psi}(y) \gamma^\nu \psi(y) A_\nu(y)] a^\dagger(1) a^\dagger(2) | 0 \rangle \\
 & \quad \begin{array}{c} \text{I} \text{-----} \text{I} \quad \text{I} \text{-----} \text{I} \\ \text{I} \text{-----} \text{I} \text{-----} \text{I} \text{-----} \text{I} \end{array} \\
 & = -e^2 \int d^4x \int d^4y (A_\mu(x) A_\nu(y)) \cdot \bar{u}(4) \gamma^\mu u(2) \exp(-ip_2x + ip_4x) \bar{u}(3) \gamma^\nu u(1) \exp(-ip_1y + ip_3y) \\
 & \quad \text{I} \text{-----} \text{I} \tag{5.83}
 \end{aligned}$$

Hier steht $a(1)$ für $a_{r_1}(\vec{p}_1)$ und $u(1)$ für $u_{r_1}(\vec{p}_1)$ usw. Wir verwenden

$$\begin{aligned}
 (A_\mu(x) A_\nu(y)) & \equiv \langle 0 | T A_\mu(x) A_\nu(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\exp(-ik(x-y))}{k^2 + i\epsilon} (-ig_{\mu\nu}) \\
 & \quad \text{I} \text{-----} \text{I} \tag{5.84}
 \end{aligned}$$

Ausführen der Integration liefert

$$\int d^4x \rightarrow (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_4 - p_2 - k) \quad \text{und} \quad \int d^4y \rightarrow (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_3 - p_1 + k) . \tag{5.85}$$

Dies beschreibt die Impulserhaltung an den Vertizes. Ausführen der Integration über k liefert

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (2\pi)^8 \delta^{(4)}(p_4 - p_2 - k) \delta^{(4)}(p_3 - p_1 + k) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) . \tag{5.86}$$

Das entspricht der Gesamtimpulserhaltung. Somit haben wir

$$(1) + (3) = -e^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \bar{u}(\vec{p}_4) \gamma^\mu u(\vec{p}_2) \bar{u}(\vec{p}_3) \gamma^\nu u(\vec{p}_1) \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} , \tag{5.87}$$

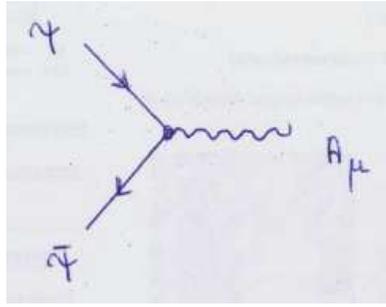
$$\text{mit } k = p_1 - p_3 = p_4 - p_2 . \tag{5.88}$$

(2) + (4) berechnet sich analog, wobei $1 \leftrightarrow 2$. Also haben wir für das gesamte Matrixelement

$$\begin{aligned}
 & -e^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \left[\frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_4 - p_2)^2 + i\epsilon} (\bar{u}_4 \gamma^\mu u_2) (\bar{u}_3 \gamma^\nu u_1) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_2 - p_3)^2 + i\epsilon} (\bar{u}_3 \gamma^\nu u_2) (\bar{u}_4 \gamma^\mu u_1) \right] \tag{5.89}
 \end{aligned}$$

Felder, die nicht kontrahiert sind, liefern wegen der Normalordnung keinen Beitrag, da $\langle 0 | \phi \dots \phi : | 0 \rangle = 0$. Es müssen *alle* Kontraktionen der Felder untereinander (Propagatoren) und mit äußeren Teilchen ($\exp(\pm ipx)$, $u(p)$, $\epsilon_\mu(p)$) gebildet werden. In der Ordnung e^2 hatten wir die Beiträge Fig. 5.1 erhalten. Die Ordnung e^3 verschwindet. Die Ordnung e^4 liefert wieder einen Beitrag:

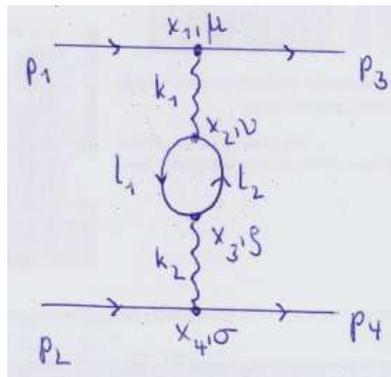
$$\langle 0 | a_4 a_3 T [\bar{\psi}_1 \gamma_\mu \psi_1 A_1^\mu \bar{\psi}_2 \gamma_\nu \psi_2 A_2^\nu \bar{\psi}_3 \gamma_\rho \psi_3 A_3^\rho \bar{\psi}_4 \gamma_\sigma \psi_4 A_4^\sigma] a_1^\dagger a_2^\dagger | 0 \rangle . \tag{5.90}$$

Abbildung 5.2: Vertex $\bar{\psi}\psi A$.

Hier ist $\psi_1 \equiv \psi(x_1)$, $A_1^\mu \equiv A^\mu(x_1)$ etc. Die Kontraktionen werden im folgenden graphisch betrachtet. Die vier Terme $\bar{\psi}\psi A$ werden durch vier Vertizes repräsentiert, siehe Fig. 5.2. Damit ergibt sich das Feynman-Diagramm Fig. 5.3. Die Schleife entspricht dem Ausdruck

$$\underbrace{(\tilde{\psi}(x_2)\psi(x_2)A(x_2))(\tilde{\psi}(x_3)\psi(x_3)A(x_3))}_{\text{I-----I-----I}} = \underbrace{AA\tilde{\psi}_\alpha\psi_\alpha\tilde{\psi}_\beta\psi_\beta}_{\text{I-I-I-I}} = \underbrace{AA(-1)\psi_\beta\tilde{\psi}_\alpha\psi_\alpha\tilde{\psi}_\beta}_{\text{I-I I-I}}. \quad (5.91)$$

Dabei sind α und β Spinorindizes und

Abbildung 5.3: Feynman-Diagramm, das zur Ordnung e^2 in $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ beiträgt.

$$\tilde{\psi}(x_2) \equiv \bar{\psi}(x_2)\gamma^\nu \equiv \tilde{\psi}_\alpha \quad (5.92)$$

$$\psi(x_2) \equiv \psi_\alpha \quad (5.93)$$

$$\tilde{\psi}(x_3) \equiv \bar{\psi}(x_3)\gamma^\rho \equiv \tilde{\psi}_\beta \quad (5.94)$$

$$\psi(x_3) \equiv \psi_\beta \quad (5.95)$$

$$AA \equiv A_\nu(x_2)A_\rho(x_3). \quad (5.96)$$

Der Ausdruck Glg. (5.91) ist eine Zahl $\in \mathbb{C}$, so dass man auch die Spur dieser Zahl bilden kann,

$$\underbrace{AA(-1)}_{\text{I-I I-I}} \cdot \underbrace{\text{Sp}(\psi_\beta\tilde{\psi}_\alpha\psi_\alpha\tilde{\psi}_\beta)}_{\text{I-I I-I}} = A_\nu(x_2)A_\rho(x_3)(-1) \cdot \text{Sp}(S_F(x_3 - x_2)\gamma^\nu \cdot S_F(x_2 - x_3)\gamma^\rho). \quad (5.97)$$

Der Ausdruck $(-1)\text{Sp}$ entspricht einer geschlossenen Fermionschleife. Folgende Integrationen müssen ausgeführt werden:

$$\int d^4x_1 \dots \int d^4x_4 \underbrace{\int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l_2}{(2\pi)^4}}_{\text{Propagatoren}} \exp(-i(p_1 - p_3)x_1) \exp(-i(p_2 - p_4)x_4) \exp(-ik_1(x_2 - x_1)) \exp(-ik_2(x_3 - x_4)) \exp(-il_1(x_2 - x_3)) \exp(-il_2(x_3 - x_2)) \cdot \text{Funktionen von } k_1, k_2, l_1, l_2, p_1, p_2, p_3, p_4. \quad (5.98)$$

Ausführen der Integrationen über x_1, x_2, x_3 und x_4 liefert

$$\begin{aligned} & \int d^4k_1 d^4k_2 d^4l_1 d^4l_2 \delta^{(4)}(p_1 - p_3 - k_1) \delta^{(4)}(p_2 - p_4 - k_2) \delta^{(4)}(k_2 - l_1 + l_2) \delta^{(4)}(k_1 + l_1 - l_2) \\ &= \int d^4l_1 d^4l_2 \delta^{(4)}(p_1 - p_3 + l_1 - l_2) \delta^{(4)}(p_2 - p_4 - l_1 + l_2) \\ &= \int d^4l_1 \delta^{(4)}(p_2 - p_4 - l_1 + p_1 - p_3 + l_1) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \int \frac{d^4l_1}{(2\pi)^4}. \quad (5.99) \end{aligned}$$

Es muss also für jede geschlossene Schleife über den jeweiligen Schleifenimpuls integriert werden. Hier ist dies l_1 . Weitere Kontraktionen zur Ordnung e^4 sind in den Diagrammen Fig. 5.4 dargestellt.

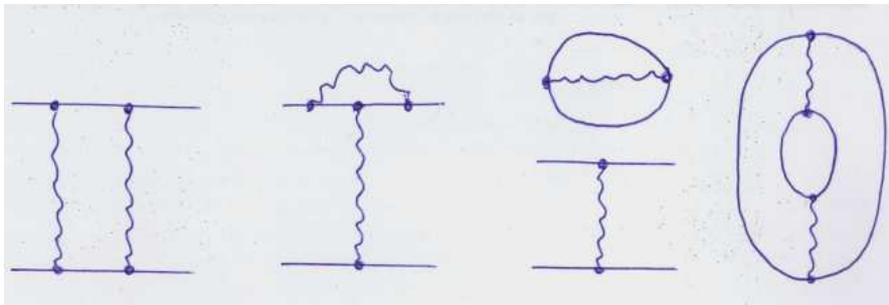


Abbildung 5.4: Weitere Feynman-Diagramme, die in der Ordnung e^4 beitragen.

5.7.3 Feynmanregeln der QED

Damit können wir nun die Feynmanregeln der Quantenelektrodynamik angeben:

* Einlaufende Teilchen:

- Elektron e^- : $u_s(p) \hat{=} \underbrace{\gamma a_s^{\dagger}}_s$
- Positron e^+ : $\bar{v}_s(p) \hat{=} \underbrace{\bar{\gamma} b_s^{\dagger}}_s$
- Photon γ : $\epsilon_{\mu}^{(\lambda)}(\vec{k}) \hat{=} \underbrace{A_{\mu} c_{\lambda}^{\dagger}}_{\lambda}$

* Auslaufende Teilchen:

- Elektron e^- : $\bar{u}_s(p) \hat{=} \underbrace{a_s \bar{\gamma}}_s$
- Positron e^+ : $v_s(p) \hat{=} \underbrace{b_s \gamma}_s$
- Photon γ : $\epsilon_{\mu}^{(\lambda)*}(\vec{k}) \hat{=} \underbrace{c_{\lambda} A_{\mu}}_{\lambda}$

Ferner gilt

- * An jedem Vertex gilt Impulserhaltung.
- * Multipliziere die Amplitude (s.u.) mit $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i)$, wobei P_f (P_i) die Summe der Impulse der auslaufenden (einlaufenden) Teilchen ist.
- * Für jede geschlossene Schleife muss ein Integral über den zugehörigen 4er-Impuls ausgeführt werden, $\frac{d^4l}{(2\pi)^4}$.
- * Jede Fermionschleife erhält einen Faktor (-1) , und es muss die Spur gebildet werden.
- * Bei der Vertauschung von äußeren Fermionen muss ein Faktor (-1) hinzugefügt werden.

Wir schreiben

$$S = 1 + iT. \quad (5.100)$$

Und wir haben das Matrixelement

$$\langle f|T|i\rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \mathcal{M}_{fi}. \quad (5.101)$$

* Propagatoren:

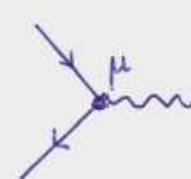
– Elektron / Positron e :

$$\frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \cong \text{[Diagram: crossed-out circle with } \psi \bar{\psi} \text{]} \quad \text{[Diagram: fermion line with momentum } p \text{]}$$

– Photon γ :

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \cong \text{[Diagram: } A_\mu A_\nu \text{]} \quad \text{[Diagram: wavy photon line with momentum } k \text{ and indices } \mu, \nu \text{]}$$

* Vertex:

– Vertex $e e \gamma$: $-ie\gamma^\mu \cong -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ 

Dabei ist \mathcal{M}_{fi} die *Feynman-Amplitude*. Diese erhält man durch Verbinden der äußeren Teilchen durch Vertizes und Propagatoren und summiert hier alle Möglichkeiten auf. Man betrachtet hierbei nur *zusammenhängende Diagramme* (ohne Beweis). Es wird der mathematische Ausdruck gemäß den Feynmanregeln aufgeschrieben. Dabei werden Fermionlinien **entgegen der Fermionrichtung** durchlaufen!

5.7.4 Beispiel: Paarvernichtung

Wir betrachten Paarvernichtung, d.h. den Prozess

$$e^-(p_1, s_1) + e^+(p_2, s_2) \rightarrow \gamma^\mu(k_1, \lambda_1) + \gamma^\nu(k_2, \lambda_2) \quad (5.102)$$

Es tragen die in Fig. 5.5 dargestellten Feynmandiagramme bei.

Die Gesamtamplitude \mathcal{M} ist durch die Summe der den beiden Diagrammen entsprechenden Amplituden gegeben, d.h.

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2. \quad (5.103)$$

Für \mathcal{M}_1 ergibt sich

$$\mathcal{M}_1 = \bar{v}(p_2)(-ie\gamma^\nu) \frac{i}{\not{q} - m + i\epsilon} (-ie\gamma^\mu) u(p_1) \epsilon_\mu^{(\lambda_1)*}(k_1) \epsilon_\nu^{(\lambda_2)*}(k_2). \quad (5.104)$$

Die Amplitude \mathcal{M}_2 wird als Übung offen gelassen.

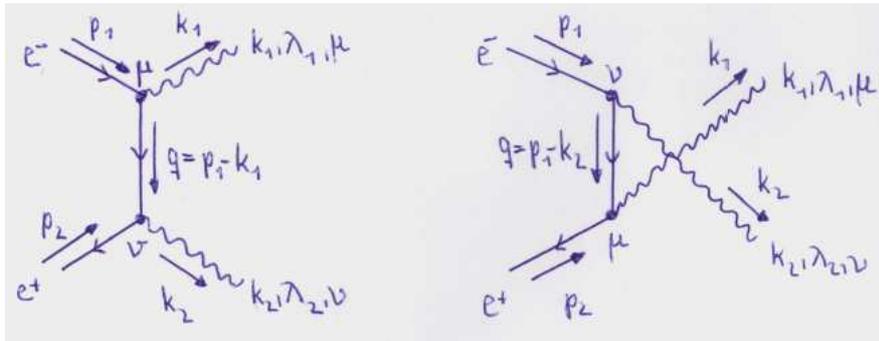


Abbildung 5.5: Die zur Paarvernichtung beitragenden Feynmandiagramme. (Anmerkung: Im zweiten Diagramm muss der Impuls des Fermionpropagators zwischen den beiden Photonvertizes $q' = p_1 - k_2$ lauten.)

5.7.5 Beispiel: Compton-Streuung

Wir betrachten Compton-Streuung, d.h. den Prozess

$$e^-(p_1, s_1) + \gamma^\mu(k_1, \lambda_1) \rightarrow e^-(p_2, s_2) + \gamma^\nu(k_2, \lambda_2) \quad (5.105)$$

Es tragen die in Fig. 5.6 dargestellten Feynmandiagramme bei.

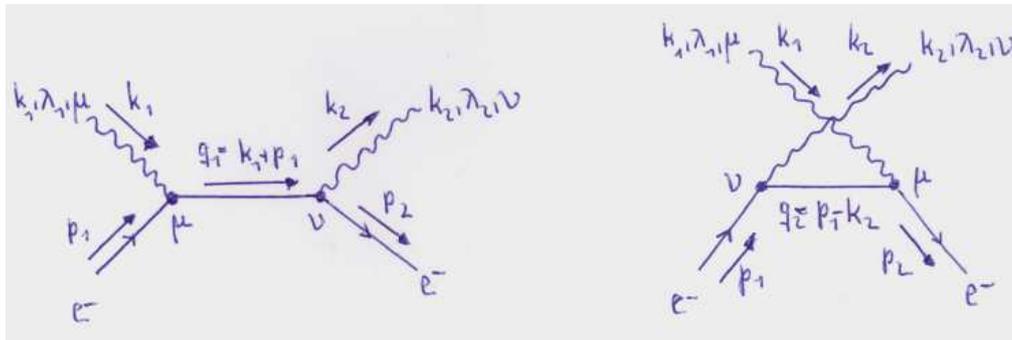


Abbildung 5.6: Die zur Compton-Streuung beitragenden Feynmandiagramme.

Die Gesamtamplitude \mathcal{M} ist durch die Summe der den beiden Diagrammen entsprechenden Amplituden gegeben, d.h.

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 . \quad (5.106)$$

Für \mathcal{M}_1 ergibt sich mithilfe der Feynmanregeln

$$\mathcal{M}_1 = \bar{u}(p_2)(-ie\gamma^\nu) \frac{i}{\not{q}_1 - m} (-ie\gamma^\mu) u(p_1) \epsilon_\mu^{(\lambda_1)}(k_1) \epsilon_\nu^{(\lambda_2)*}(k_2) \quad \text{mit } q_1 = p_1 + k_1 . \quad (5.107)$$

Und für \mathcal{M}_2 findet man

$$\mathcal{M}_2 = \bar{u}(p_2)(-ie\gamma^\mu) \frac{i}{\not{q}_2 - m} (-ie\gamma^\nu) u(p_1) \epsilon_\mu^{(\lambda_1)}(k_1) \epsilon_\nu^{(\lambda_2)*}(k_2) \quad \text{mit } q_2 = p_1 - k_2 . \quad (5.108)$$

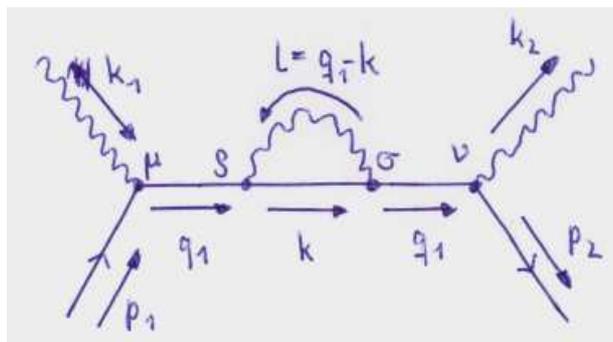


Abbildung 5.7: Zur Compton-Streuung in der Ordnung e^4 beitragendes Diagramm. (Anmerkung: Der Pfeil für den Impuls l muss in die andere Richtung zeigen.)

Ein Beitrag in der Ordnung e^4 ist durch das in Fig. 5.7 dargestellte Diagramm gegeben. Es beinhaltet eine Schleife. Die zugehörige Amplitude lautet

$$\mathcal{M} = (-ie)^4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p_2) \gamma^\nu \frac{i}{\not{q}_1 - m} \gamma^\sigma \frac{i}{\not{k} - m} \gamma^\rho \frac{i}{\not{q}_1 - m} \gamma^\mu u(p_1) \epsilon_\mu^{(\lambda_1)}(k_1) \epsilon_\nu^{(\lambda_2)*}(k_2) \times \frac{-ig_{\rho\sigma}}{l^2 + i\epsilon}. \quad (5.109)$$

Und es ist

$$q_1 = p_1 + k_1 = p_2 + k_2, \quad l = q_1 - k. \quad (5.110)$$

5.8 Der Wirkungsquerschnitt

5.8.1 Streuquerschnitt

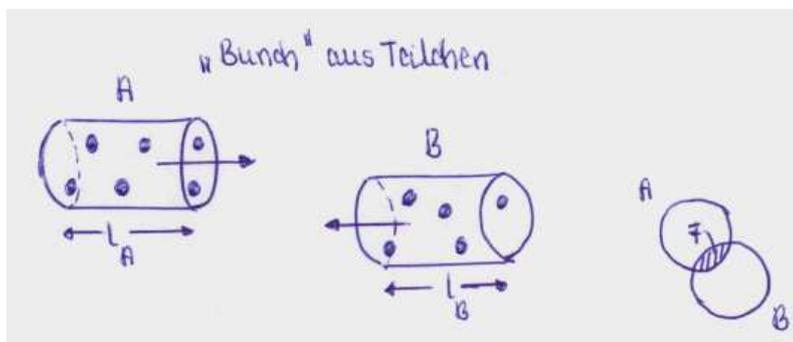


Abbildung 5.8: Teilchenstreuung

Wir betrachten zwei bunches von Teilchen, die miteinander streuen, siehe Fig. 5.8. Für die Anzahl der Ereignisse N_{event} gilt

$$N_{event} \sim \rho_A l_A \rho_B l_B \cdot F. \quad (5.111)$$

Dabei bezeichnet ρ die Teilchenzahldichte, d.h. die Anzahl der Teilchen pro Volumen. Und F ist die Streuquerschnittsfläche. Der Proportionalitätsfaktor σ ist der Wirkungsquerschnitt. Umformen liefert

$$\sigma = \frac{N_{event} \cdot F}{(\rho_A l_A F)(\rho_B l_B F)} = \frac{N_{event} \cdot F}{N_A \cdot N_B}. \quad (5.112)$$

Bei $N_{A,B}$ handelt es sich um die Teilchen im effektiven Bereich. Sei $N_B = 1$, dann sieht das Streuexperiment wie in Fig. 5.9 aus.

