Blatt 1: Aufgabe 4 Perle auf Draht

a) Zwangsbedingungen in Zylinderkoordinaten

$f_1(r,z,\varphi) = r + z\tan\alpha = 0$

$f_2(r,z,\varphi) = \varphi - \omega t = 0$

Lagrangefunktion: $L = \frac{m}{2}(\dot{z}^2 + \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - mgz$

$\Rightarrow$ z-Komponente $m\ddot{z} + mg = \tan\alpha\,\lambda_1 \quad = Z_z$

radiale Komponente $m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 = \lambda_1 \quad = Z_r$

Zwangsmoment $m\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = \lambda_2 \quad = Z_\varphi$

f_1 und f_2 in Komponenten einsetzen:

$m\ddot{z} + mg = \tan\alpha\,\lambda_1 \qquad m\tan\alpha(z\omega^2 - \ddot{z}) = \lambda_1 \qquad m\tan^2\alpha\frac{d}{dt}z^2\omega = \lambda_2 \quad (*)$

$\Rightarrow \underline{\underline{\ddot{z} - \omega^2 z\sin^2\alpha + g\cos^2\alpha = 0}}$

Lösungsansatz: $z(t) = a_1\exp(\omega t\sin\alpha) + a_2\exp(-\omega t\sin\alpha) + \frac{g}{\omega^2}\cot^2\alpha$

unter Verwendung der Anfangsbedingungen:

$z(t) = -\frac{1}{\omega^2}\cot^2\alpha\, g\left[\cosh(\omega t\sin\alpha) - 1\right]$

$\Rightarrow r(t) = \frac{\cot\alpha\, g}{\omega^2}\left[\cosh(\omega t\sin\alpha) - 1\right]$

$z(t)$ einsetzen in $(*)$:

$\lambda_1(t) = Z_r(t) = mg\cot\alpha\left[1 - \cos^2\alpha\cosh(\omega t\sin\alpha)\right]$

$\lambda_2(t) = Z_\varphi(t) = 2m\frac{g^2}{\omega^2}\cos\alpha\cot\alpha\left[\cosh(\omega t\sin\alpha) - 1\right]\sinh(\omega t\sin\alpha)$

b) Energie: $E(t) = \frac{m}{2}(\dot{z}^2 + \dot{r}^2 + r^2\omega^2) + mgz = m\cot^2\alpha\frac{g^2}{\omega^2}\left[\cosh(\omega t\sin\alpha) - 1\right]^2$

Der Energiegewinn wird durch die Arbeit des Zwangsmomentes $\lambda_2(t) = Z_\varphi(t)$ verursacht:

$\int_0^\varphi \lambda_2(\varphi')\,d\varphi' = \omega\int_0^t \lambda_2(t')\,dt' = 2m\cot^2\alpha\frac{g^2}{\omega^2}\int_0^{\omega t\sin\alpha}(\cosh x - 1)\sinh x\,dx$

$= 2m\cot^2\alpha\frac{g^2}{\omega^2}\left[\frac{1}{4}\cosh(2x) - \cosh(x)\right]\Big|_0^{\omega t\sin\alpha} = E(t)$

wobei die Substitution $x = \omega t\sin\alpha$ verwendet wurde.