Übungsbetreuung: Seraina Glaus (seraina.glaus@kit.edu) (Raum 12/08 - Geb. 30.23)

Webseite der Veranstaltung und Bearbeitung der Übungsblätter
Die Ausgabe der Übungsblätter erfolgt jeweils dienstags auf der Webseite der Veranstaltung:
`https://www.itp.kit.edu/courses/ss2019/mpfi`
Zur Vorbereitung auf die Klausur wird die Bearbeitung der Übungsblätter dringend empfohlen, auch wenn die Sonne scheint und die Temperaturen steigen.
Dieses Blatt 0 soll Ihnen mathematisch notwendige Begrifflichkeiten wieder nahe bringen. Die moderne Physik benötigt Differentiation und Integration, Reihenentwicklungen, Differentialgleichungen, komplexe Zahlen, lineare Algebra und mehr. Um die zugrunde liegende Physik zu verstehen, ist es sehr hilfreich, wenn Sie das mathematische Handwerkszeug präsent haben.

Aufgabe 1: Vereinfachen und Kürzen

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $\frac{x\sqrt{x}+x\sqrt{y}}{x-y} - \sqrt{x} - \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$,

(b) $\log_{10}\left(\frac{10^x}{10^3}\right)$,

(c) $\frac{1}{1+\tan(\varphi)} + \frac{1}{1+\cot(\varphi)}$.

Aufgabe 2: Differentiation

Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \longmapsto f(x)$ nach x:

(a) $f(x) = a \cdot \tan(x) + \cos(bx + c)$,

(b) $f(x) = e^{x+y}\left(3 + 2x - x^2\right)$,

(c) $f(x) = \left(3 + 4x^2 - x^2\right)^{1/2}$,

(d) $f(x) = x^x$.

Aufgabe 3: Kurvendiskussion

Berechnen Sie die lokalen Extrema (Minimum und Maximum) der Funktion

$$x \longmapsto g(x) = \frac{4x^2 - 4x}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} .$$

Aufgabe 4: Reihen und Reihenentwicklung

Die Taylorreihe einer Funktion $f(x)$ am Ursprung $x = 0$ ist gegeben durch

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0) x^2 \,,$$

wobei $f^{(n)}(0)$ die n-te Ableitung von $f(x)$ ausgewertet an der Stelle $x = 0$ bezeichnet. Entsprechend sind $f'(0)$ und $f''(0)$ die erste bzw. zweite Ableitung ausgewertet bei $x = 0$. Bestimmen Sie damit die Taylorreihen der folgenden Funktionen bis zur zweiten Ordnung x^2:

(a) $f(x) = e^x$,

(b) $f(x) = \sin(x^2)$.

Aufgabe 5: Drehungen

Eine Drehung um den Winkel φ in der Ebene im $\mathbb{R}^2$ ist gegeben durch eine Matrix:

$$\mathbf{R}_2(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} , \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

Zeigen Sie, dass

(a) die Drehmatrizen kommutieren, $\mathbf{R}_2(\varphi_1)\,\mathbf{R}_2(\varphi_2) = \mathbf{R}_2(\varphi_2)\,\mathbf{R}_2(\varphi_1)$,

(b) das Produkt $\mathbf{R}_2(\varphi_1)\,\mathbf{R}_2(\varphi_2)$ wieder zu einer Drehmatrix $\mathbf{R}_2(\varphi_1 + \varphi_2)$ führt,

(c) $\det(\mathbf{R}_2(\varphi)) = 1$.

Aufgabe 6: Eigenwerte und Eigenvektoren

Die Eigenwertgleichung einer quadratischen $n \times n$–Matrix $\mathbf{M}$ lautet $\mathbf{M}\vec{x} = \lambda\vec{x}$, wobei der n–Vektor $\vec{x}$ einen möglichen Eigenvektor und der Skalar λ einen zugehörigen Eigenwert bezeichnen. Die Lösungen für λ ergeben sich durch das Nullsetzen des charakteristischen Polynoms:

$$\det(\mathbf{M} - \lambda \mathbb{1}) = 0 \;,$$

wobei $\mathbb{1}$ die n-dimensionale Einheitsmatrix ist. Bestimmen Sie die Eigenwerte, und falls möglich die Eigenvektoren, zu folgender 3×3–Matrix $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$