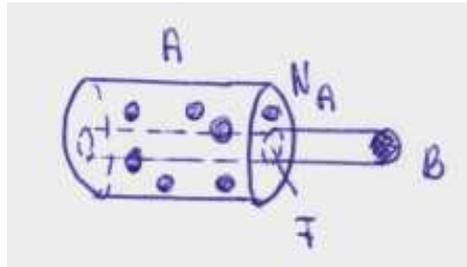


Abbildung 5.9: Teilchenstreuung mit $N_B = 1$.

Und wir haben

$$\sigma = \frac{N_{event}}{N_A} \cdot F. \quad (5.113)$$

Falls B eine Stahlkugel ist, gilt $N_A = N_{event}$ und damit $\sigma = F$. Ansonsten ist dies die effektive Querschnittsfläche der aus dem Bunch A herausgestreuten Teilchen. Wir haben also

$$\sigma = \frac{N_{event}}{\frac{N_A}{F}} = \frac{\frac{N_{event}}{T}}{j_A} = \frac{\text{Anzahl der Ereignisse pro Zeit } T}{\text{einlaufende Stromdichte}}. \quad (5.114)$$

Der Wirkungsquerschnitt hat die Dimension einer Fläche, in natürlichen Einheiten $1/\text{Masse}^2$.

5.8.2 Phasenraum Flussfaktor

Das S -Matrixelement für den Übergang von Anfangs- zu Endzustand ist gegeben durch

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta \left(\sum_f p_f - \sum_i p_i \right) \langle f | \mathcal{T} | i \rangle. \quad (5.115)$$

Hierüber wird die Lorentz-invariante \mathcal{T} -Matrix definiert. Die δ -Funktion beschreibt die Energie-Impuls-Erhaltung. Wir betrachten die folgende Reaktion

$$a_1(p_1) + a_2(p_2) \rightarrow b_1(q_1) + \dots + b_n(q_n). \quad (5.116)$$

Der Wirkungsquerschnitt ist gegeben durch

$$\sigma = \frac{\text{Übergangsrate} (\equiv \text{Zahl der Ereignisse/Zeit})}{\text{Fluss der einlaufenden Teilchen}}. \quad (5.117)$$

Zähler und Nenner sind im vorgegebenen Lorentz-System definiert. Zum Beispiel kann a_2 ruhend sein, während a_1 einläuft. Es sei $i \neq f$. Wir arbeiten mit Impulseigenzuständen im

Anfangs- und Endzustand. Alle 1-Teilchenzustände $|p_i\rangle, |q_i\rangle$ sind auf 1 normiert bezüglich des Lorentz-invarianten Maßes

$$\frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3 2q_i^0} = \frac{d^4 q_i}{(2\pi)^3} \delta(q_i^2 - m_i^2) \theta(q_i^0) . \quad (5.118)$$

Wir betrachten zunächst unterscheidbare Teilchen b_1, \dots, b_n im Endzustand. Dann ist der in der Berechnung von S_{fi} bzw. \mathcal{T}_{fi} der verwendete Endzustand

$$|b_1 \dots b_n\rangle = |b_1\rangle \otimes \dots \otimes |b_n\rangle \quad (5.119)$$

bezüglich des Maßes

$$\prod_{j=1}^n d^3 \tilde{q}_j \quad (5.120)$$

auf 1 normiert.

Im Anfangszustand haben wir

$$|a_1, a_2\rangle = |a_1(\vec{p}_1)\rangle \otimes |a_2(\vec{p}_2)\rangle . \quad (5.121)$$

Wir nehmen an, dass wir jeweils ein Teilchen a_1 und ein Teilchen a_2 in einem Normierungsvolumen haben. Sei V das Volumen (z.B. Labor), dann ist

$$\langle a_1(\vec{p}_1) | a_1(\vec{p}_1) \rangle = 2p_1^0 (2\pi)^3 \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_1) = (2\pi)^3 \cdot 2p_1^0 \frac{1}{(2\pi)^3} \int_V d^3 x \exp(i(\vec{p}_1 - \vec{p}_1)\vec{x}) = 2p_1^0 V . \quad (5.122)$$

Damit

$$\frac{||a_1(\vec{p}_1)\rangle|^2}{V} = \frac{\text{Wahrscheinlichkeitsdichte im Impulsraum für diesen Zustand}}{V} . \quad (5.123)$$

Wir betrachten nun die Übergangswahrscheinlichkeit für die Reaktion (5.116). Mit der Voraussetzung je eines Teilchens a_1 und a_2 im Normierungsvolumen V haben wir

$$dw_{fi} = \frac{[(2\pi)^4 \delta^{(4)}(Q - P)]^2 |\mathcal{T}_{fi}|^2 \prod_{j=1}^n d\tilde{q}_j}{\underbrace{2p_1^0 2p_2^0 V^2}_{\text{Norm des Anfangszustandes}}} , \quad (5.124)$$

mit $P \equiv p_1 + p_2$ und $Q \equiv \sum_{j=1}^n q_j$. Für das Quadrat der δ -Funktion verwenden wir Fermis Trick: Man denke sich die Wechselwirkung in einem Volumen V und über die Zeit T eingeschaltet. Damit haben wir

$$[(2\pi)^4 \delta^{(4)}(Q - P)]^2 = \int_{VT} d^4 x e^{i(Q-P)\cdot x} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(Q - P) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(Q - P) V \cdot T \quad (5.125)$$

Und somit haben wir die Übergangsrate

$$\frac{dw_{fi}}{T} = \frac{1}{V \cdot 4p_1^0 p_2^0} (2\pi)^4 \prod_{j=1}^n d\tilde{q}_j \delta^{(4)}(Q - P) |\mathcal{T}_{fi}|^2 . \quad (5.126)$$

Diese Formel gilt in jedem Inertialsystem. Wir wählen jetzt das Ruhesystem von Teilchen a_2 . Seien $m_{1,2}$ jeweils die Massen von $a_{1,2}$. Im Ruhesystem von a_2 ist

$$p_2^0 = m_2 \quad (5.127)$$

und für den Impuls von Teilchen a_1 gilt in diesem System (\equiv Laborsystem)

$$|\vec{p}_{1L}| = ((p_{1L}^0)^2 - m_1^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{w(s, m_1^2, m_2^2)}{2m_2}, \quad (5.128)$$

mit der Funktion

$$w(x, y, z) \equiv (x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.129)$$

Dies sieht man folgendermaßen: Die Schwerpunktsenergie im c.m. (Schwerpunkts-) System sei s . Sie ist gegeben durch

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad (5.130)$$

wobei p_1, p_2 die Viererimpulse im Schwerpunktsystem sind. Die Viererimpulse im Laborsystem sind gegeben durch

$$p_{1L} = \begin{pmatrix} p_{1L}^0 \\ \vec{p}_{1L} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad p_{2L} = \begin{pmatrix} m_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.131)$$

Wegen Lorentz-Invarianz gilt

$$s = (p_1 + p_2)^2 = p_{1L}^2 + 2p_{1L}^0 m_2 + m_2^2 = m_1^2 + 2p_{1L}^0 m_2 + m_2^2 \Rightarrow \quad (5.132)$$

$$p_{1L}^0 = \frac{s - m_1^2 - m_2^2}{2m_2}. \quad (5.133)$$

Da wir nur 1 Teilchen a_1 pro Volumen V vorausgesetzt haben, ist der Fluss von a_1 im Laborsystem L

$$\Phi_{a_{1L}} = \frac{1}{V} |\vec{v}_{1L}| = \frac{1}{V} \frac{|\vec{p}_{1L}|}{p_{1L}^0} = \frac{1}{V p_{1L}^0} \frac{w(s, m_1^2, m_2^2)}{2m_2}. \quad (5.134)$$

Damit ist

$$V 2p_1^0 2p_2^0 = V 2m_2 \frac{2w(s, m_1^2, m_2^2)}{\Phi_{a_{1L}} V 2m_2} = 2 \frac{w(s, m_1^2, m_2^2)}{\Phi_{a_{1L}}}. \quad (5.135)$$

Somit finden wir für den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$d\sigma \equiv \frac{dw_{fi}/T}{\Phi_{a_1}} = \frac{1}{2w(s, m_1^2, m_2^2)} \prod_{j=1}^n \frac{d^3 q_j}{(2\pi)^3 2q_j^0} \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_{j=1}^n q_j - p_1 - p_2 \right) \cdot |\langle b_1(\vec{q}_1) \dots b_n(\vec{q}_n) | \mathcal{T} | a_1(\vec{p}_1) a_2(\vec{p}_2) \rangle|^2. \quad (5.136)$$

Die einzelnen Elemente sind

$$\frac{1}{2w(s, m_1^2, m_2^2)} \equiv \text{Flussfaktor}, \quad (5.137)$$

und

$$|\langle b_1(\vec{q}_1) \dots b_n(\vec{q}_n) | \mathcal{T} | a_1(\vec{p}_1) a_2(\vec{p}_2) \rangle|^2 = \text{Matrixelement}. \quad (5.138)$$

sowie

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_{j=1}^n q_j - p_1 - p_2 \right) \prod_{j=1}^n \frac{d^3 q_j}{(2\pi)^3 2q_j^0} = \text{Phasenraum} \equiv \text{dLIPS}(n), \quad (5.139)$$

Der Phasenraum ist universell und Lorentz-invariant. Auch das Matricelement ist Lorentz-invariant, hängt aber vom jeweiligen Prozess ab. Integrieren wir über den Phasenraum, so schreiben wir im folgenden

$$\int \text{dLIPS}(n) \equiv \text{Lorentz-invariant phase space (Lorentz-invarianter Phasenraum)} \quad (5.140)$$

Den Flussfaktor können wir schreiben als

$$2w(s, m_1^2, m_2^2) = 4m_2 |\vec{p}_{1L}| = 4(E_1^2 m_2^2 - m_1^2 m_2^2)^{\frac{1}{2}} = 4[(p_{1L} p_{2L})^2 - m_1^2 m_2^2]^{\frac{1}{2}}. \quad (5.141)$$

Bei $d\sigma$ handelt sich um den differentiellen Wirkungsquerschnitt, der über alle Impulsfigurationen integrierbar ist. Wir haben also für den Wirkungsquerschnitt (wir lassen den Index L im folgenden weg)

$$\int d\sigma = \frac{1}{4[(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2]^{\frac{1}{2}}} \int |\langle f | \mathcal{T} | i \rangle|^2 \text{dLIPS}(n). \quad (5.142)$$

Weitere Bemerkungen:

1. Bei Teilchen mit Spin ist folgendermaßen zu verfahren: Für jedes unpolarisierte Teilchen im Anfangszustand ist über seine Spinzustände zu mitteln. Für jede nicht beobachtete Spinpolarisation eines Teilchens im Endzustand ist über entsprechende Spinzustände zu summieren. Das heißt in diesem Fall:

$$|\mathcal{T}_{fi}|^2 \rightarrow \sum'_{\text{Spins}} |\mathcal{T}_{fi}|^2 \equiv \frac{1}{(2s_{a_1} + 1)(2s_{a_2} + 1)} \sum_{\text{Spins im Endzustand}} |\mathcal{T}_{fi}|^2, \quad (5.143)$$

wobei s_{a_1}, s_{a_2} jeweils der Spin von Teilchen a_1 und a_2 ist. Für die Spinsummen ist zu verwenden (siehe Übungsblatt)

$$\sum_{s=1}^2 u(\vec{p}, s)_\alpha \bar{u}(\vec{p}, s)_\beta = (\not{p} + m)_{\alpha\beta} \quad (5.144)$$

$$\sum_{s=1}^2 v(\vec{p}, s)_\alpha \bar{v}(\vec{p}, s)_\beta = (\not{p} - m)_{\alpha\beta} \quad (5.145)$$

Beachte, der Gewichtungsfaktor $1/(2s+1)$ gilt nur für massive Teilchen. Wenn es sich um ein Photon oder Gluon handelt, dann ist der Gewichtungsfaktor 2, da masselose Teilchen nur 2 physikalische Polarisationszustände haben.

2. Falls n_0 der n Endzustandsteilchen identisch sind, egal ob Bosonen oder Fermionen, dann ist der Zustand (5.119) nicht korrekt normiert. Es fehlt der Faktor $1/\sqrt{n_0!}$. Das heißt, in diesem Fall muss $d\sigma$ oder dw_{fi} mit $1/n_0!$ multipliziert werden. Also

$$d\sigma = \frac{1}{2w} (\prod_j d\vec{q}_j) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(Q - P) \sum'_{\text{Spins}} |\mathcal{T}_{fi}|^2 \cdot \frac{1}{n_0!}. \quad (5.146)$$

3. Der Wirkungsquerschnitt wird üblicherweise in der Einheit *barn* angegeben. Es gilt

$$\frac{1}{\text{GeV}^2} = 0.389 \cdot 10^{-3} \text{ barn} . \quad (5.147)$$

Der Wirkungsquerschnitt ist mit der Anzahl der Ereignisse über die sogenannte Luminosität L verknüpft:

$$N = L \cdot \sigma . \quad (5.148)$$

Diese kann über einen sehr genau bekannten Referenzwirkungsquerschnitt bestimmt werden, den man in der Theorie sehr genau berechnet hat. Zum Beispiel benutzt man an Elektron-Positron-Collidern den Wirkungsquerschnitt der Bhabha-Streuung $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$, an Hadroncollidern wie dem LHC z.B. die Produktion von W -Bosonen, $pp \rightarrow W^+W^-$. Die Luminosität ist also grob gesagt ein Maß für den einlaufenden Strom. So wurde für das LEP (1993-1998) eine integrierte Luminosität von etwa 200 pb^{-1} gemessen, für das Tevatron Run II (4/02-9/11) - D0 - 11.9 fb^{-1} /delivered (10.7 fb^{-1} /recorded), LHC (1/18-6/18) ATLAS 20.8 fb^{-1} delivered (19.5 fb^{-1} recorded), LHC CMS 20.72 fb^{-1} delivered (19.55 fb^{-1} recorded).

Kapitel 6

Der Prozess $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

6.1 Das Myon

- ◇ Das Myon hat eine Masse von

$$m_\mu = 105.6 \text{ MeV} \approx 200 m_e . \quad (6.1)$$

- ◇ Alle anderen Eigenschaften (Quantenzahlen, Wechselwirkungen usw.) sind identisch mit denen des Elektrons.
- ◇ Die Wechselwirkung mit dem Photon ist gegeben durch (Fig. 6.1) $-ie\gamma^\nu$.



Abbildung 6.1: Der Photon-Myon-Myon Vertex.

- ◇ Allerdings ist das Myon instabil. Es zerfällt über die schwache Wechselwirkung gemäß (siehe Fig. 6.2)

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu . \quad (6.2)$$

Hierbei ist $\bar{\nu}_e$ das Anti-Elektron-Neutrino und ν_μ das Myon-Neutrino. Wir setzen $m_{\nu_{e/\mu}} \approx 0$.

- ◇ Die Berechnung der Zerfallsbreite liefert (siehe Übungsblatt)

$$\Gamma_\mu = \frac{G_F^2 \cdot m_\mu^5}{192 \pi^3} = 3.001 \cdot 10^{-19} \text{ GeV} , \quad (6.3)$$

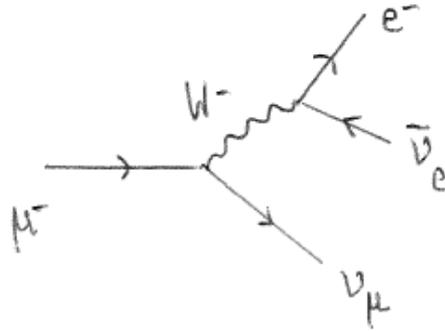


Abbildung 6.2: Der Myon-Zerfall.

wobei G_F die Fermi-Konstante ist,

$$G_F = 1.16637 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{GeV}^2} . \quad (6.4)$$

Und für die Lebensdauer ergibt sich

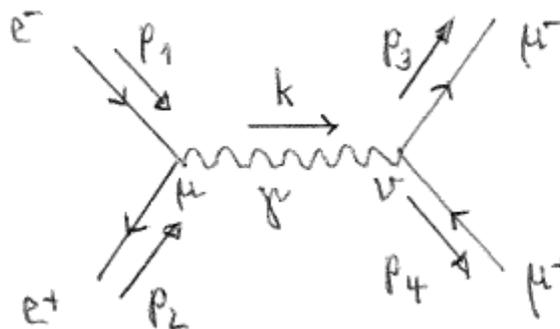
$$\frac{\hbar}{\Gamma_\mu} = \frac{6.582 \cdot 10^{-25} \text{ GeV} \cdot \text{s}}{3.001 \cdot 10^{-19} \text{ GeV}} \approx 2.19 \cdot 10^{-6} \text{ s} . \quad (6.5)$$

6.2 Der Wirkungsquerschnitt für $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

Zu dem Prozess

$$e^-(p_1, s_1) + e^+(p_2, s_2) \rightarrow \mu^-(p_3, s_3) + \mu^+(p_4, s_4) \quad (6.6)$$

trägt nur ein Diagramm bei, siehe Fig. 6.3. Wegen Impulserhaltung haben wir für den Pho-

Abbildung 6.3: Der Prozess $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$.

tonimpuls k ,

$$k = p_1 + p_2 = p_3 + p_4 . \quad (6.7)$$

Wir führen die abkürzende Schreibweise $u_1 \equiv u(\vec{p}_1, s_1)$ etc. ein. Damit haben wir unter Anwendung der Feynmanregeln für das Diagramm

$$\mathcal{M} = \bar{v}_{2\alpha}(-ie)\gamma_{\alpha\beta}^\mu u_{1\beta} \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \bar{u}_{3\delta}(-ie)\gamma_{\delta\rho}^\nu v_{4\rho}. \quad (6.8)$$

Für \mathcal{M}^\dagger finden wir

$$\mathcal{M}^\dagger = (ie)^2 \bar{v}_{4\sigma} \gamma_{\sigma\tau}^{\nu'} u_{3\tau} \frac{ig_{\mu'\nu'}}{k^2 - i\epsilon} \bar{u}_{1\eta} \gamma_{\eta\omega}^{\mu'} v_{2\omega}. \quad (6.9)$$

Hier haben wir verwendet, dass

$$(\bar{v}_a \gamma^\mu u_b)^\dagger = (v_a^\dagger \gamma_0 \gamma^\mu u_b)^\dagger = u_b^\dagger \gamma^{\mu\dagger} \gamma_0^\dagger v_a = u_b^\dagger \gamma_0 \gamma^\mu \underbrace{\gamma_0 \gamma_0}_{=1} v_a = \bar{u}_b \gamma^\mu v_a, \quad (6.10)$$

denn

$$\bar{v} \equiv v^\dagger \gamma_0 \quad \text{und} \quad \bar{u} \equiv u^\dagger \gamma_0 \quad (6.11)$$

$$\gamma_0^\dagger = \gamma_0 \quad (6.12)$$

$$\gamma_\mu^\dagger = \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0. \quad (6.13)$$

Wir berechnen den unpolarisierten Wirkungsquerschnitt. Das heißt wir mitteln über die Polarisierungen im Anfangszustand und summieren über die Polarisierungen im Endzustand,

$$\frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} |\mathcal{M}|^2. \quad (6.14)$$

Verwendung der Relationen (5.144), (5.145) liefert damit

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^4}{4k^4} (\not{p}_2 - m_e)_{\omega\alpha} \gamma_{\alpha\beta}^\mu (\not{p}_1 + m_e)_{\beta\eta} \gamma_{\eta\omega}^{\mu'} g_{\mu\nu} g_{\mu'\nu'} (\not{p}_3 + m_\mu)_{\tau\delta} \gamma_{\delta\rho}^\nu (\not{p}_4 - m_\mu)_{\rho\sigma} \gamma_{\sigma\tau}^{\nu'} \\ &= \frac{e^4}{4k^4} \text{Sp}[(\not{p}_2 - m_e) \gamma^\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma^{\nu'}] \cdot \text{Sp}[(\not{p}_3 + m_\mu) \gamma^\mu (\not{p}_4 - m_\mu) \gamma^{\nu'}]. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Da die Spur für eine ungerade Anzahl von Gamma-Matrizen verschwindet, haben wir

$$\text{Sp}[(\not{p}_3 + m_\mu) \gamma^\mu (\not{p}_4 - m_\mu) \gamma^{\nu'}] = \text{Sp}(\not{p}_3 \gamma^\mu \not{p}_4 \gamma^{\nu'}) - m_\mu^2 \text{Sp}(\gamma^\mu \gamma^{\nu'}). \quad (6.16)$$

Zur weiteren Auswertung verwenden wir

$$\text{Sp}(\gamma^\mu \gamma^{\nu'}) = 4 \quad (6.17)$$

$$\begin{aligned} p_{3\alpha'} p_{4\beta'} \text{Sp}(\gamma^{\alpha'} \gamma^\mu \gamma^{\beta'} \gamma^{\nu'}) &= p_{3\alpha'} p_{4\beta'} 4 [g^{\mu\beta'} g^{\nu'\alpha'} + g^{\mu\alpha'} g^{\nu'\beta'} - g^{\mu\nu'} g^{\alpha'\beta'}] \\ &= 4 [p_3^{\nu'} p_4^\mu + p_3^\mu p_4^{\nu'} - g^{\mu\nu'} p_3 \cdot p_4]. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Damit haben wir für die Spur insgesamt

$$4 [p_3^{\nu'} p_4^\mu + p_3^\mu p_4^{\nu'} - p_3 \cdot p_4 g^{\mu\nu'} - m_\mu^2 g^{\mu\nu'}]. \quad (6.19)$$

Und für die andere Spur finden wir analog

$$4 [p_1^{\nu'} p_2^\mu + p_1^\mu p_2^{\nu'} - p_1 \cdot p_2 g^{\mu\nu'} - m_e^2 g^{\mu\nu'}]. \quad (6.20)$$

Im folgenden wird die Elektronenmasse auf null gesetzt, $m_e = 0$. Der Fehler ist dabei von der Ordnung $m_e^2/m_\mu^2 = 1/200^2$. Multiplikation von (6.19) und (6.20) liefert dann schließlich (nachrechnen!)

$$\frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4k^4} 16[2(p_2 \cdot p_3)(p_1 \cdot p_4) + 2(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) + 2m_\mu^2(p_1 \cdot p_2)] . \quad (6.21)$$

Im Schwerpunktsystem, siehe Fig. 6.4, mit der Schwerpunktsenergie \sqrt{s} haben wir für die Vierervektoren

$$p_1 = \frac{\sqrt{s}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \frac{\sqrt{s}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$p_3 = \frac{\sqrt{s}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \sin \theta \cos \phi \\ \beta \sin \theta \sin \phi \\ \beta \cos \theta \end{pmatrix}, \quad p_4 = \frac{\sqrt{s}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\beta \sin \theta \cos \phi \\ -\beta \sin \theta \sin \phi \\ -\beta \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (6.22)$$

mit

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{4m_\mu^2}{s}}. \quad (6.23)$$

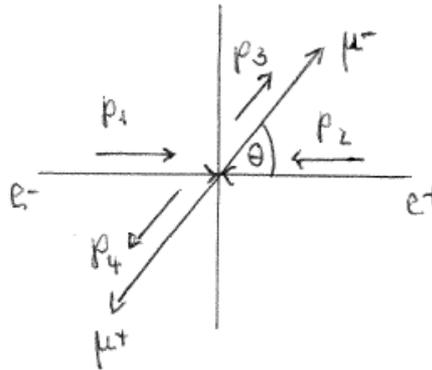


Abbildung 6.4: Schwerpunktsystem.

Für die einzelnen benötigten Größen finden wir damit

$$p_1 \cdot p_2 = \frac{s}{2}, \quad k^2 = (p_1 + p_2)^2 = s \quad (6.24)$$

$$p_1 \cdot p_3 = p_2 \cdot p_4 = \frac{s}{4}(1 - \beta \cos \theta) \quad \text{und} \quad p_1 \cdot p_4 = p_2 \cdot p_3 = \frac{s}{4}(1 + \beta \cos \theta). \quad (6.25)$$

Damit finden wir

$$\frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} |\mathcal{M}|^2 = e^4 [1 + \beta^2 \cos^2 \theta + (1 - \beta^2)]. \quad (6.26)$$

Dabei wurde verwendet, dass

$$\frac{m_\mu^2}{s} = \frac{1}{4}(1 - \beta^2). \quad (6.27)$$

Für den differentiellen Wirkungsquerschnitt benötigen wir noch den Phasenraum. Er ist für den $2 \rightarrow 2$ Prozess gegeben durch

$$\begin{aligned} d\text{LIPS}(2) &= \frac{1}{2w(s, m_e^2, m_e^2)} \int \frac{d^3p_3}{(2\pi)^3 2p_3^0} \frac{d^3p_4}{(2\pi)^3 2p_4^0} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{2w} \int \frac{d^3p_3}{2p_3^0} \int d^4p_4 \delta(p_4^2 - m_4^2) \theta(p_4^0) \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{2s} \int \frac{d^3p_3}{2p_3^0} \underbrace{\delta((p_1 + p_2 - p_3)^2 - m_\mu^2)}_{s - 2\sqrt{s}p_3^0 + m_\mu^2 - m_\mu^2} \\ &= \frac{1}{8\pi^2 s} \int \underbrace{\frac{|\vec{p}_3|^2 d|\vec{p}_3|}{2p_3^0}}_{\frac{|\vec{p}_3| p_3^0 dp_3^0}{2p_3^0}} \underbrace{d\cos\theta d\phi}_{d\Omega} \frac{1}{2\sqrt{s}} \delta\left(p_3^0 - \frac{\sqrt{s}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{8\pi^2 s} \frac{1}{4\sqrt{s}} \frac{\sqrt{s}\beta}{2} \int d\Omega \\ &= \frac{\beta}{64\pi^2 s} \int d\Omega. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Dabei haben wir verwendet dass

$$w(s, m_e^2 = 0, m_e^2 = 0) = s \quad \text{und} \quad |\vec{p}_3| = \frac{\sqrt{s}\beta}{2}. \quad (6.29)$$

Und somit ergibt sich der unpolarisierte differentielle Wirkungsquerschnitt

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{\text{unpol}} = \frac{e^4\beta}{64\pi^2 s} \left(\frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} |\mathcal{M}|^2\right) = \frac{e^4\beta}{64\pi^2 s} [2 + \beta^2(\cos^2\theta - 1)]. \quad (6.30)$$

Den totalen Wirkungsquerschnitt erhält man durch Integration über den Raumwinkel Ω ,

$$\int d\Omega = 2\pi \int_{-1}^1 d\cos\theta. \quad (6.31)$$

Mit der Feinstrukturkonstanten

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137} \quad (6.32)$$

und $\beta \approx 1$ ergibt sich der totale Wirkungsquerschnitt

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}. \quad (6.33)$$

Bei z.B. einer Schwerpunktsenergie von $\sqrt{s} = 90$ GeV ergibt sich

$$\sigma = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{1}{137}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{90}\right)^2 \cdot 0.389 \cdot 10^{-3} \text{ barn} \approx 11 \text{ pb}. \quad (6.34)$$

6.3 Der Wirkungsquerschnitt für $e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}$

Hadronen sind Teilchen, die an der starken Wechselwirkung teilnehmen. Hadronen sind z.B. p, n, π, η, ρ usw. Sie sind zusammengesetzt aus Quarks und Gluonen.

Berechnet man den Wirkungsquerschnitt des Prozesses

$$e^+ + e^- \rightarrow \text{Hadronen} , \quad (6.35)$$

so ist dieser bis zur ersten Ordnung in der starken Kopplungskonstanten identisch mit dem Prozess

$$e^+ + e^- \rightarrow q + \bar{q} . \quad (6.36)$$

Das zu dem Prozess beitragende Feynman-Diagramm ist in Fig. 6.5 dargestellt. Es gibt 6

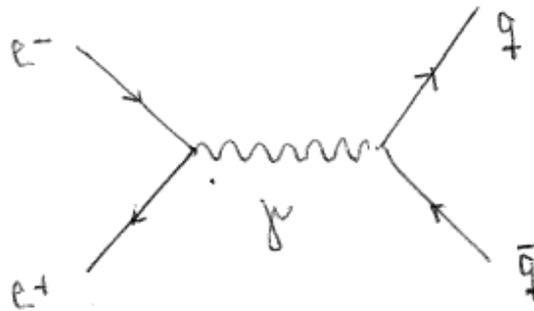


Abbildung 6.5: Feynman-Diagramm für den Prozess $e^+ + e^- \rightarrow q + \bar{q}$.

Quarks, up (u), down (d), charm (c), strange (s), top (t) und bottom (b). Die Feynmanregel für den $\gamma - q - \bar{q}$ -Vertex, Fig. 6.6, lautet

$$ieQ_q\gamma^\mu \quad \text{mit} \quad Q_U = \frac{2}{3}(U = u, c, t) \text{ und } Q_D = -\frac{1}{3}(D = d, s, b) . \quad (6.37)$$

Unter Berücksichtigung der drei Farben der Quarks erhält man

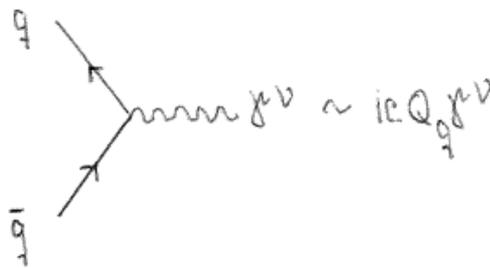


Abbildung 6.6: Der Vertex $\gamma - q - \bar{q}$.

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \sum_q Q_q^2 \cdot 3 . \quad (6.38)$$

Und damit

$$R = \frac{\sigma(e^+ + e^- \rightarrow \text{Hadronen})}{\sigma(e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-)} = 3 \cdot \sum_q |Q_q|^2. \quad (6.39)$$

Beachte, dass für $2m_s < \sqrt{s} < 2m_c$ gilt

$$R = 3 \cdot [Q_u^2 + Q_d^2 + Q_s^2] = 3 \cdot \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \right] = 2. \quad (6.40)$$

Für $2m_c < \sqrt{s} < 2m_b$ haben wir

$$R = 2 + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{10}{3} \quad (6.41)$$

und für $2m_b < \sqrt{s} < 2m_t$

$$R = \frac{11}{3}. \quad (6.42)$$

6.4 Höhere Ordnungskorrekturen zu $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$

QED Korrekturen verschiedener Ordnungen in e zu $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ sind in Fig. 6.7 dargestellt.

6.5 Korrekturen zum Photon-Propagator

Die Korrekturen zum Photonpropagator sind in Fig. 6.8 dargestellt. Die Vakuum-Polarisation Π kann man durch die in Fig. 6.9 dargestellten Feynman-Diagramme beschreiben. Die Vakuum-Polarisation lässt sich schreiben als

$$i\Pi_{\mu\nu}(q) = \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} \exp(iqx) \langle 0 | T j_\mu(x) j_\nu(0) | 0 \rangle \quad \text{mit} \quad j_\mu(x) = e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x). \quad (6.43)$$

Beachte, dass

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad \implies \quad q_\mu \Pi^{\mu\nu} = 0. \quad (6.44)$$

Der Polarisationstensor $\Pi^{\mu\nu}$ kann mittels einer Kovariantenzerlegung umgeschrieben werden:

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = A g_{\mu\nu} + B q_\mu q_\nu. \quad (6.45)$$

Wegen Glg. (6.44) gilt

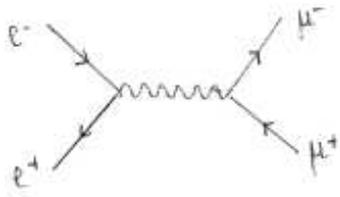
$$A = -Bq^2 = q^2\Pi(q^2). \quad (6.46)$$

Damit lässt sich $\Pi_{\mu\nu}(q)$ mit einer skalaren Größe $\Pi(q^2)$ ausdrücken:

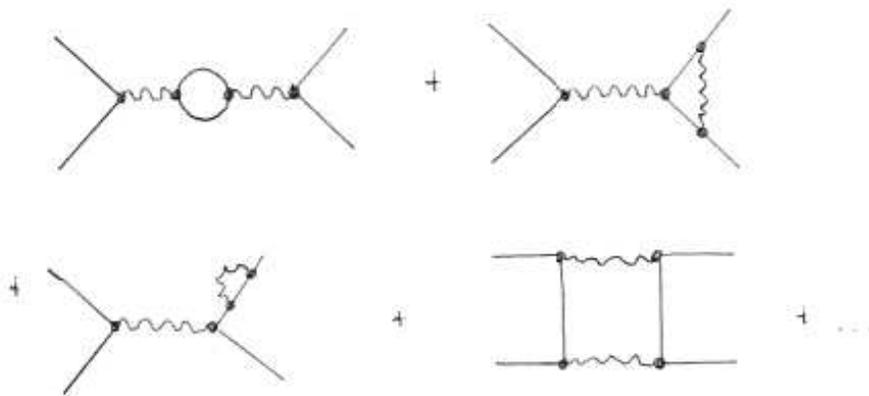
$$\Pi_{\mu\nu} = (q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \Pi(q^2). \quad (6.47)$$

Beachte aber, dass $\Pi_{\mu\nu}$ immer an einen erhaltenen Strom koppelt, siehe Fig. 6.10. Die Gleichung $q_\nu j^\nu = 0$ folgt aus $\partial_\nu j^\nu = 0$. Die $q_\mu q_\nu$ -Terme liefern also keinen Beitrag. Somit folgt mithilfe der geometrischen Reihe Fig. 6.11.

* $\mathcal{O}(e^2)$



* $\mathcal{O}(e^4)$



* $\mathcal{O}(e^6)$



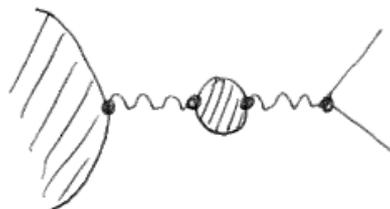
Abbildung 6.7: Höhere Ordnungskorrekturen zu $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$.

$$\begin{aligned}
 & \mu \text{---} \text{---} \nu + \mu \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \nu + \mu \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \nu + \dots \\
 & = \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} + \frac{-ig_{\mu\beta}}{q^2 + i\epsilon} i\Pi_{\rho\alpha}(q) \frac{-ig_{\alpha\nu}}{3i^2\epsilon} + \frac{-ig_{\mu\beta}}{3i^2\epsilon} i\Pi_{\rho\alpha}(q) \frac{-ig_{\alpha\nu}}{3i^2\epsilon} i\Pi_{\rho\sigma}(q) + \dots
 \end{aligned}$$

Abbildung 6.8: Höhere Ordnungskorrekturen zum Photonpropagator. Der letzte Summand unter dem Bild ist falsch. Es muss heißen: $\frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2+i\epsilon} i\Pi_{\rho\alpha}(q) \frac{-ig_{\alpha\beta}}{q^2+i\epsilon} i\Pi_{\beta\sigma}(q) \frac{-ig_{\sigma\nu}}{q^2+i\epsilon}$.

$$i\Pi_{\mu\nu}(q) = \text{diagram with shaded blob} = \text{diagram with empty circle} + \text{diagram with wavy circle} + \text{diagram with wavy circle} + \text{diagram with wavy circle} + \dots$$

Abbildung 6.9: Diagramme zur Vakuum-Polarisation II.



$$\sim \Pi_{\mu\nu} j^\nu = \tilde{\Pi}(q^2) (q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) j^\nu$$

$$= \tilde{\Pi}(q^2) q^2 g_{\mu\nu} \quad \text{wegen } q_\nu j^\nu = 0$$

Abbildung 6.10: Kopplung an einen erhaltenen Strom.

$$\text{wavy line} + \text{wavy line with shaded blob} + \dots = \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} [1 + q^2 \tilde{\Pi}(q^2) + (q^2 \tilde{\Pi}(q^2))^2 + \dots]$$

$$= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2(1 - \tilde{\Pi}(q^2)) + i\epsilon}$$

Abbildung 6.11: Korrigierter Photonpropagator. Die erste Zeile der Formel ist falsch. Es muss heißen $\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} [1 + \Pi(q^2) + (\Pi(q^2))^2 + \dots]$.

Kapitel 7

Schleifendiagramme

7.1 Beispiel: ϕ^4 -Theorie

Wir betrachten die skalare ϕ^4 -Theorie mit der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = : \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 : - \frac{1}{2}m^2 : \phi^2 : - \frac{\lambda}{4!} : \phi^4 : \quad \text{mit} \quad \mathcal{L}_{WW} = -\frac{\lambda}{4!} : \phi^4 : . \quad (7.1)$$

Wir haben für die S -Matrix bis zur Ordnung n

$$S = \sum_n \frac{i^n}{n!} T \int dx' \int dx'' \dots \int dx^{(n)} \mathcal{L}_{WW}(x') \mathcal{L}_{WW}(x'') \dots \mathcal{L}_{WW}(x^{(n)}) . \quad (7.2)$$

Für die $2 \rightarrow 2$ -Streuung müssen wir das Matrixelement

$$\langle 0 | a(3) a(4) S a^\dagger(1) a^\dagger(2) | 0 \rangle \quad (7.3)$$

bestimmen. Wir haben in Bornscher-Näherung (auch Baumgraphenniveau \equiv Beitrag niedrigster Ordnung in der Kopplungskonstanten) Fig. 7.1. Es ist

$$S_{fi}^{\text{Born}} = \langle 0 | a(3) a(4) \frac{(-i)\lambda}{4!} \int dx' : \phi(x') \phi(x') \phi(x') \phi(x') : a^\dagger(1) a^\dagger(2) | 0 \rangle$$

Abbildung 7.1: Beitrag auf Baumgraphenniveau.

$$\phi(x') a^\dagger(1) = \exp(-ip_1 x') \quad (7.4)$$

Außerdem sind $4!$ Permutationen zu berücksichtigen. Somit erhalten wir

$$S_{fi}^{\text{Born}} = -i\lambda \int dx' \exp[i(p_3 + p_4 - p_1 - p_2)x'] = -i\lambda \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) . \quad (7.5)$$

Und damit

$$\mathcal{T}_{fi} = -\lambda . \quad (7.6)$$

Zur Ordnung λ^2 müssen wir bestimmen

$$\left\langle 0 \left| a(3)a(4) \frac{1}{2} \cdot \frac{(-i\lambda)^2}{(4!)^2} \int dx' dx'' T [: \phi(x')^4 : : \phi(x'')^4 :] a^\dagger(1)a^\dagger(2) \right| 0 \right\rangle . \quad (7.7)$$

Über das Wick-Theorem erhalten wir typische Beiträge:

1. Die Kontraktionen von $a^\dagger(1), a^\dagger(2)$ mit $a(3), a(4)$ verschwinden, da wegen $\vec{p}_3 \neq \vec{p}_1$

$$\langle 0 | a(3)a^\dagger(1) | 0 \rangle \sim \delta(\vec{p}_3 - \vec{p}_1) = 0 . \quad (7.8)$$

Somit bleiben nur die Kontraktionen von $\phi a, \phi a^\dagger$ oder $\phi(x')\phi(x'')$.

2. Da \mathcal{L}_{WW} normalgeordnet ist, gibt es keine Beiträge, in denen $\phi(x')\phi(x')$ kontrahiert sind (sogenannte tadpole Diagramme). Einen nicht-verschwindenden Beitrag erhält man daher nur, wenn jeweils 2 der Operatoren a, a^\dagger mit 2 Feldern $\phi(x')$ und die beiden anderen Operatoren mit $\phi(x'')$ kontrahiert werden. Wir haben also

$$S_{fi}^{1\text{-Schleifen}} = \frac{(-i\lambda)^2}{2 \cdot (4!)^2} \int dx' dx'' T [\text{Term 1} + \text{Term 2} + \text{Term 3}] . \quad (7.9)$$

Ein Beitrag zu Term 1 ist in Fig. 7.2 gegeben. Es gibt insgesamt $(4!)^2$ Möglichkeiten der Kontraktion, die zu demselben Ergebnis führen. werden. Zum Beispiel ergibt der Beitrag

$$\langle 0 | a(3)a(4) : \phi(x')\phi(x')\phi(x')\phi(x') : : \phi(x'')\phi(x'')\phi(x'')\phi(x'') : a^\dagger(1)a^\dagger(2) | 0 \rangle$$

Abbildung 7.2: Beitrag zu Term 1.

in Fig. 7.3 nochmals das gleiche Resultat. Ein Beitrag zu Term 2 ist in Fig 7.4 gegeben.

$$\langle 0 | a(3)a(4) : \phi(x')\phi(x')\phi(x')\phi(x') : : \phi(x'')\phi(x'')\phi(x'')\phi(x'') : a^\dagger(1)a^\dagger(2) | 0 \rangle$$

Abbildung 7.3: Weiterer Beitrag vom Typ Term 1.

Es gibt wiederum $(4!)^2$ Möglichkeiten der Kontraktion, die zu demselben Ergebnis führen. Ein Beitrag zu Term 3 ist in Fig 7.5 gegeben. Es gibt wiederum $(4!)^2$ Möglichkeiten der Kontraktion, die zu demselben Ergebnis führen.

Auswertung des ersten Terms S_1 liefert

$$S_1 = \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int dx' dx'' \exp[i(p_3x' + p_4x' - p_1x'' - p_2x'')] \cdot \langle 0 | T \phi(x')\phi(x'') | 0 \rangle \cdot \langle 0 | T \phi(x')\phi(x'') | 0 \rangle . \quad (7.10)$$

$$\langle 0 | a(3) a(4) : \phi(x') \phi(x') \phi(x') \phi(x') : : \phi(x'') \phi(x'') \phi(x'') \phi(x'') : a^\dagger(1) a^\dagger(2) | 0 \rangle$$

Abbildung 7.4: Beitrag zu Term 2.

$$\langle 0 | a(3) a(4) : \phi(x') \phi(x') \phi(x') \phi(x') : : \phi(x'') \phi(x'') \phi(x'') \phi(x'') : a^\dagger(1) a^\dagger(2) | 0 \rangle$$

Abbildung 7.5: Beitrag zu Term 3.

Wir haben

$$\langle 0 | T \phi(x') \phi(x'') | 0 \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \exp[-ip(x' - x'')]. \quad (7.11)$$

Und somit

$$S_1 = \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int dx' \int dx'' \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \cdot \exp[ix'(p_3 + p_4 - p - q) + ix''(-p_1 - p_2 + p + q)]. \quad (7.12)$$

Integration über x' und x'' liefert zwei δ -Funktionen, also

$$S_1 = \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_3 + p_4 - p - q) \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(-p_1 - p_2 + p + q). \quad (7.13)$$

Integration über p liefert

$$S_1 = \frac{(-i\lambda)^2}{2} \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \cdot \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{[(q - p_1 - p_2)^2 - m^2 + i\epsilon]}. \quad (7.14)$$

Die Interpretation von S_1 im Ortsraum ist in Fig. 7.6 dargestellt. Die Interpretation von S_1 im Impulsraum ist in Fig. 7.7 dargestellt. Der Beitrag von S_2 ist in Fig. 7.8 dargestellt. Der

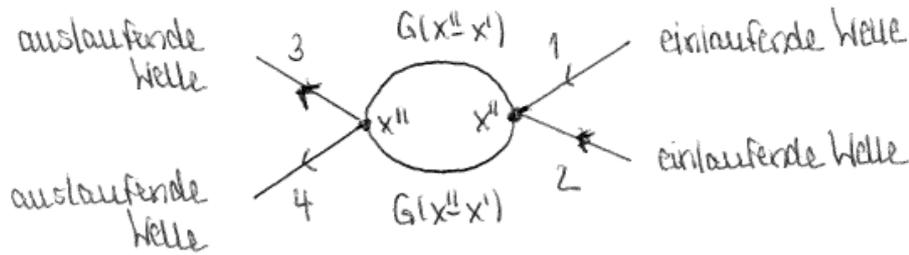


Abbildung 7.6: Interpretation von S_1 im Ortsraum. Am rechten Vertex muss es x' und nicht x'' heißen.

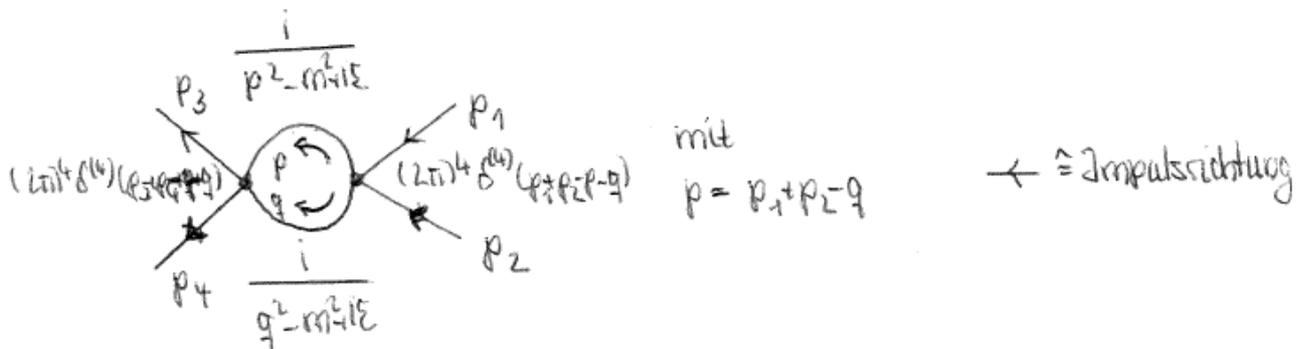


Abbildung 7.7: Interpretation von S_1 im Impulsraum.

Beitrag Term 1 hängt nur von

$$s = (p_1 + p_2)^2 \tag{7.15}$$

ab. Der Beitrag von Term 2 hängt nur von

$$t = (p_1 - p_3)^2 \tag{7.16}$$

ab. Der hier nicht gezeigte Beitrag von Term 3 hängt nur von

$$u = (p_1 - p_4)^2 \tag{7.17}$$

ab. Wir haben die Feynmanregeln

Propagator: $\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$ (7.18)

und

Vertex: $(-i\lambda)$ (7.19)

Dabei gilt an jedem Vertex Energie-Impuls-Erhaltung. Über Schleifenimpulse muss integriert werden. Und man hat eine δ -Funktion für die globale Energie-Impulserhaltung.

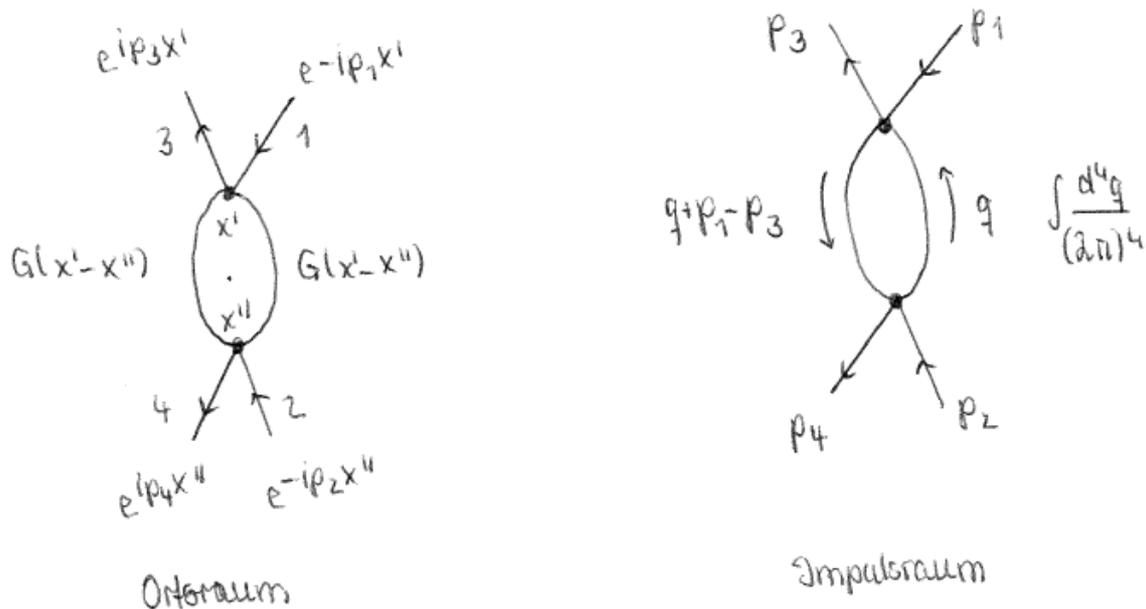


Abbildung 7.8: Interpretation von S_2 im Orts- (links) und im Impulsraum (rechts).

7.2 Divergenz-Verhalten

Wertet man Schleifen-Integrale aus, so zeigt sich, dass manche davon für Vierer-Impulse $\rightarrow \infty$ divergieren. Man nennt solche Divergenzen ultraviolette (UV) Divergenzen. Wir nehmen an, dass das Divergenzverhalten der Integrale durch Abzählen der Impuls-Potenzen bestimmt werden kann (= Power-Counting). Wir betrachten das folgende Beispiel:

$$\int d^4 q \frac{1}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \cdot \frac{1}{(q - p_1 - p_2)^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (7.20)$$

Für feste p_1, p_2, m und große q^2 ist der Integrand proportional zu $1/(q^2)^2$. Im Impulsraum ergibt dies eine logarithmische Divergenz. Im Ortsraum entspricht dies dem Quadrat einer singulären Funktion. Als nächstes betrachten wir eine 6-Teilchen-Reaktion, siehe Fig. 7.9, und untersuchen sie hinsichtlich möglicher Divergenzen. Das Hochenergieverhalten des zugehörigen Integrals ist gegeben durch

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{q^2} \right)^3 \quad (7.21)$$

Dieses Integral ist UV-konvergent. Ebenso sind 8-Teilchen-Reaktionen konvergent. Wir betrachten nun Zwei-Schleifen-Beiträge zum Propagator, siehe Fig. 7.10. Das zugehörige Schleifenintegral ist durch

$$(-i\lambda)^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 - m^2 + i\epsilon)} \cdot \frac{1}{(r^2 - m^2 + i\epsilon)} \cdot \frac{1}{(p - q + r)^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (7.22)$$

gegeben. Dieses Integral divergiert quadratisch. UV-Divergenzen treten nur bei Korrekturen zum Propagator und zum Vier-Teilchen-Vertex auf (modulo Subdiagramme). Die Divergenzen können in einer sogenannten renormierbaren Theorie durch Re-Definition der Parameter



Abbildung 7.9: Schleifen-Diagramm mit 6 äußeren Beinen.

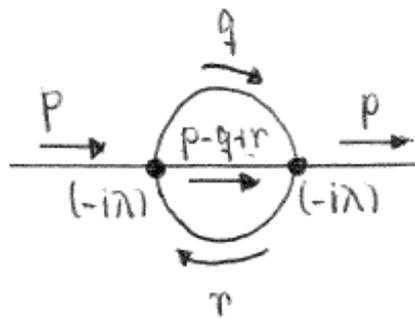


Abbildung 7.10: Zwei-Schleifen-Beitrag zum Propagator.

absorbiert werden. Die so definierten Parameter sind die physikalischen Parameter, d.h. die Parameter, die im Experiment gemessen werden. Die unrenormierten Parameter dagegen werden als nackte Parameter bezeichnet. Die ϕ^4 -Theorie ist renormierbar. Die Divergenzen von S -Matrixelementen können durch Umdefinition der Parameter λ und m absorbiert werden. Dagegen treten in nicht-renormierbaren Theorien in höheren Ordnungen immer wieder neue Typen von divergenten Streuamplituden auf.

Kapitel 8

Strahlungskorrekturen in der Quantenelektrodynamik

Die S -Matrix war gegeben durch

$$S = T \left[\exp \left(i \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \mathcal{L}_W(x) \right) \right]. \quad (8.1)$$

Entwicklung der S -Matrix nach der in \mathcal{L}_W enthaltenen Kopplungskonstanten der Wechselwirkung führt zu Diagrammen entsprechender Ordnung in der Kopplungskonstanten. So haben wir die in Fig. 8.1 dargestellten Diagramme, die in der Ordnung e^4 zur Elektron-Positron-Streuung beitragen. Das Divergenzverhalten wird mittels Power-Counting abgeschätzt.

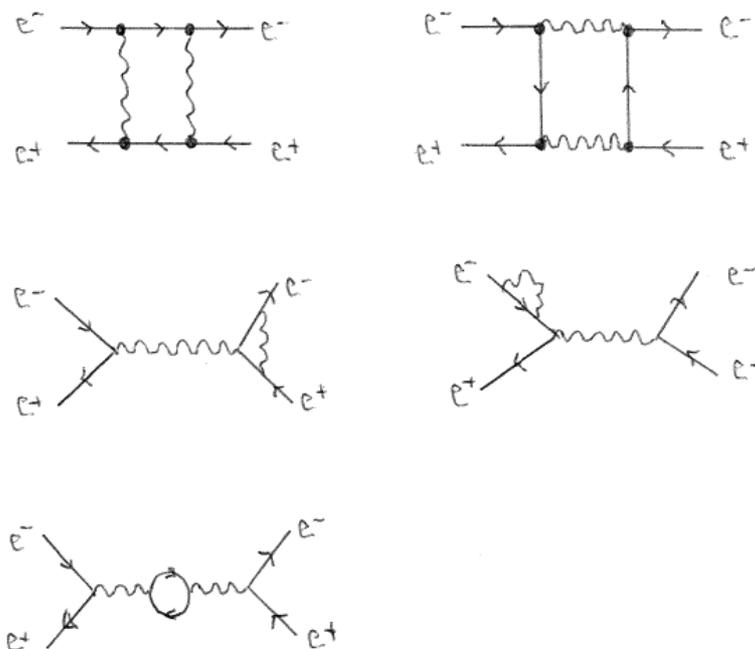


Abbildung 8.1: Beiträge der Ordnung e^4 zur Elektron-Positron-Streuung (keine vollständige Liste).

(a),(b)

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k} \frac{1}{k^2} \frac{1}{k} \frac{1}{k^2} : \text{konvergent im UV-Limes.} \quad (8.2)$$

(c)

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k} \frac{1}{k^2} \frac{1}{k} : \text{logarithmische Divergenz.} \quad (8.3)$$

(d)

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k} \frac{1}{k^2} : \text{lineare Divergenz.} \quad (8.4)$$

(e)

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k} \frac{1}{k} : \text{quadratische Divergenz.} \quad (8.5)$$

Im folgenden betrachten wir lediglich Schleifenanteile, und zwar diese, die eine UV-Divergenz aufweisen. Wir untersuchen also die in Fig. 8.2 dargestellten Diagramme. Bei den Baumgraphen-

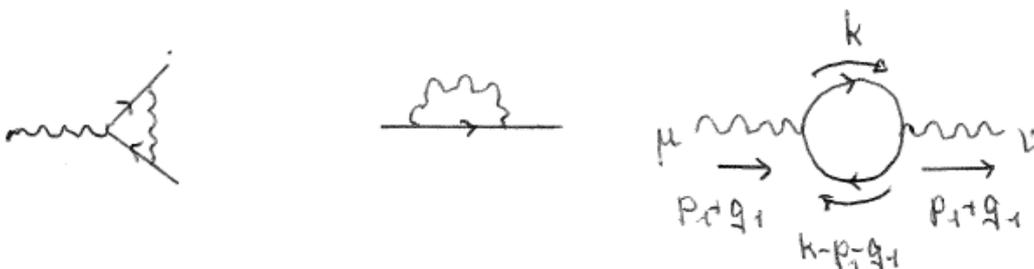


Abbildung 8.2: Divergente Schleifendiagramme.

Anteilen ist der Impuls der Propagatoren jeweils durch den äußeren Impuls festgelegt, siehe Fig. 8.3.

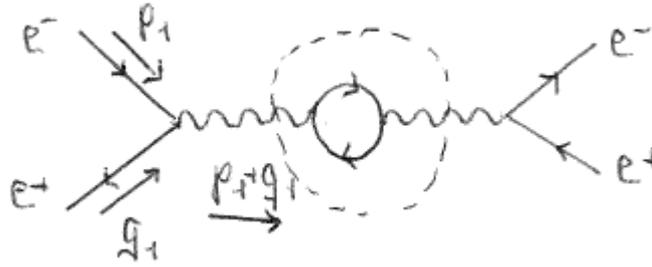


Abbildung 8.3: Festlegung der Impulse.

8.1 Die Vakuumpolarisation

In Fig. 8.1 (e) wird der Photon-Propagator

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_1 + q_1)^2 + i\epsilon} \quad (8.6)$$

aus der Bornschen Näherung ersetzt durch

$$\begin{aligned} & (-1) \frac{-ig_{\mu\rho}}{(p_1 + q_1)^2 + i\epsilon} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Sp} \left[\underbrace{(-ie\gamma_\rho) \cdot \frac{i}{\not{k} - \not{p}_1 - \not{q}_1 - m + i\epsilon} \cdot (-ie\gamma_\sigma) \cdot \frac{i}{\not{k} - m + i\epsilon}}_{\equiv i\Pi_{\rho\sigma}(q)} \right] \frac{-ig_{\sigma\nu}}{(p_1 + q_1)^2 + i\epsilon} \\ &= \frac{-i}{q^2 + i\epsilon} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \underbrace{(-1) \text{Sp} \left[(-ie\gamma_\mu) \cdot \frac{i}{\not{k} - \not{p}_1 - \not{q}_1 - m + i\epsilon} \cdot (-ie\gamma_\nu) \cdot \frac{i}{\not{k} - m + i\epsilon} \right]}_{\equiv i\Pi_{\mu\nu}(q)} \frac{-i}{q^2 + i\epsilon}, \quad (8.7) \end{aligned}$$

mit

$$q = p_1 + q_1. \quad (8.8)$$

Der Vorfaktor (-1) kommt von der geschlossenen Fermion-Schleife. Wir hatten bereits in Abschnitt 6.5 gesehen, dass sich die Vakuumpolarisation schreiben lässt als

$$\Pi_{\mu\nu} = (q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \Pi(q^2). \quad (8.9)$$

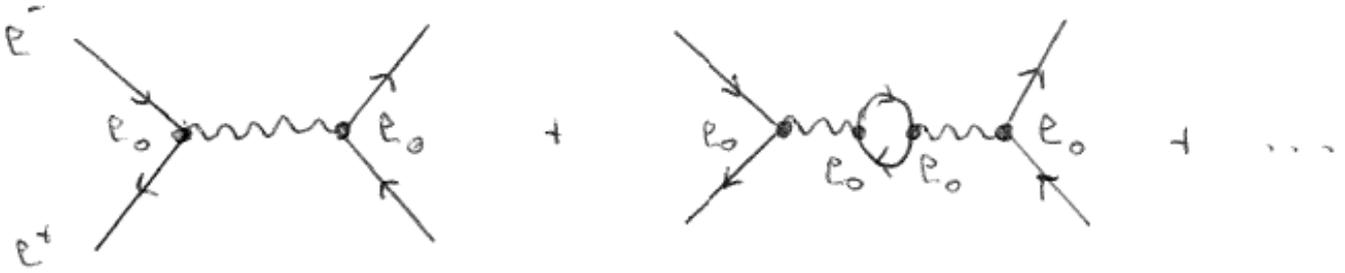
Durch die Kopplung an einen äußeren erhaltenen Strom tragen die $q_\mu q_\nu$ -Terme nicht bei. Und für den Photonpropagator ergab sich mithilfe der geometrischen Reihe (siehe Fig. 6.11)

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \left(\frac{1}{1 - \Pi(q^2)} \right). \quad (8.10)$$

Solange $\Pi_{\mu\nu}$ die Form $(q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \Pi(q^2)$ hat und $\Pi(q^2)$ bei $q^2 = 0$ regulär ist, bleibt der Pol des Propagators bei $q^2 = 0$ und damit bleibt $m_\gamma = 0$.

a) Streuung bei kleinem q^2 : Wir betrachten die Streuung bei kleinem q^2 , siehe Fig. 8.4. Diese ist proportional zu

$$\sim \frac{e_0^2}{q^2} \cdot \frac{1}{1 - \Pi(q^2)} \stackrel{\text{für } q^2 \rightarrow 0}{=} \frac{e_0^2}{1 - \Pi(0)} \cdot \frac{1}{q^2} \equiv \frac{e^2}{q^2}. \quad (8.11)$$

Abbildung 8.4: ee -Streuung.

Wir haben hier definiert

$$\frac{e_0^2}{1 - \Pi(0)} \equiv e_0^2 \cdot Z_3 = e^2 \quad \text{oder} \quad e_0^2(1 + \delta Z_3) \equiv e^2 . \quad (8.12)$$

Man bezeichnet e_0 als *nackte Ladung* und e als *physikalische Ladung*. Die zugehörige sogenannte Renormierungskonstante Z_3 ist definiert durch

$$\frac{1}{1 - \Pi(0)} = Z_3 = 1 + \delta Z_3 . \quad (8.13)$$

In führender Ordnung gilt $\delta Z_3 = \Pi(0)$. Wir diskutieren nun die q^2 -Abhängigkeit der Streuamplitude. Wir definieren

$$\hat{\Pi}(q^2) \equiv \Pi(q^2) - \Pi(0) . \quad (8.14)$$

Damit ist bis auf Terme höherer Ordnung

$$\frac{e_0^2}{q^2(1 - \Pi(q^2))} = \frac{e_0^2}{q^2(1 - \Pi(0) - \hat{\Pi}(q^2))} = \frac{e^2}{q^2(1 - \hat{\Pi}(q^2))} . \quad (8.15)$$

Wir geben hier ohne Rechnung das Ergebnis von $\hat{\Pi}(q^2)$ an:

$$\hat{\Pi}(q^2) = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 x(1-x) [-\log(\Delta) + \log(\Delta)|_{q^2=0}] dx , \quad (8.16)$$

mit

$$\Delta = m^2 - x(1-x) \cdot q^2 . \quad (8.17)$$

Damit ist

$$\hat{\Pi}(q^2) = +\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 x(1-x) \cdot \log \left[1 - x(1-x) \cdot \frac{q^2}{m^2} \right] dx . \quad (8.18)$$

Wir betrachten zunächst das Verhalten für kleine q^2/m^2 :

$$\hat{\Pi}(q^2) = -\frac{2\alpha}{\pi} \cdot \frac{q^2}{m^2} \int_0^1 x^2(1-x)^2 dx = -\frac{1}{15} \frac{\alpha}{\pi} \frac{q^2}{m^2} . \quad (8.19)$$

Den Beitrag zum Potential im nicht-relativistischen Grenzfall erhält man für $q^2 = -\bar{q}^2$. Also

$$\frac{e^2}{\bar{q}^2} \left[1 + \frac{1}{15} \frac{\alpha}{\pi} \frac{\bar{q}^2}{m^2} \right] = \frac{e^2}{\bar{q}^2} + \frac{1}{15} \frac{\alpha}{\pi} \frac{e^2}{m^2}. \quad (8.20)$$

Für kleine Impulsüberträge erhält man also eine Abänderung des Potentials von der Ordnung α/π . Im Ortsraum haben wir ($\alpha = e^2/(4\pi)$)

$$\frac{\alpha}{r} + \frac{\alpha^2}{15} \frac{4}{m^2} \delta(\vec{r}). \quad (8.21)$$

Man erhält einen zusätzlichen kurzreichweitigen Beitrag zum Potential und damit einen Beitrag zum Lamb-Shift (Aufspaltung zwischen s- und p-Niveaus).

Im folgenden wird das Verhalten bei großem positiven/negativen q^2/m^2 diskutiert:

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}(q^2) &= \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 x(1-x) \left[\ln \left(-\frac{q^2}{m^2 - i\epsilon} \right) + \ln \left(x(1-x) - \frac{m^2 - i\epsilon}{q^2} \right) \right] dx \\ &= \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 x(1-x) \left[\ln \left(-\frac{q^2}{m^2} - i\epsilon \right) + \ln(x(1-x)) + O \left(\frac{m^2}{q^2} \right) \right] dx \\ &= \frac{2\alpha}{\pi} \left[\underbrace{\int_0^1 x(1-x) dx}_{=\frac{1}{6}} \ln \left(-\frac{q^2}{m^2} - i\epsilon \right) + \underbrace{\int_0^1 x(1-x) \ln(x(1-x)) dx}_{=\frac{-5}{18}} \right]. \end{aligned} \quad (8.22)$$

Mit

$$\ln(x + i\epsilon) = \ln|x| + i\pi\theta(x) \quad (8.23)$$

haben wir

$$\hat{\Pi}(q^2) = \frac{\alpha}{3\pi} \left(\ln \left(\frac{q^2}{m^2} \right) + \theta(q^2) \cdot i\pi - \frac{5}{3} \right). \quad (8.24)$$

Damit gilt für große q^2 für den Propagator

$$\frac{e^2}{q^2 \left(1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \left(\frac{q^2}{m^2} \right) + \dots \right)}. \quad (8.25)$$

Die effektive Ladung wächst also mit q^2 . Der Ausdruck divergiert, wenn der Nenner des Bruchs null wird. Dies ist der Fall für

$$1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \left(\frac{q^2}{m^2} \right) = 0 \Rightarrow q^2 = m^2 \exp \left(\frac{3\pi}{\alpha} \right). \quad (8.26)$$

Diese kritische Stelle wird als Landau-Pol bezeichnet.

8.1.1 Bedeutung des Imaginärteils

Wir wollen im folgenden die Bedeutung des Imaginärteils der Vakuumpolarisation untersuchen. Hierfür betrachten wir den Fall $q^2 > 0$. Wir haben

$$\begin{aligned} \Im[\Pi(q^2)] &\sim \frac{2\alpha}{\pi} \Im \left[\int_0^1 x(1-x) \ln(m^2 - i\epsilon - q^2 x(1-x)) dx \right] \\ &= \frac{2\alpha}{\pi} \left[\int_0^1 x(1-x) \pi \theta(q^2 x(1-x) - m^2) dx \right]. \end{aligned} \quad (8.27)$$

Durch die Bestimmung der Nullstellen des Ausdrucks innerhalb der θ -Funktion erhält man als neuen Integrationsbereich

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} < x < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}}, \quad (8.28)$$

wobei $q^2 > 4m^2$ gelten muss, da ansonsten das Integral verschwindet. Somit erhält man

$$\Im[\Pi(q^2)] = 2\alpha \int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}}}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}}} x(1-x) dx = \begin{cases} \frac{\alpha}{3} \left(1 + \frac{2m^2}{q^2}\right) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} & \text{für } q^2 \geq 4m^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (8.29)$$

Die Interpretation führt auf das optische Theorem: Der totale Wirkungsquerschnitt ist durch den Imaginärteil der Vorwärtsstreuamplitude gegeben, siehe Fig. 8.5. Zur Erinnerung, wir

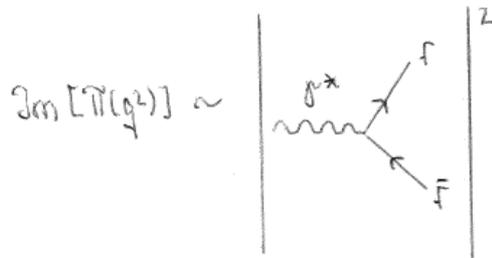


Abbildung 8.5: Zusammenhang zwischen Imaginärteil der Vorwärtsstreuamplitude und dem totalen Wirkungsquerschnitt.

hatten den Wirkungsquerschnitt für $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ mit $m_e = 0, m_\mu = m$ gegeben durch

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi}{3} \frac{\alpha^2}{s} \left(1 + \frac{2m^2}{s}\right) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}}. \quad (8.30)$$

8.1.2 Renormierung der äußeren Photonlinien

Wenn wir, ausgehend von einer äußeren Quelle, ein Photon ankoppeln, so taucht ebenfalls die Vakuumpolarisation auf, siehe Fig. 8.6. Entweder werden in äußeren Linien Blasen nicht berücksichtigt und $\epsilon_\mu \exp(-ikx)$ wird durch $\sqrt{Z_3} \epsilon_\mu \exp(-ikx)$ ersetzt (liefert dann $e_0 \cdot \sqrt{Z_3} = e_R$). Oder sie werden berücksichtigt, und es wird durch $\sqrt{Z_3}$ dividiert.

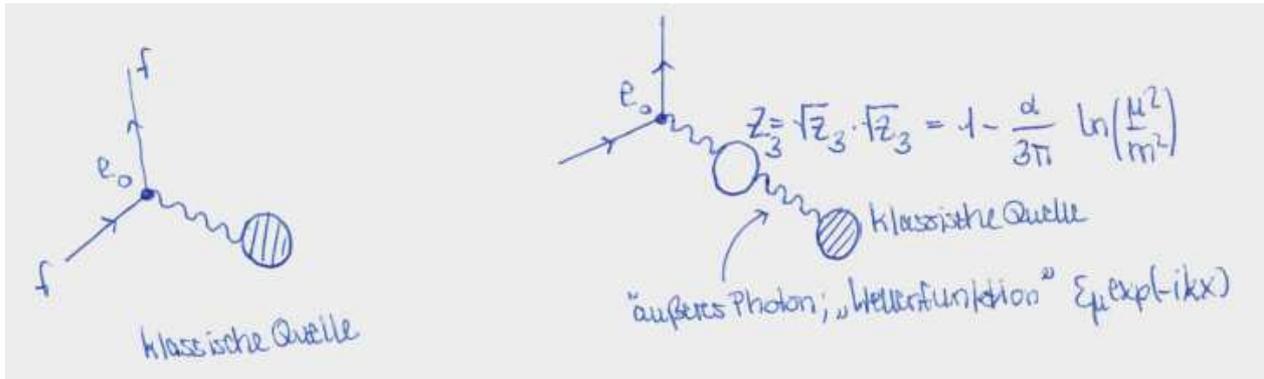


Abbildung 8.6: Äußere Photonlinie.

8.1.3 Der Elektron-Propagator

In inneren ($p^2 \neq m^2$) und äußeren Elektronlinien tritt das Selbstenergie-Diagramm Fig. 8.7 auf. Dies führt bei inneren Linien zur Abänderung des Elektron-Propagators, bei äußeren

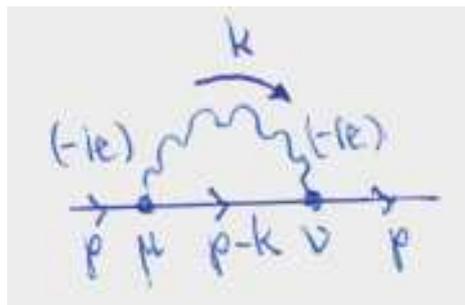


Abbildung 8.7: Die Selbstenergie des Elektrons.

Linien trägt es zur Elektron-Wellenfunktionsrenormierung bei. Wir haben

$$-i\Sigma(p) \equiv (-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(-i)}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \gamma_\nu \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m + i\epsilon} \gamma^\nu. \tag{8.31}$$

Es wurde hier eine kleine Photonmasse μ eingeführt. Und für den Photonpropagator wurde die Feynman-Eichung verwendet, also

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}. \tag{8.32}$$

Es gilt außerdem

$$\frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\epsilon} = \frac{\not{p} - \not{k} + m}{(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon}. \tag{8.33}$$

Wir geben wiederum das Ergebnis direkt an. Im Ergebnis tritt eine logarithmische Divergenz auf, die dadurch regularisiert wird, dass $\Sigma(p^2 \rightarrow \Lambda^2)$ abgezogen wird, wobei $\Lambda^2 \gg m^2$,

$\Lambda^2 \gg \mu^2$ und $\Lambda^2 \gg p^2$ gelte. Wir nennen das regularisierte $\Sigma(p)$ im folgenden $\bar{\Sigma}(p)$, und es ist

$$\bar{\Sigma}(p) = \Sigma_{p^2} - \Sigma_{\Lambda^2} = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 [2m - px] \ln \left(\frac{\Lambda^2 x}{m^2(1-x) + \mu^2 x - p^2 x(1-x) - i\epsilon} \right) dx. \quad (8.34)$$

Es tauchen hier Terme $\sim \mathbf{1}$ und $\sim p$ auf, die voneinander unabhängig sind. Hingegen hängen bei der Vakuumpolarisation die Terme $\sim g_{\mu\nu}$ und $k_\mu k_\nu$ voneinander ab.

8.1.4 Renormierung des Elektron-Propagators

Für den Elektron-Propagator (siehe Fig. 8.8) erhält man mithilfe der geometrischen Reihe

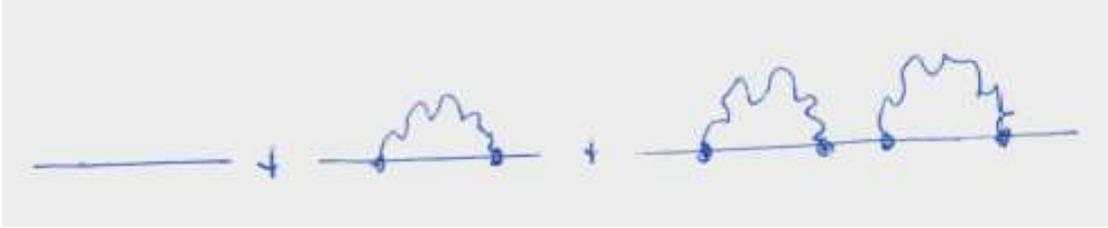


Abbildung 8.8: Der Elektron-Propagator.

$$\begin{aligned} \frac{i}{\not{p} - m_0} + \frac{i}{\not{p} - m_0} \cdot [-i\bar{\Sigma}(p)] \cdot \frac{i}{\not{p} - m_0} + \dots &= \frac{i}{\not{p} - m_0} \left[1 + \left(\frac{\bar{\Sigma}(p)}{\not{p} - m_0} \right) + \left(\frac{\bar{\Sigma}(p)}{\not{p} - m_0} \right)^2 + \dots \right] \\ &= \frac{i}{(\not{p} - m_0) \cdot \left(1 - \frac{\bar{\Sigma}(p)}{\not{p} - m_0} \right)} = \frac{i}{\not{p} - m_0 - \bar{\Sigma}(p)}. \end{aligned} \quad (8.35)$$

Wir fordern, dass der Pol bei der renormierten Masse m_R liegt, also bei $m = m_R$. Damit erhält man die Forderung

$$(\not{p} - m_0 - \bar{\Sigma}(p))|_{\not{p}=m} = 0. \quad (8.36)$$

Wir machen eine Taylor-Entwicklung in der Umgebung $\not{p} \approx m$ und erhalten

$$(\not{p} - m_0 - \bar{\Sigma}(p)) = (\not{p} - m) \left(1 - \left. \frac{d\bar{\Sigma}}{d\not{p}} \right|_{\not{p}=m} + O((\not{p} - m)^2) \right). \quad (8.37)$$

Nahe am Pol hat der Propagator die Form (wobei Z_2 die Wellenfunktionsrenormierungskonstante ist):

$$\frac{Z_2}{\not{p} - m} \quad \text{mit} \quad Z_2^{-1} = 1 - \left. \frac{d\bar{\Sigma}}{d\not{p}} \right|_{\not{p}=m} \quad \text{und} \quad \delta Z_2 = \left. \frac{d\bar{\Sigma}}{d\not{p}} \right|_{\not{p}=m} \quad (8.38)$$

Für den divergenten Anteil der Massenrenormierung findet man (ohne Rechnung)

$$\delta m = m_R - m_0 = \frac{3\alpha}{4\pi} m_0 \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m_0^2} \right) + \text{const.} \quad (8.39)$$

Somit können wir schreiben

$$\begin{aligned}
 \frac{i}{\not{p} - m_0 - \overline{\Sigma}(\not{p})} &= \frac{i}{(\not{p} - m_0) - \delta m + (Z_2^{-1} - 1 + O((\not{p} - m)^2)) \cdot (\not{p} - m_0)} \\
 &= \frac{i}{-\delta m + (Z_2^{-1} + O((\not{p} - m)^2)) \cdot (\not{p} - m_0)} \\
 &= \frac{iZ_2}{(\not{p} - m_0) \cdot (1 + Z_2 \cdot O((\not{p} - m)^2)) - Z_2\delta m} \\
 &= \frac{iZ_2}{(\not{p} - m_0 - \delta m) \cdot (1 + O((\not{p} - m)^2))} .
 \end{aligned} \tag{8.40}$$

Man bezeichnet

$$m_R = m_0 + \delta m \tag{8.41}$$

als die physikalische Masse m ! Es spielt Z_2 eine ähnliche Rolle wie Z_3 . Allerdings wird Z_2 nicht durch Ladungsrenormierung kompensiert sondern für innere Linien durch direkte Kompensation mit divergenten Vertizes. Bei äußeren Linien ergibt Z_3 die Wellenfunktionsrenormierung.

8.1.5 Vertexkorrektur

Wir betrachten das Diagramm Fig. 8.9. Unter Vernachlässigung der äusseren Spinoren finden

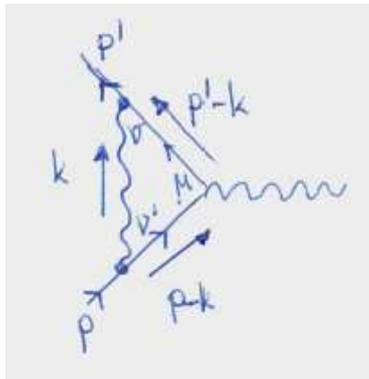


Abbildung 8.9: Vertexkorrektur.

wir

$$\Lambda_\mu(p', p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(-i)}{(k^2 - \mu^2 + i\epsilon)} \gamma_\nu \frac{i}{(\not{p}' - \not{k} - m + i\epsilon)} \gamma_\mu \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m + i\epsilon} \gamma^{\nu'} \tag{8.42}$$

Zur Regularisierung der Infrarotdivergenzen (Divergenzen bei kleinen Energien) wurde eine kleine Photonmasse μ eingeführt. Es treten zwei linear unabhängige äußere Impulse auf, die durch p und p' gegeben sind, wobei $p^2 = p'^2 = m^2$. Bei Streuung gilt $p_0, p'_0 > 0$. Für die $e^+ - e^-$ -Vernichtung ist $p_0 > 0$ und $p'_0 < 0$. Wir betrachten das Verhalten für $-p' + p \equiv q \rightarrow 0$ mit $q^2 < 0$. Wir haben für $\Lambda_\mu(p, p)$ eine Matrix im Spinorraum mit einem Lorentz-Index, die

nur von p (und λ^2) abhängt. Mögliche Formen sind $m\gamma_\mu f_1(p^2)$ oder $p_\mu f_2(p^2)\mathbf{1}$. Diese beiden Möglichkeiten sind nicht linear unabhängig, denn zwischen Spinoren $\bar{u}(p)$ und $u(p)$ gilt

$$m\gamma_\mu \stackrel{\text{Dirac}}{=} \not{p}\gamma_\mu \stackrel{\text{Antiver-}}{\text{tauschung}} = 2p_\mu - \gamma_\mu \not{p} = 2p_\mu - \gamma_\mu m . \quad (8.43)$$

Es ist also $\Lambda_\mu(p, p) \sim \gamma_\mu$ im Limes $q \rightarrow 0$. Es wird Λ_μ nach der Regularisierung berechnet. Also

$$\bar{\Lambda}_\mu = \Lambda_\mu(\text{Photonmasse} = \mu) - \Lambda_\mu(\text{Photonmasse (Regulatoremasse)} = \mu) = \Lambda_R . \quad (8.44)$$

Es wird definiert

$$\bar{u}(p) \bar{\Lambda}_\mu(p, p) u(p) = (Z_1^{-1} - 1) \bar{u} \gamma_\mu u \text{ [+ anomales magnetisches Moment } \sim q_\mu] . \quad (8.45)$$

Hier steckt folgende Überlegung dahinter: Born $[\gamma_\mu]$ + 1-Schleifen-Korrektur $\Rightarrow Z_1^{-1}$. Außerdem gilt die Ward-Identität

$$\Lambda_\mu(p, p) = - \frac{\partial \Sigma(p)}{\partial p^\mu} . \quad (8.46)$$

Die Ward-Identität ist von entscheidender Bedeutung für zahlreiche Beweise in der Renormierungstheorie. Die Identität folgt aus dem Vergleich der Integranden. Außerdem ist

$$- \frac{\partial}{\partial p^\mu} \left(\frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\epsilon} \right) = \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\epsilon} \gamma_\mu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\epsilon} . \quad (8.47)$$

Diagrammatisch ist dies in Fig. 8.10 dargestellt. Somit entspricht die Ableitung der Selbst-

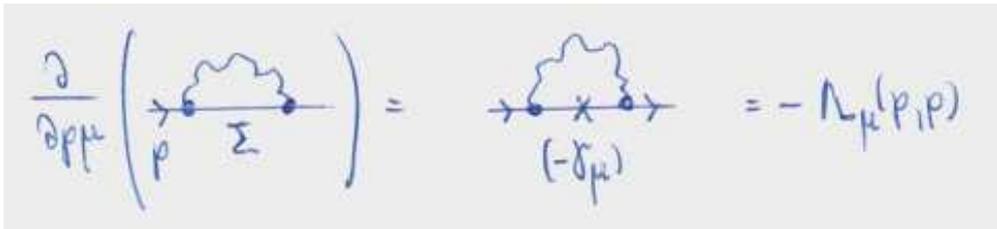


Abbildung 8.10: Diagrammatische Darstellung der Ableitung nach dem Viererimpuls.

energie nach dem äußeren Impuls also der Ersetzung von $-\gamma_\mu$ in den inneren Fermionpropagator. Dies gilt auch nach der Regularisierung. Wegen

$$\bar{\Sigma} = \delta m - [Z_2^{-1} - 1 + O((\not{p} - m)^2)](\not{p} - m) \quad (8.48)$$

gilt

$$- \frac{\partial \bar{\Sigma}}{\partial p^\mu} = \bar{\Lambda}_\mu = [Z_2^{-1} - 1] \gamma_\mu . \quad (8.49)$$

Aus der Ward-Identität folgt also

$$Z_1 = Z_2 . \quad (8.50)$$

8.1.6 Greensfunktion

Am Ende dieses Kapitels kommen noch einmal einige Bemerkungen zur Greensfunktion und zum Streumatrixelement.

Sei $\phi(x)$ ein wechselwirkendes Feld. Die c -Zahl "Funktionen" (Distributionen)

$$G(x_1, \dots, x_n) = \langle 0|T[\phi(x_1)\dots\phi(x_n)]|0\rangle \quad (8.51)$$

heißen n -Punkt Greensfunktion dieser Feldtheorie (vgl. mit der 2-Punkt-Greensfunktion der freien Theorie).

Bedeutung:

- Aus der Kenntnis aller $G(x_1, \dots, x_n)$ ($n = 1, \dots$) ließe sich die zugehörige Feldtheorie rekonstruieren, d.h. der Fockraum und die Feldoperatoren. In der freien Theorie gilt

$$n - \text{Punkt-Funktion} = \sum (\text{Produkte der freien 2-Punkt-Funktion}) . \quad (8.52)$$

- Von praktischer Bedeutung ist: Die Greensfunktionen gelten für off-shell Matrixelemente. Indem man on-shell geht, erhält man die S -Matrixelemente S_{fi} .
- Diese Aussagen gelten analog für wechselwirkende Felder mit Spin.

8.2 Die Lehmann-Symanzik-Zimmermann (LSZ) Reduktionsformel

Wir stellen zunächst einige Überlegungen zu "Asymptotentheorie", d.h. den "in" und "out" Zuständen an. Die Konsequenz des adiabatischen Ein-/Ausschaltens der Wechselwirkung ist

$$\begin{aligned} x_0 \rightarrow -\infty : \quad \phi(x) &\rightarrow \sqrt{Z}\phi_{\text{in}}(x) \\ x_0 \rightarrow +\infty : \quad \phi(x) &\rightarrow \sqrt{Z}\phi_{\text{out}}(x) \end{aligned} \quad (8.53)$$

Dies ist eine Konvergenz im schwachen Sinn, d.h. sie gilt nur für Matrixelemente. Die Felder $\phi_{\text{in}}(x)$, $\phi_{\text{out}}(x)$ haben dieselben Eigenschaften wie das freie skalare Feld, d.h. sie sind Lösung der freien Klein-Gordon-Gleichung,

$$(\square + m^2)\phi_{\text{in,out}}(x) = 0 . \quad (8.54)$$

Also

$$\phi_{\text{in,out}}(x) = \int d\tilde{k} [a_{\text{in,out}}(k)e^{-ikx} + a_{\text{in,out}}^\dagger(x)e^{ikx}] , \quad (8.55)$$

mit

$$k^\mu = \begin{pmatrix} +\sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \\ \vec{k} \end{pmatrix} . \quad (8.56)$$

D.h., die “in”- und “out”-Zustände sind¹

$$|k_1, \dots, k_n\rangle_{\text{in}} = a_{\text{in}}^\dagger(k_1) \dots a_{\text{in}}^\dagger(k_n) |0\rangle \quad (8.57)$$

und

$$|k_1, \dots, k_n\rangle_{\text{out}} = a_{\text{out}}^\dagger(k_1) \dots a_{\text{out}}^\dagger(k_n) |0\rangle . \quad (8.58)$$

Es ist zu beachten, dass die “in”- und “out”-Zustände bzw. Felder nicht identisch sind. Denn

$$S|\beta, \text{out}\rangle = |\beta, \text{in}\rangle , \text{ also } S a_{\text{out}}^\dagger S^{-1} S|0\rangle = a_{\text{in}}^\dagger |0\rangle . \quad (8.59)$$

Da $S|0\rangle = |0\rangle$ haben wir

$$S \phi_{\text{out}} S^{-1} = \phi_{\text{in}} . \quad (8.60)$$

Die “in”- und “out”-Felder erfüllen die üblichen Vertauschungsrelationen, also

$$[\phi_{\text{in}}(x), \phi_{\text{in}}(y)] = i\Delta(x - y) . \quad (8.61)$$

Der Kommutator

$$[\phi_{\text{in}}(x), \phi_{\text{out}}(y)] \quad (8.62)$$

ist aber a priori unbekannt. Wir schauen uns nun die Bedeutung von \sqrt{Z} an. Es ist

$$\langle n | \phi_{\text{in}, \text{out}}(x) | 0 \rangle = e^{ipx} \delta_{n1} . \quad (8.63)$$

D.h. $\phi_{\text{in}, \text{out}}(x)$ erzeugt/vernichtet nur 1-Teilchen-Zustände. Bei einem wechselwirkenden Feld ist jedoch im Allgemeinen

$$\langle n - \text{Teilchenzustand} | \phi(x) | 0 \rangle \neq 0 . \quad (8.64)$$

Deswegen erwarten wir, dass

$$\langle 1 | \phi(x) | 0 \rangle = \underbrace{\sqrt{Z}}_{<1} \langle 1 | \phi_{\text{in}, \text{out}} | 0 \rangle . \quad (8.65)$$

Im Folgenden soll die LSZ-Reduktionsformel für das skalare Feld hergeleitet werden. Zunächst einige Vorbemerkungen:

- Das S -Matrixelement kann in der “in”- und “out”-Basis geschrieben werden als:

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \underbrace{\langle \text{out}, p_1, \dots, p_m }_{\text{final state}} \underbrace{| q_1, \dots, q_n, \text{in} \rangle}_{\text{initial state}} \\ &= \langle 0 | a_{\text{out}}(p_1) \dots a_{\text{out}}(p_m) a_{\text{in}}^\dagger(q_1) \dots a_{\text{in}}^\dagger(q_n) | 0 \rangle . \end{aligned} \quad (8.66)$$

¹Beachte, dass die Zustände eigentlich noch korrekt normiert werden müssen, d.h. mit einer Funktion im Impulsraum verschmiert werden müssen. Wir lassen dies hier der Bequemlichkeit halber weg. Beachte auch, dass die Vertauschungsrelationen der in- und out-Operatoren, also $[a_{\text{out}}(k), a_{\text{in}}^\dagger(q)]$ a priori nicht bekannt sind.

- Amplituden der Form

$$\begin{aligned} & \langle \underbrace{\text{out}, p_1 \dots}_{\langle 0 | a_{\text{out}}(p_1) \dots a_{\text{out}}(p_m)} | a_{\text{out}}^\dagger(q_1) | q_2, \dots, \text{in} \rangle \\ &= \sum_{j=1}^m (2\pi)^3 2p_{0j} \delta^{(3)}(\vec{p}_j - \vec{q}_1) \langle \text{out}, p_1 \dots \hat{p}_j \dots | q_2, \dots, \text{in} \rangle . \end{aligned} \quad (8.67)$$

heißen unzusammenhängend. Hier haben wir verwendet, dass

$$a_{\text{out}}(p_m) a_{\text{out}}^\dagger(q_1) = a_{\text{out}}^\dagger(q_1) a_{\text{out}}(p_m) + (2\pi)^3 2p_{0m} \delta^{(3)}(\vec{p}_m - \vec{q}_1) . \quad (8.68)$$

Ferner bedeutet \hat{p}_j , dass dieses Teilchen im Matrixelement fehlt. Unzusammenhängend heißt, dass mindestens ein Teilchen nicht am Streuprozess teilnimmt (“läuft durch”), siehe Fig. 8.11.

Abbildung 8.11: Beispiel für einen unzusammenhängendes Diagramm im Streuprozess.

Wir verwenden, dass aus Glg. (8.55) folgt (zu einer beliebigen Zeit t)

$$a_{\text{in}}^\dagger(q) = \frac{1}{i} \int_t d^3x e^{-iqx} \vec{\partial}_0 \phi_{\text{in}}(x) \quad (8.69)$$

und analog

$$a_{\text{out}}(q) = \frac{1}{i} \int_t d^3x e^{iqx} \vec{\partial}_0 \phi_{\text{out}}(x) . \quad (8.70)$$

Wir betrachten nun

$$\begin{aligned} S_{fi} &\equiv \langle \text{out}, p_1 \dots p_m | q_1 \dots q_n, \text{in} \rangle \\ &= \langle \text{out}, p_1 \dots p_m | a_{\text{in}}^\dagger(q_1) | q_2 \dots q_n, \text{in} \rangle . \end{aligned} \quad (8.71)$$

Es wird nun (8.69) in (8.71) eingesetzt. Außerdem wir die Zeit $t \rightarrow -\infty$ gewählt, so dass im Matrixelement (8.71) das Feld ϕ_{in} durch $Z^{-1/2}\phi$ ersetzt werden kann. Damit haben wir

$$S_{fi} = \lim_{t \rightarrow -\infty} Z^{-1/2} \langle \text{out}, p_1 \dots p_m | \frac{1}{i} \int_t d^3x e^{-iq_1x} \vec{\partial}_0 \phi(x) | q_2 \dots q_m, \text{in} \rangle . \quad (8.72)$$

Wir benutzen, dass gilt (für beliebigen Integranden)

$$\int_t d^3x e^{-iq_1x} \vec{\partial}_0 \phi(x) = \int_{t'} d^3x e^{-iq_1x} \vec{\partial}_0 \phi(x) - \int_t^{t'} dx_0 \partial_0 \int d^3x e^{-iq_1x} \vec{\partial}_0 \phi(x) . \quad (8.73)$$

Wir lassen nun $t' \rightarrow \infty$ (nach Voraussetzung $t \rightarrow -\infty$) und benutzen, dass im Matrixelement $Z^{-1/2}\phi \xrightarrow{t' \rightarrow +\infty} \phi_{\text{out}}$. Einsetzen in Glg. (8.72) liefert

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \underbrace{\langle \text{out}, p_1 \dots p_m | a_{\text{out}}^\dagger(q_1) | q_2 \dots q_m, \text{in} \rangle}_{\text{unzush. Amplitude}} \\ &\quad + i Z^{-1/2} \int d^4x \partial_0 [e^{-iq_1x} \vec{\partial}_0 \langle \text{out}, p_1 \dots p_m | \phi(x) | q_2 \dots q_n, \text{in} \rangle] \end{aligned} \quad (8.74)$$

Im 2. Term verwenden wir, dass

$$-\partial_0^2 e^{-iq_1 x} = (-\Delta + m^2) e^{-iq_1 x}, \quad (8.75)$$

da $q_{01}^2 - \vec{q}_1^2 = m^2$. Damit ist

$$\int d^4 \partial_0 [\dots] = \int d^4 x [(-\Delta e^{-iq_1 x} + m^2 e^{-iq_1 x}) \langle \dots \rangle + e^{-iq_1 x} \partial_0^2 \langle \dots \rangle]. \quad (8.76)$$

$\Delta \dots$ wird durch partielle Integration auf $\langle \dots \rangle$ abgewälzt und die Randterme für $\vec{x} \rightarrow \infty$ vernachlässigt, und somit erhalten wir

$$S_{fi} = \text{unzusammenhängende Amplitude} \\ + iZ^{-1/2} \int d^4 x e^{-iq_1 x} (\square + m^2) \langle \text{out}, p_1 \dots p_m | \phi(x) | q_2 \dots q_n, \text{in} \rangle. \quad (8.77)$$

D.h. wir haben ein Teilchen aus dem "in"-Zustand ausreduziert. Wir können mit dem Ausreduzieren fortfahren, z.B. aus dem "out"-Zustand das Teilchen mit dem Impuls p_1 . Dann

$$\begin{aligned} & \langle \text{out}, p_1 \dots p_m | \phi(x) | q_2 \dots q_n | \text{in} \rangle \\ &= \langle \text{out}, p_2 \dots p_m | a_{\text{out}}(p_1) | q_2 \dots q_n, \text{in} \rangle \\ &= \lim_{y_0 \rightarrow +\infty} \frac{i}{\sqrt{Z}} \int_{y_0} d^3 y e^{ip_1 y} \overset{*}{\partial}_{y_0} \langle \text{out}, p_2 \dots p_m | \underbrace{\phi(y) \phi(x)}_{(*)} | q_2 \dots q_n, \text{in} \rangle. \end{aligned} \quad (8.78)$$

Es kann (*) durch das zeitgeordnete Produkt $T[\phi(x)\phi(y)]$ ersetzt werden, da $y_0 = +\infty$. Solange $x_0 < \infty$ trägt der zusätzliche Term $\partial_{y_0} \theta(y_0 - x_0) = \delta(y_0 - x_0)$ nicht bei. Wir machen diesen Trick, damit der gleich auftauchende Operator $a_{\text{in}}(p_1)$ rechts von $\phi(x)$ plaziert wird und auf den "in"-Zustand wirkt. Wir verwenden analog zu Glg. (8.73)

$$\begin{aligned} & \int_{y_0 = +\infty} e^{ip_1 y} \overset{*}{\partial}_0 T[\phi(y)\phi(x)] \\ &= \phi(x) \underbrace{\int_{y'_0 = -\infty} d^3 y e^{ip_1 y} \overset{*}{\partial}_{y_0} \phi(y)}_{\frac{1}{\sqrt{Z}} \phi \rightarrow \phi_{\text{in}} \Rightarrow -i a_{\text{in}}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dy_0 \partial_0 \int d^3 y e^{ip_1 y} \overset{*}{\partial}_0 T[\phi(y)\phi(x)]}_{\text{Das 4-dim Integral wird analog zu (8.77) behandelt.}} \end{aligned} \quad (8.79)$$

Damit erhalten wir für Glg. (8.78)

$$\begin{aligned} & \langle \text{out}, p_1 \dots p_m | \phi(x) | q_2 \dots q_n | \text{in} \rangle \\ &= \underbrace{\langle \text{out}, p_2 \dots p_m | \phi(x) a_{\text{in}} | q_2 \dots q_n, \text{in} \rangle}_{\text{unzusammenhängende Amplitude}} \\ &+ \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4 y e^{ip_1 y} (\square_y + m^2) \langle \text{out}, p_2 \dots p_m | T[\phi(y)\phi(x)] | q_2 \dots q_n, \text{in} \rangle. \end{aligned} \quad (8.80)$$

Man kann so fortfahren und alle Teilchen ausreduzieren. Man erhält schließlich die LSZ-Reduktionsformel für die skalare Feldtheorie:

$$\begin{aligned} & \langle \text{out}, p_1 \dots p_m | q_1 \dots q_n, \text{in} \rangle = \langle \text{in}, p_1 \dots p_m | S | q_1 \dots q_n, \text{in} \rangle \\ &= \text{unzusammenhängende Amplituden} \\ &+ \left(\frac{i}{\sqrt{Z}} \right)^{n+m} \int d^4 y_1 \dots d^4 x_n e^{i \sum_{j=1}^m p_j y_j - i \sum_{r=1}^n q_r x_r} \\ &\times (\square_{y_1} + m^2) \dots (\square_{x_n} + m^2) \langle 0 | \underbrace{T[\phi(y_1) \dots \phi(x_n)]}_{m+n \text{ Felder}} | 0 \rangle \end{aligned} \quad (8.81)$$

Bemerkungen:

- Die LSZ-Reduktionsformel ist exakt: rechts steht die vollständige (= exakte) Greensfunktion, links das exakte S -Matrixelement.
- Die unzusammenhängenden Amplituden enthalten mindestens eine δ -Funktion, z.B. $\delta^{(3)}(\vec{p}_1 - \vec{q}_1)$ etc.
- Wenn alle Teilchen am Streuprozess teilnehmen, d.h. wenn $p_i^\mu \neq q_j^\mu$ für alle i, j , dann treten keine unzusammenhängenden Amplituden auf.

Wir diskutieren die Formel weiter und vereinfachen die Notation: $y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_n \rightarrow x_1, \dots, x_{m+n}$. Wir führen die Fourier-Transformation der Greensfunktion durch:

$$G(x_1, \dots, x_{m+n}) = \int \prod_{j=1}^{m+n} \frac{d^4 l_j}{(2\pi)^4} e^{i \sum_{r=1}^{m+n} l_r x_r} \tilde{G}(l_1, \dots, l_{m+n}) . \quad (8.82)$$

Wir setzen dies in Glg. (8.81) ein und verwenden, dass

$$i(\square_{x_j} + m^2) \rightarrow i(-l_j^2 + m^2) = \frac{l_j^2 - m^2}{i} . \quad (8.83)$$

Wir haben hier den inversen skalaren Propagator im Impulsraum und erhalten somit

$$\begin{aligned} \langle \text{out}, p_1 \dots p_m | q_1 \dots q_n, \text{in} \rangle &= \langle \text{in}, p_1 \dots p_m | S | q_1 \dots q_n, \text{in} \rangle \\ &= \text{unzusammenhängende Amplituden} \\ &+ \left(\frac{1}{\sqrt{Z}} \right)^{m+n} \frac{q_1^2 - m^2}{i} \dots \frac{p_m^2 - m^2}{i} \tilde{G}(q_1, \dots, q_n, -p_1, \dots, -p_m) \Big|_{p_j^2=m^2, \dots, q_r^2=m^2} . \end{aligned} \quad (8.84)$$

Das Minuszeichen vor p_1, \dots, p_m rührt daher, dass die Impulse auslaufend sind. Da alle Teilchen "on-shell" sind, ist \tilde{G} bei $p_j^2 = m^2, q_r^2 = m^2$ für alle j, r auszuwerten. Glg. (8.84) besagt, dass $\tilde{G}(\dots)$ $(n+m)$ Pole bei m^2 in den Variablen p_j^2, q_r^2 haben muss. Das S -Matrixelement ist also, bis auf einen Normierungsfaktor $Z^{-(m+n)/2}$, gerade das Residuum dieses multiplen Pols. Weniger singuläre Terme in \tilde{G} tragen nicht zu S_{fi} bei. Siehe auch Fig. 8.12 zur Bedeutung der LSZ-Reduktionsformel.

Abbildung 8.12: Graphische Darstellung zur LSZ-Reduktionsformel.

Noch ein kinematischer Hinweis: Die Umkehrung der Fouriertransformation ist

$$\tilde{G}(l_1, \dots, l_{m+n}) = \int \prod_j d^4 x_j e^{-i \sum_r l_r x_r} G(x_1, x_2, \dots, x_{m+n}) . \quad (8.85)$$

Wegen Translationsinvarianz hängt G nur von den Koordinatendifferenzen ab, z.B. $G = G(x_2 - x_1, \dots, x_{m+n} - x_1)$. Wir schreiben $l_1 x_1 + \dots + l_{m+n} x_{m+n} = x_1 \sum_{r=1}^{m+n} l_r + l_2(x_2 - x_1) + \dots + l_{m+n}(x_{m+n} - x_1)$ und erhalten somit

$$\tilde{G}(l_1, \dots, l_{m+n}) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(l_1 + \dots + l_{m+n}) G(l_1, \dots, l_{m+n}) . \quad (8.86)$$

Kapitel 9

Auf dem Weg zum Standardmodell - Eichsymmetrien

Die Dirac Lagrangedichte für ein freies Fermionfeld Ψ der Masse m lautet

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi . \quad (9.1)$$

Diese ist symmetrisch unter $U(1)$, d.h. invariant unter Transformationen

$$\Psi(x) \rightarrow \exp(-i\alpha)\Psi(x) = \Psi - i\alpha\Psi + \mathcal{O}(\alpha^2) . \quad (9.2)$$

Und für den adjungierten Spinor $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$ haben wir

$$\bar{\Psi}(x) \rightarrow \exp(i\alpha)\bar{\Psi}(x) . \quad (9.3)$$

Der mit der Symmetrie verbundene Noether-Strom lautet (siehe auch Glg. (3.95))

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu \Psi)} \frac{\delta \Psi}{\delta \alpha} + \frac{\delta \bar{\Psi}}{\delta \alpha} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu \bar{\Psi})} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu(-i\Psi) = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi , \quad (9.4)$$

mit

$$\partial_\mu j^\mu = 0 . \quad (9.5)$$

9.1 Kopplung an ein Photon

Wenn die Kopplung an ein Photon berücksichtigt wird, lautet die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}\gamma^\mu(i\partial_\mu - qA_\mu)\Psi - m\bar{\Psi}\Psi = \mathcal{L}_0 - qj^\mu A_\mu , \quad (9.6)$$

wobei j^μ in Glg. (9.4) gegeben ist. Bei Eichtransformation des externen Photonfeldes A_μ ,

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x) \quad (9.7)$$

geht die Lagrangedichte über in

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - qj^\mu A_\mu - \underbrace{qj^\mu \partial_\mu \Lambda}_{q\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\partial_\mu\Lambda} . \quad (9.8)$$

Das heißt, dass \mathcal{L} nicht eichinvariant ist. Die Eichtransformation der Felder Ψ und $\bar{\Psi}$ muss so geändert werden, dass die Lagrangedichte eichinvariant wird. Dies geschieht durch Einführung eines x -abhängigen Parameters α , also $\alpha = \alpha(x)$. Damit

$$i\partial_\mu\Psi \rightarrow i\exp(-i\alpha)\partial_\mu\Psi + \exp(-i\alpha)\Psi(\partial_\mu\alpha), \quad (9.9)$$

so daß

$$\mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{L}_0 + \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\partial_\mu\alpha. \quad (9.10)$$

Dieser Term zankelliert den zusätzlichen Term in Glg. (9.8) falls

$$\alpha(x) = q\Lambda(x). \quad (9.11)$$

Damit lautet die vollständige Eichtransformation

$$\Psi \rightarrow \Psi'(x) = U(x)\Psi(x) \quad \text{mit} \quad U(x) = \exp(-iq\Lambda(x)) \quad (U \text{ unitär}) \quad (9.12)$$

$$\bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi}'(x) = \bar{\Psi}(x)U^\dagger(x) \quad (9.13)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x) = U(x)A_\mu(x)U^\dagger(x) - \frac{i}{q}U(x)\partial_\mu U^\dagger(x). \quad (9.14)$$

Die Lagrangedichte transformiert sich gemäß ($U^\dagger = U^{-1}$)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' &= \bar{\Psi}\gamma^\mu U^{-1}i\partial_\mu(U\Psi) - q\bar{\Psi}U^{-1}\gamma^\mu \left(UA_\mu U^{-1} - \frac{i}{q}U\partial_\mu U^{-1} \right) U\Psi - m\bar{\Psi}U^{-1}U\Psi \\ &= \bar{\Psi}\gamma^\mu i\partial_\mu\Psi + \bar{\Psi}\gamma^\mu(U^{-1}i(\partial_\mu U))\Psi - q\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi A_\mu + \bar{\Psi}\gamma^\mu(i(\partial_\mu U^{-1})U)\Psi - m\bar{\Psi}\Psi \\ &= \mathcal{L} + i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu(\underbrace{U^{-1}U}_I)\Psi = \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (9.15)$$

Minimale Substitution $p_\mu \rightarrow p_\mu - qA_\mu$ führt auf

$$i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu - qA_\mu \equiv iD_\mu. \quad (9.16)$$

Dabei ist $D_\mu(x)$ die *kovariante Ableitung*. Der Begriff *kovariant* bedeutet, daß sie sich genauso wie das Feld transformiert

$$\Psi(x) \rightarrow U(x)\Psi(x) \quad \text{und} \quad D_\mu\Psi(x) \rightarrow U(x)(D_\mu\Psi(x)). \quad (9.17)$$

Das heißt

$$(D_\mu\Psi)' = D'_\mu\Psi' = D'_\mu U\Psi \stackrel{!}{=} UD_\mu\Psi, \quad (9.18)$$

so daß sich die kovariante Ableitung also transformiert gemäß

$$D'_\mu = UD_\mu U^{-1} = \exp(-iq\Lambda)(\partial_\mu + iqA_\mu)\exp(iq\Lambda) = \partial_\mu + iq\partial_\mu\Lambda + iqA_\mu \stackrel{(9.7)}{=} \partial_\mu + iqA'_\mu. \quad (9.19)$$

Damit ist

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}\gamma^\mu iD_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi \quad (9.20)$$

offensichtlich eichinvariant.

Die kinetische Energie der Photonen ist gegeben durch

$$\mathcal{L}_{kin} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad \text{mit} \quad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (9.21)$$

Der Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ lässt sich mithilfe der kovarianten Ableitung ausdrücken (nachrechnen!): Wir wählen folgenden Ansatz für den Tensor 2. Stufe

$$[D_\mu, D_\nu] = [\partial_\mu + iqA_\mu, \partial_\nu + iqA_\nu] = iq[\partial_\mu, A_\nu] + iq[A_\mu, \partial_\nu] = iq(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu). \quad (9.22)$$

Damit haben wir für den Feldstärketensor

$$F^{\mu\nu} = \frac{-i}{q}[D^\mu, D^\nu]. \quad (9.23)$$

Sein Transformationsverhalten ist gegeben durch

$$\frac{i}{q}[UD^\mu U^{-1}, UD^\nu U^{-1}] = \frac{i}{q}U[D^\mu, D^\nu]U^{-1} = UF^{\mu\nu}U^{-1}. \quad (9.24)$$

9.2 Nicht-abelsche Eichgruppen

Wir verwenden die Lagrangedichte für N Diracfelder ψ_i der Masse m

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1\dots N} \bar{\psi}_j i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_j - m \sum_{j=1\dots N} \bar{\psi}_j \psi_j. \quad (9.25)$$

Diese ist symmetrisch unter $U(N)$, wobei $U(N)$ die Gruppe der unitären $N \times N$ Matrizen ist. Betrachte folgende Transformation

$$\psi_j \rightarrow \sum_{k=1\dots N} U_{jk} \psi_k \equiv U_{jk} \psi_k, \quad (9.26)$$

wobei die letzte Gleichung bedeutet, daß wir die Einstein'sche Summenkonvention verwenden. Das heißt, über gleiche Indizes wird summiert. Wir haben also

$$\Psi \rightarrow U\Psi \quad \text{mit} \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} U_{1k} \psi_k \\ U_{2k} \psi_k \\ \vdots \\ U_{Nk} \psi_k \end{pmatrix} \quad (9.27)$$

und

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\bar{\Psi}\Psi \rightarrow \bar{\Psi} U^{-1} i\gamma^\mu \partial_\mu U\Psi - m\bar{\Psi} U^{-1} U\Psi = \mathcal{L}. \quad (9.28)$$

Beispiele:

- $\Psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$: $SU(2)$ -Transformationen im Isospinraum, Proton-Neutron-Dublett.
- $\Psi = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$: $SU_L(2)$, schwache Wechselwirkung auf linkshändige Fermionen.
- $\Psi = (q_1, q_2, q_3)^T$, quarks, $SU(3)$. Dabei ist jedes q_i ($i = 1, 2, 3$) ein vierkomponentiger Spinor. Die Lagrangedichte ist invariant unter $SU(3)$ -Transformationen.

9.3 Die Matrizen der $SU(N)$

Die Elemente der $SU(N)$ werden allgemein dargestellt durch

$$U = \exp\left(i\theta^a \frac{\lambda^a}{2}\right) \quad \text{mit} \quad \theta^a \in \mathbb{R}. \quad (9.29)$$

Dabei sind $\lambda^a/2$ die Generatoren der Gruppe $SU(N)$. Für die $SU(2)$ sind die λ^a durch die Pauli-Matrizen σ^i ($i = 1, 2, 3$) gegeben und θ^a ist ein 3-komponentiger Vektor. Für ein Element der Gruppe $SU(2)$ haben wir also

$$U = \exp\left(i\vec{\omega} \frac{\vec{\sigma}}{2}\right). \quad (9.30)$$

Für ein allgemeines U gilt

$$U^\dagger = \exp\left(-i\theta^a \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)^\dagger\right) \stackrel{!}{=} U^{-1} = \exp\left(-i\theta^a \frac{\lambda^a}{2}\right). \quad (9.31)$$

Die Generatoren müssen also hermitesch sein, d.h.

$$(\lambda^a)^\dagger = \lambda^a. \quad (9.32)$$

Außerdem muß für die $SU(N)$ gelten

$$\det(U) = 1. \quad (9.33)$$

Mit

$$\det(\exp(A)) = \exp(\text{Sp}(A)) \quad (9.34)$$

ergibt sich

$$\det\left(\exp\left(i\theta^a \frac{\lambda^a}{2}\right)\right) = \exp\left(i\theta^a \text{Sp}\left(\frac{\lambda^a}{2}\right)\right) \stackrel{!}{=} 1. \quad (9.35)$$

Daraus folgt

$$\text{Sp}(\lambda^a) = 0. \quad (9.36)$$

Die Generatoren der $SU(N)$ müssen spurlos sein. Die Gruppe $SU(N)$ besitzt $N^2 - 1$ Generatoren λ^a mit $\text{Sp}(\lambda^a) = 0$. Für die $SU(3)$ sind dies die Gell-Mann-Matrizen

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (9.37)$$

Die Matrizen $\lambda^a/2$ sind normiert durch

$$\text{Sp} \left(\frac{\lambda^a}{2} \frac{\lambda^b}{2} \right) = \frac{1}{2} \delta^{ab} . \quad (9.38)$$

Für die Pauli-Matrizen ($i = 1, 2, 3$) gilt

$$\text{Sp}(\sigma_i^2) = 2 \quad \text{und} \quad \text{Sp}(\sigma_1\sigma_2) = \text{Sp}(i\sigma_3) = 0 . \quad (9.39)$$

Multipliziert mit $1/2$ bilden sie die Generatoren der $SU(2)$. Die Generatormatrizen genügen der Vollständigkeitsrelation

$$\frac{\lambda_{ij}^a}{2} \frac{\lambda_{kl}^a}{2} = \frac{1}{2} \left(\delta_{il} \delta_{kj} - \frac{1}{N} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) , \quad (9.40)$$

denn

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\lambda_{ii}^a}{2} \frac{\lambda_{kl}^a}{2} = \frac{1}{2} \delta_{il} \delta_{ki} - \frac{1}{2N} \delta_{ii} \delta_{kl} = \frac{1}{2} \delta_{kl} - \frac{1}{2} \delta_{kl} = 0 . \quad (9.41)$$

9.4 Darstellung nicht-abelscher Gruppen

Sei G eine Gruppe mit den Elementen $g_1, g_2, \dots \in G$. Eine n -dimensionale Darstellung von G ist gegeben durch die Abbildung $G \rightarrow C^{(n,n)}$, $g \rightarrow U(g)$. D.h. die Abbildung abstrakter Elemente der Gruppe auf komplexe $n \times n$ Matrizen, so daß $U(g_1 g_2) = U(g_1) U(g_2)$ gilt und damit die Gruppeneigenschaften erhalten bleiben. Ein $U \in SU(N)$ lässt sich schreiben als $U = \exp(i\theta^a T^a)$. Für die $SU(2)$ also $U = \exp(i\vec{\omega} \cdot \vec{J})$. Die Gruppe $SU(N)$ besitzt $N^2 - 1$ Generatoren T^a . Für die $SU(2)$ sind dies die Drehimpulsoperatoren J_i . Die $N^2 - 1$ reellen Parameter θ^a sind in der $SU(2)$ geben durch $\vec{\omega}$. Die fundamentale Darstellung der $SU(2)$ lautet $J_i = \sigma_i/2$ und im allgemeinen Fall $T^a = \lambda^a/2$. Die Generatoren genügen der folgenden Kommutatorrelation

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c . \quad (9.42)$$

Die f^{abc} sind die Strukturkonstanten der $SU(N)$ -Lie-Algebra. Sie sind total antisymmetrisch und definieren $(N^2 - 1)(N^2 - 1)$ -dimensionale Matrizen $T_{lk}^a \equiv -i f_{lk}^a \equiv -i f^{alk}$. Im Fall der $SU(2)$ haben wir

$$[J_i, J_j] = \epsilon_{ijk} J_k . \quad (9.43)$$

Es gilt ferner

$$\text{Sp} \left(\left[\frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2} \right] \frac{\lambda^c}{2} \right) = i f^{abc} \text{Sp} \left(\frac{\lambda^c}{2} \frac{\lambda^c}{2} \right) = i f^{abc} \frac{1}{2} \delta^{cc} = \frac{i}{2} f^{abc} . \quad (9.44)$$

Die Generatoren erfüllen die Jacobi-Identität

$$[T^a, [T^b, T^c]] + [T^b, [T^c, T^a]] + [T^c, [T^a, T^b]] = 0 . \quad (9.45)$$

Unter Benutzung von (9.42) erhält man

$$0 = (-i f_{cl}^b)(-i f_{lk}^a) + (-i f_{lc}^a)(-i f_{lk}^b) + i f^{abl}(-i f_{ck}^l) . \quad (9.46)$$

Damit

$$0 = (T^b T^a)_{ck} - (T^a T^b)_{ck} + i f^{abl} (T^l)_{ck} . \quad (9.47)$$

Damit haben wir eine $N^2 - 1$ -dimensionale Darstellung der $SU(N)$ Lie-Algebra erhalten

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c . \quad (9.48)$$

Dies ist die *adjungierte Darstellung*. Es gibt folgende $SU(N)$ Darstellungen

- $d = 1$: triviale Darstellung (Singulett).
- $d = N$: fundamentale Darstellung ($\lambda^a/2$), antifundamentale Darstellung ($-\lambda^{*a}/2$).
- $d = N^2 - 1$: adjungierte Darstellung.

9.5 Nichtabelsche Eichtransformationen

Ausgangspunkt ist die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1\dots N} \bar{\psi}_i (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi_i = \bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi \quad \text{mit} \quad \bar{\Psi} = (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_N) . \quad (9.49)$$

Die Lagrangedichte ist invariant unter einer globalen $SU(N)$ Eichtransformation

$$\Psi \rightarrow \Psi' = \exp(i\theta^a T^a) \Psi = (1 + i\theta^a T^a + \mathcal{O}((\theta^a)^2)) \Psi = U \Psi \quad \text{und} \quad \bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi}' = \bar{\Psi} U^{-1} \quad (9.50)$$

Die Generatoren T^a sind

$$\begin{array}{ll} \text{fundamentale Darstellung:} & (T^a)_{ij} = \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{ij} \quad d = N \\ \text{adjungierte Darstellung} & (T^a)_{bc} = -i f^{abc} \quad d = N^2 - 1 \\ \text{triviale Darstellung} & T^a = 0 \Leftrightarrow U(\theta) = 1 . \end{array} \quad (9.51)$$

Betrachten wir nun lokale Symmetrien, also $\theta^a = \theta^a(x)$. Die Transformation von Ψ sei $\Psi' = U\Psi$. Wir fñhren eine kovariante Ableitung ein,

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu = \partial_\mu - igT^a A_\mu^a . \quad (9.52)$$

Die T^a können verschieden sein, aber A_μ^a ist identisch in allen D_μ . Beispiel Supersymmetrie (SUSY)

$$\begin{array}{ll} \text{squark, quark} & T^a = \frac{\lambda^a}{2} \quad (d = N) \\ \text{gluino} & (T^a)_{bc} = -i f^{abc} \quad (d = N^2 - 1) \end{array} \quad (9.53)$$

Die kovariante Ableitung transformiert sich genauso wie Ψ , also $(D_\mu \Psi)' = U(D_\mu \Psi)$. Damit

$$(D_\mu \Psi)' = D'_\mu \Psi' = D'_\mu U \Psi \Rightarrow D'_\mu U = U D_\mu \quad (9.54)$$

Ist erfüllt wenn

$$\partial_\mu - igA'_\mu = D'_\mu = U D_\mu U^{-1} = U(\partial_\mu - igA_\mu)U^{-1} = UU^{-1}\partial_\mu + U(\partial_\mu U^{-1}) - igUA_\mu U^{-1} \Rightarrow \quad (9.55)$$

$$A'_\mu = \frac{i}{g} U(\partial_\mu U^{-1}) + UA_\mu U^{-1} . \quad (9.56)$$

Wichtig: A'_μ ist unabhängig von der Darstellung U . Mit infinitesimalem

$$U = \exp(iT^a\theta^a) = 1 + iT^a\theta^a + \mathcal{O}(\theta^2) \quad (9.57)$$

haben wir

$$\begin{aligned} A'_\mu &= A'_\mu{}^b T^b = \frac{i}{g} U(-i)T^a (\partial_\mu\theta^a) U^{-1} + \underbrace{(1 + i\theta^a T^a) A'_\mu{}^c T^c (1 - i\theta^b T^b)}_{A'_\mu{}^c T^c + i A'_\mu{}^c \underbrace{(T^a T^c - T^c T^a)}_{ifacb T^b} \theta^a} \\ &= \underbrace{T^b \left(\frac{1}{g} \partial_\mu\theta^b + A'_\mu{}^b + i(-if^{abc})\theta^a A'_\mu{}^c \right)}_{A'_\mu{}^b} . \end{aligned} \quad (9.58)$$

Der Feldstärketensor sei definiert durch $F^{\mu\nu} \sim [D^\mu, D^\nu]$. Betrachte den Kommutator

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] &= [\partial_\mu - igT^a A_\mu^a, \partial_\nu - igT^b A_\nu^b] = -igT^b \partial_\mu A_\nu^b - igT^a (-\partial_\nu A_\mu^a) + (-ig)^2 A_\mu^a A_\nu^b \underbrace{[T^a, T^b]}_{ifabc T^c} \\ &= -igT^a (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g \underbrace{f^{bca}}_{fabc} A_\mu^b A_\nu^c) = -igT^a F_{\mu\nu}^a = -igF_{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (9.59)$$

Die $F_{\mu\nu}^a$ sind unabhängig von der Darstellung der T^a . Wir haben für das Transformationsverhalten

$$F'_{\mu\nu} = \frac{i}{g} [D'^\mu, D'^\nu] = \frac{i}{g} [U D_\mu U^{-1}, U D_\nu U^{-1}] = U F_{\mu\nu} U^{-1} \quad \text{homogene Transformation} \quad (9.60)$$

Und mit Glg. (9.58)

$$(F'_{\mu\nu})^a = F_{\mu\nu}^a + i(-if^{bac})\theta^b F_{\mu\nu}^c + \dots \quad (9.61)$$

Das heißt $F_{\mu\nu}^a$ transformiert sich homogen unter der adjungierten Darstellung. Ferner folgt daraus, dass

$$\begin{aligned} F^{a\mu\nu} F_{\mu\nu}^a &= 2\text{Sp}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \left(= 2\text{Sp}(F^{a\mu\nu} T^a F_{\mu\nu}^b T^b) = 2F^{a\mu\nu} F_{\mu\nu}^b \underbrace{\text{Sp}(T^a T^b)}_{\frac{1}{2}\delta^{ab}} = F^{\mu\nu a} F_{\mu\nu}^a \right) \\ &\text{ist eichinvariant.} \end{aligned} \quad (9.62)$$

Damit haben wir für die kinetische Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{kin,A} = -\frac{1}{4} F^{a\mu\nu} F_{\mu\nu}^a = -\frac{1}{2} \text{Sp}(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) . \quad (9.63)$$

9.6 Die QCD Lagrangedichte

Beispiel: Die Quantenchromodynamik (QCD) ist invariant unter der Farb- $SU(3)$. Die 6 Quarkfelder tragen Farbladung und befinden sich in der fundamentalen Darstellung

$$\Psi_q = \begin{pmatrix} \psi_{q1} \\ \psi_{q2} \\ \psi_{q3} \end{pmatrix} \quad q = u, d, c, s, t, b. \quad (9.64)$$

Sie bilden Triplets. Die 8 Gluonen G^μ befinden sich in der adjungierten Darstellung. Die QCD Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} G^{a\mu\nu} G_{\mu\nu}^a + \sum_{q=1\dots 6} \bar{\Psi}_q (i\gamma^\mu D_\mu - m_q) \Psi_q, \quad (9.65)$$

mit

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c. \quad (9.66)$$

Zur Informaton: die Quarkmassen haben die Werte (siehe Particle Data Group, Webseite: pdg.lbl.gov)

$$\begin{aligned} m_u &= 2.3_{-0.5}^{+0.7} \text{ MeV} & m_d &= 4.8_{-0.3}^{+0.7} \text{ MeV} & m_s &= 95 \pm 5 \text{ MeV} \\ m_c &= 1.275 \pm 0.025 \text{ GeV} & m_b(\overline{\text{MS}}) &= 4.18 \pm 0.03 \text{ GeV} & m_t &= 173.5 \pm 0.6 \pm 0.8 \text{ GeV}. \end{aligned} \quad (9.67)$$

9.7 Chirale Eichtheorien

Betrachte

$$\mathcal{L}_f = \bar{\Psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \Psi. \quad (9.68)$$

In der chiralen Darstellung sind die 4×4 γ -Matrizen gegeben durch

$$\gamma^\mu = \left(\left(\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_-^\mu \\ \sigma_+^\mu & 0 \end{pmatrix} \right) \quad (9.69)$$

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad (9.70)$$

wobei σ_i ($i = 1, 2, 3$) die Pauli-Matrizen sind. Mit

$$\Psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0 = (\chi^\dagger, \varphi^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} = (\varphi^\dagger, \chi^\dagger) \quad (9.71)$$

ergibt sich

$$\bar{\Psi} i\gamma^\mu D_\mu \Psi = i(\varphi^\dagger, \chi^\dagger) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \sigma_-^\mu \\ \sigma_+^\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_\mu \chi \\ D_\mu \varphi \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \sigma_-^\mu D_\mu \varphi \\ \sigma_+^\mu D_\mu \chi \end{pmatrix}} = \varphi^\dagger i\sigma_-^\mu D_\mu \varphi + \chi^\dagger i\sigma_+^\mu D_\mu \chi. \quad (9.72)$$

Die Eichwechselwirkung gilt unabhängig für

$$\Psi_L = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma_5)\Psi \quad \text{und} \quad \Psi_R = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma_5)\Psi. \quad (9.73)$$

Die Ψ_L und Ψ_R können unterschiedliche Eichdarstellungen haben. Aber

$$m\bar{\Psi}\Psi = m(\varphi^\dagger, \chi^\dagger) \begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix} = m(\varphi^\dagger\chi + \chi^\dagger\varphi) = m(\bar{\Psi}_L\Psi_R + \bar{\Psi}_R\Psi_L). \quad (9.74)$$

Der Massenterm mischt Ψ_L und Ψ_R . Daraus folgt *Symmetriebrechung* falls Ψ_L und Ψ_R unterschiedliche Darstellungen haben.

Wie sieht es mit einem Massenterm für Eichbosonen aus? Betrachte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \underbrace{F^{a\mu\nu}F_{\mu\nu}^a}_{\text{eichinvariant}} + \frac{m^2}{2} \underbrace{A^{a\mu}A_\mu^a}_{\text{nicht eichinvariant}}. \quad (9.75)$$

Zum Beispiel für die $U(1)$

$$(A_\mu A^\mu)' = (A_\mu + \partial_\mu\theta)(A^\mu + \partial^\mu\theta) = A_\mu A^\mu + 2A_\mu\partial^\mu\theta + (\partial_\mu\theta)(\partial^\mu\theta). \quad (9.76)$$

Der Massenterm für A^μ bricht die Eichsymmetrie.

9.8 Addendum: Mathematische Hintergrundinformationen

9.8.1 Gruppen

Sei ein Paar $(G, *)$ mit einer Menge G und einer inneren zweistelligen Verknüpfung/Gruppenmultiplikation. $* : G \times G \rightarrow G, (a, b) \mapsto a * b$ heißt Gruppe, wenn folgende Axiome erfüllt sind

1. Die Gruppe ist *abgeschlossen*. D.h. wenn $g, h \in G \Rightarrow g * h \in G$.
2. *Assoziativität*: $(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$.
3. \exists *Einselement* e mit der Eigenschaft $g * e = e * g = g \quad \forall g \in G$.
4. Zu jedem g gibt es ein *Inverses* g^{-1} mit $g^{-1} * g = g * g^{-1} = e$.

Abelsche Gruppe: Eine Gruppe heißt *abelsch*, wenn $g * h = h * g$.

Kontinuierliche Gruppen: Sie besitzen unendlich viele Elemente und werden durch n Parameter beschrieben. Bei *Liegruppen* ist n endlich. Alle einparametrischen Liegruppen sind abelsch. Typisches Beispiel: $U(1)$ mit den Elementen $e^{i\phi}$ und ϕ als Parameter.

9.8.2 Algebra

Ein linearer Raum (Vektorraum) wird zu einer *Algebra* \mathbf{A} , wenn eine binäre Operation (Multiplikation) zweier Elemente m, n existiert, so daß $mn \in \mathbf{A}$. Es gelten die Linearitätsbeziehungen ($k, m, n \in \mathbf{A}$)

$$\begin{aligned} k(c_1m + c_2n) &= c_1km + c_2kn \\ (c_1m + c_2n)k &= c_1mk + c_2nk. \end{aligned} \quad (9.77)$$

Dabei sind c_1, c_2 reelle (komplexe) Zahlen. Man spricht je nach Fall von reeller (komplexer) Algebra.

Eine Algebra heißt *kommutativ*, wenn

$$mn = nm. \quad (9.78)$$

Sie heißt *assoziativ*, wenn

$$k(mn) = (km)n. \quad (9.79)$$

Sie heißt *Algebra mit Einselement*, wenn sie ein Einselement $\mathbf{1}$ besitzt mit

$$\mathbf{1}m = m\mathbf{1} = m. \quad (9.80)$$

Sei \mathbf{A} eine *assoziative* Algebra mit Einselement und $B \subset \mathbf{A}$ eine Menge von Elementen b^1, b^2 etc. Die Algebra heißt von B *erzeugt*, wenn jedes $m \in \mathbf{A}$ durch ein Polynom endlichen Grades in den Elementen b^i geschrieben werden kann,

$$m = c\mathbf{1} + \sum_{k=1}^p \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k} c_{i_1 i_2 \dots i_k} b^{i_1} b^{i_2} \dots b^{i_k}, \quad (9.81)$$

wobei die Koeffizienten $c_{i_1 i_2 \dots i_k}$ komplexe Zahlen sind. Die Elemente der Menge B heißen *Generatoren* von \mathbf{A} . Das Einselement gehört nicht zu den Generatoren.

9.8.3 Clifford-Algebren

Eine Clifford-Algebra C_N wird von N Generatoren $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^N$ erzeugt, für die

$$\boxed{\xi^a \xi^b + \xi^b \xi^a = 2\delta^{ab}}$$

mit $a, b = 1, \dots, N$.

Die Dimension der Clifford-Algebra C_N ist 2^N . Es existiert ein enger Zusammenhang zwischen Clifford-Algebren und den Quantisierungsbedingungen für Fermionen.

Im allgemeinen lassen sich Clifford-Algebren für beliebige *symmetrische* Metriken g^{mn} definieren. So gilt insbesondere für die pseudoeuklidische Metrik

$$g_{ab} = \text{diag}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_N, \underbrace{-1, \dots, -1}_M), \quad (9.82)$$

$$\boxed{\text{Clifford-Algebra } C_{N,M}: \{\Gamma^m, \Gamma^n\} = 2g^{mn}\mathbf{1}.}$$

Die Anzahl der Generatoren ist $d = N + M$.

9.8.4 Liealgebren

Eine Algebra ist ein Vektorraum, der von den Generatoren A, B, C, \dots aufgespannt wird: beliebige Linearkombinationen von Generatoren ergeben wieder Generatoren. Eine Algebra verfügt über ein *Produkt* zwischen den Generatoren. Im Fall der Liealgebra ist das Produkt der Kommutator

$$A \circ B := [A, B] , \tag{9.83}$$

mit den folgenden Eigenschaften

$$A \circ B = -B \circ A \tag{9.84}$$

$$(A \circ B) \circ C + (C \circ A) \circ B + (B \circ C) \circ A = 0 . \tag{9.85}$$

Liealgebren sind nicht assoziativ. Die Beziehung (9.85) heißt *Jacobi-Identität*.

Kapitel 10

Appendix

10.1 Die spezielle Lorentzgruppe und ihre Zerlegung

Die eigentlich orthochrone Lorentzgruppe L_+^\uparrow enthält Rotationen und Boosts. Die Rotationen sind gegeben durch

$$\Lambda(0, \vec{\varphi}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & R(\vec{\varphi}) & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad (10.1)$$

mit der Achse $\frac{\vec{\varphi}}{|\vec{\varphi}|}$ und dem Winkel $\varphi = |\vec{\varphi}|$ und den Drehmatrixelementen

$$R(\vec{\varphi})_{ij} = \frac{\varphi_i \varphi_j}{\varphi^2} + \left(\delta_{ij} - \frac{\varphi_i \varphi_j}{\varphi^2} \right) \cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\varphi} \epsilon_{ijk} \varphi_k. \quad (10.2)$$

Ein reiner Boost in ein Bezugssystem, das sich mit der Relativgeschwindigkeit \vec{v} bewegt, ist gegeben durch

$$\Lambda(\vec{u}, 0) = \begin{pmatrix} \cosh u & -\frac{\vec{u}^T}{u} \sinh u \\ -\frac{\vec{u}}{u} \sinh u & \mathbf{1}_{3 \times 3} + \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}^T}{u^2} (\cosh u - 1) \end{pmatrix}. \quad (10.3)$$

Dabei ist u die Rapidity, $u = \operatorname{arctanh}|\vec{v}|$, und $\vec{u} = u \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$. Für $\vec{u}_1 \parallel \vec{u}_2$ ist $\Lambda(\vec{u}_1, 0)\Lambda(\vec{u}_2, 0) = \Lambda(\vec{u}_1 + \vec{u}_2, 0)$. Die Generatoren der Drehung sind gegeben durch J_k ($k = 1, 2, 3$),

$$\Lambda(0, \vec{\varphi}) = \exp(i\vec{\varphi} \cdot \vec{J}) \quad (10.4)$$

$$\text{mit } [J_k]_{lm} = -i\epsilon_{klm} \text{ und } [J_k]_{0\mu} = [J_k]_{\mu 0} = 0 \quad (10.5)$$

$$\Rightarrow [J_k]_{\lambda\mu} = -i\epsilon_{0k\lambda\mu}. \quad (10.6)$$

In der QMII Vorlesung war $[J_k]_{lm} = w_{lm}^{(k)}$. Die Generatoren der Boosts sind K_j ($j = 1, 2, 3$). Also

$$\Lambda(\vec{u}, 0) = \exp(i\vec{u} \cdot \vec{K}) \quad (10.7)$$

mit

$$[K_j]_{\lambda\mu} = i\delta_{\lambda 0}\delta_{j\mu} + i\delta_{0\mu}\delta_{\lambda j}, \quad (10.8)$$

also

$$K_j = i \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \\ 1 & & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \dots & & & 0 \end{pmatrix} \quad (10.9)$$

Es gilt

$$J_k = J_k^\dagger \quad \text{und} \quad K_j = -K_j^\dagger. \quad (10.10)$$

Die Generatoren erfüllen die folgende Algebra

$$[J_k, J_l] = i\epsilon_{klm}J_m \quad (\text{Drehimpulsalgebra}) \quad (10.11)$$

$$[K_j, K_n] = -i\epsilon_{jnk}J_k \quad (10.12)$$

$$[J_k, K_l] = i\epsilon_{klm}K_m. \quad (10.13)$$

Bei Glg. (10.11) handelt es sich um eine Liealgebra, die der $SO(3)$. Die Glg. (10.13) zeigt, dass sich K wie ein Dreiervektor transformiert. Die Gleichung (10.12) sagt aus, dass zwei aufeinanderfolgende Boosts in verschiedene Richtungen keinen neuen Boost, sondern eine gewöhnliche Drehung bewirken. Mit der Einführung von

$$T_j^+ = \frac{1}{2}(J_j + iK_j) \quad (10.14)$$

$$T_j^- = \frac{1}{2}(J_j - iK_j), \text{ für die gilt } T_j^{+\dagger} = T_j^+ \quad \text{und} \quad T_j^{-\dagger} = T_j^- \quad (\text{hermitesch}) \quad (10.15)$$

erhalten wir die einfachen Vertauschungsrelationen

$$[T_j^+, T_j^-] = 0 \quad (10.16)$$

$$[T_j^+, T_k^+] = i\epsilon_{jkl}T_l^+ \quad (10.17)$$

$$[T_j^-, T_k^-] = i\epsilon_{jkl}T_l^-. \quad (10.18)$$

Jeder dieser Operatoren erfüllt also für sich die $SU(2)$ Liealgebra. Damit lässt sich jedes $\Lambda \in L_+^\uparrow$ schreiben als

$$\Lambda = \exp(i\vec{\alpha} \cdot \vec{T}^+) \exp(i\vec{\alpha}^* \cdot \vec{T}^-) = \exp(i(\vec{\alpha} \cdot \vec{T}^+ + \vec{\alpha}^* \cdot \vec{T}^-)) \quad (10.19)$$

$$\text{da } [\vec{\alpha} \cdot \vec{T}^+, \vec{\alpha}^* \cdot \vec{T}^-] = 0. \quad (10.20)$$

Es ist $SU(4) \cong SU(2) \times SU(2)$, aber L_+^\uparrow ist einfach. Wenn

$$\vec{\alpha} = \vec{\varphi} \text{ reell} \quad \Rightarrow \quad \vec{\alpha} \cdot \vec{T}^+ + \vec{\alpha}^* \cdot \vec{T}^- = \vec{\varphi} \cdot \vec{J} \quad (10.21)$$

Drehung $\Lambda(0, \vec{\varphi})$

$$\vec{\alpha} = -i\vec{u} \text{ imaginär} \quad \Rightarrow \quad \vec{\alpha} \cdot \vec{T}^+ + \vec{\alpha}^* \cdot \vec{T}^- = \vec{u} \cdot \vec{K} \quad (10.22)$$

Boost $\Lambda(\vec{u}, 0)$.

Abgesehen von der trivialen Darstellung $(0, 0)$ mit dem Spin Null sind die einfachsten irreduziblen Darstellungen gegeben durch:

1. Die *linke Fundamentaldarstellung* $(\frac{1}{2}, 0)$. Sie hat den Spin $\frac{1}{2}$ und stellt einen linkshändigen

Spinor Ψ_L dar. Dieser transformiert sich nach einer Spinordarstellung von Λ mit $\vec{T}^+ = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$ und $\vec{T}^- = 0$. D.h.

$$\Psi_L(x) \rightarrow \Psi'_L(x') = A_L \Psi_L(x) , \quad (10.23)$$

mit

$$A_L := \Lambda^{(\frac{1}{2}, 0)} = \exp \left\{ \frac{i}{2} (\vec{\varphi} - i\vec{u}) \cdot \vec{\sigma} \right\} . \quad (10.24)$$

2. Die *rechte Fundamentaldarstellung* $(0, \frac{1}{2})$ beschreibt einen rechsthändigen Spinor Ψ_R mit ebenfalls Spin $\frac{1}{2}$. Er transformiert sich nach einer Spinordarstellung von Λ mit $\vec{T}^+ = 0$ und $\vec{T}^- = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$. D.h.

$$\Psi_R(x) \rightarrow \Psi'_R(x') = A_R \Psi_R(x) , \quad (10.25)$$

mit

$$A_R := \Lambda^{(0, \frac{1}{2})} = \exp \left\{ \frac{i}{2} (\vec{\varphi} + i\vec{u}) \cdot \vec{\sigma} \right\} . \quad (10.26)$$

Die beiden Darstellungen A_L und A_R sind nicht unitär. Sie liefern eine Zerlegung in reine Drehungen und Boosts

$$A_{L,R}(\vec{\varphi}, \vec{u}) = U(\varphi) A_{L,R}(0, \vec{u}) , \quad (10.27)$$

wobei U eine unitäre Matrix $U \in \text{SU}(2)$ ist,

$$U = \exp \left(-\frac{i}{2} \vec{\varphi} \cdot \vec{\sigma} \right) . \quad (10.28)$$

Für reine Drehungen ($\vec{u} = 0$) fallen beide Darstellungen zusammen.

Casimir-Operatoren

Ein Casimir-Operator kommutiert mit allen Elementen der Liealgebra. Wir haben die Casimir-Operatoren

1. $P_\mu P^\mu$. Denn z.B.

$$\begin{aligned} [K_j, P_\mu P^\mu] &= [K_j, P_0^2] - [K_j, P_k \cdot P_k] \\ &\stackrel{(2.47), (2.48)}{=} -2iP_j P_0 + 2i\delta_{jk} P_0 P_k = 0 . \end{aligned} \quad (10.29)$$

2. Mit dem Pauli-Lubanski-(Axial-)Vektor (relativistische Verallgemeinerung des Spinvektors)

$$W^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\nu M_{\rho\sigma} \quad (10.30)$$

ist $W_\mu W^\mu$ ein Casimir-Operator (ohne Beweis).

Alle physikalischen Zustände (Felder, Teilchen) in der Quantenfeldtheorie werden nach den Eigenwerten dieser beiden Casimir-Operatoren klassifiziert. So ist im Ruhesystem eines massiven Teilchens mit $p^\mu = (m, 0, 0, 0)^T$

$$\begin{aligned} W^{k,RS} &= \frac{1}{2}\epsilon^{\mu 0\rho\sigma} P_0 M_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\epsilon^{k0lm} P_0 M_{lm} = -\frac{1}{2}P_0\epsilon^{0klm} M_{lm} = -\frac{1}{2}P_0\epsilon^{0lmk}\epsilon_{lms}J^s \\ &= -\frac{1}{2}P_0 2\delta_s^k J_s = -mJ^k, \end{aligned} \quad (10.31)$$

also

$$\vec{W}^{RS} = -m\vec{J}. \quad (10.32)$$

Das heißt, \vec{W} misst den Drehimpuls im Ruhesystem, also den Spin \vec{S} . Wir haben für

(a) $P_\mu P^\mu = m^2 > 0$ massives Teilchen:

$W_\mu W^\mu \stackrel{RS}{=} -m^2 \vec{S}^2$, mit den Eigenwerten $W_\mu W^\mu = -m^2 s(s+1)$, mit $s = 0, 1/2, 1, \dots$. Dies ist Poincaré-invariant und also in jedem Bezugssystem richtig. Massive Teilchen mit Spin s haben somit $(2s+1)$ Polarisationsfreiheitsgrade.

(b) $P_\mu P^\mu = m^2 = 0$ masseloses Teilchen:

$W_\mu W^\mu = 0$. Aus (10.30) folgt $P^\mu W_\mu = 0$. Somit muss W^μ proportional zu P^μ sein, also $W^\mu = \lambda P^\mu$. Bei λ handelt es sich um die Helizität (Projektion des Spins auf die normierte Flugrichtung des Teilchens) des Teilchens. Sie kann nur die Werte $\lambda = \pm s$ annehmen. Dabei ist $s = 0, 1/2, 1, \dots$ der Spin der Darstellung. Daraus folgt also, dass masselose Teilchen mit $s \neq 0$ nur zwei Polarisationsfreiheitsgrade haben.