Übungsbetreuung: Seraina Glaus (seraina.glaus@kit.edu) (Raum 12/08 - Geb. 30.23)

Aufgabe 1: Bahnkurven

Bewegungen eines Körpers/Teilchens im Raum als Funktion der Zeit t lassen sich durch Bahnkurven $\vec{r}(t)$ darstellen. Die Geschwindigkeit und Beschleunigung lassen sich als Ableitungen nach der Zeit ermitteln. Wir betrachten zwei einfache Beispiele.

(a) Eine Bahnkurve werde beschrieben durch die Parameterdarstellung

$$\vec{r}(t) = \big(a\cos(\omega t), a\sin(\omega t), ct\big)^T \quad \text{mit}\, a, c > 0\,.$$

(i) Skizzieren Sie die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ als Funktion des eindimensionalen Parameters t.

(ii) Wie groß ist der Abstand $h = z_2 - z_1$ zweier in z–Richtung direkt übereinanderliegender Punkte $(a, 0, z_1)$ und $(a, 0, z_2)$, wobei $z_2 > z_1$?

(b) Es sei nun der Ortsvektor $\vec{r}(t)$ eines Teilchens auf einer Kreisbahn mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω gegeben durch

$$\vec{r}(t) = \big(r\cos(\omega t), r\sin(\omega t), 0\big)^T\,.$$

(i) Berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$ und den Beschleunigunsvektor $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$.

(ii) Skizzieren Sie die Kreisbahn des Teilchens und diskutieren Sie, in welche Richtung $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ und $\vec{a}(t)$ relativ zum Bahnverlauf zeigen.

(iii) Nehmen Sie nun an, das Teilchen sei ein Satellit der Masse m_s und umkreise die Erde, mit Masse M_E, in einer Entfernung r_s. Berechnen Sie dessen Geschwindigkeit $v = |\vec{v}|$, wobei für die Gravitationskraft gilt $\vec{F}(\vec{r}) = -Gm_sM_E\vec{r}/r^3$ und G die Newton'sche Gravitationskonstante bezeichnet. *Hinweis:* Lex secunda.

Aufgabe 2: Lösen von Bewegungsgleichungen

Betrachten Sie den Wurf eines Balles mit der Masse m im konstanten Gravitationsfeld, d.h. eine Bewegung $\vec{r}(t)$ beschrieben durch die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F} = -mg\vec{e}_z$$

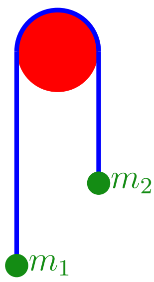
mit den Anfangsbedingungen $\vec{r}(0) = (0, 0, 0)^T$ und $\vec{v}(0) = (v\cos\alpha, 0, v\sin\alpha)^T$, wobei α den anfänglichen Wurfwinkel zum Erdboden bezeichnet und $g \approx 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ die Erdbeschleunigung ist, die in negative z-Richtung wirkt.

(a) Bestimmen Sie die Form der Bahnkurve, indem Sie die Bewegungsgleichung unter Benutzung der Anfangsbedingungen integrieren, und berechnen Sie dadurch $\vec{r}(t)$. Gehen Sie komponentenweise vor. Welche Form haben $x(t)$ und $z(t)$? Drücken Sie zuletzt z in Abhängigkeit von x aus. Welcher Form entspricht $z(x)$?

(b) Bei welchem anfänglichen Winkel $\alpha_{\max}$ erreicht man die maximale Wurfdistanz $x_{\max}$? *Hinweis*: Hierfür muss zunächst die Zeit t_{fin} berechnet werden, wobei $z(t_{\text{fin}}) = 0$, welche eingesetzt in $x(t)$ eine Gleichung für $x(\alpha)$ ergibt. Für ein bestimmtes $\alpha_{\max}$ erreicht $x(\alpha)$ ein Maximum $x_{\max}$.

Aufgabe 3: Bewegungsgleichungen durch Lagrange - Atwood'sche Fallmaschine

Im dreidimensionalen Raum im Schwerefeld der Erde mit Beschleunigung g ist im Ursprung eine frei drehbare Rolle befestigt. Über diese läuft eine Schnur mit fester Länge l, die zwei Massen m_1 an Position z_1 und m_2 an Position z_2 verbindet, die sich in nur z-Richtung frei bewegen können. Somit können Sie die x- und y-Richtung vernachlässigen.



(a) Welche Zwangsbedingungen gibt es? Finden Sie passende generalisierte Koordinaten für die verbleibenden Freiheitsgrade.

(b) Stellen Sie die Lagrange-Funktion auf, indem Sie zuvor folgende Schritte ausführen:
   (i) Beginnen Sie mit dem Potential V des Gesamtsystems (beide Massen). Das Potential einer Masse m im Schwerefeld ist gegeben durch $V = mgz$.
   (ii) Berechnen Sie nun die kinetische Gesamtenergie T des Systems.

(c) Bestimmen Sie nun die Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen.

Aufgabe 4: Perle auf rotierendem Draht

An einer vertikalen Achse, die sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω dreht, ist unter dem Winkel α ein gerader Draht befestigt, auf dem eine Perle der Massse m gleitet.

(a) Stelle die Lagrangegleichung 1. Art für die Zylinderkoordinaten z, r, φ auf und löse die Bewegungsgleichung von $z(t)$ für die Anfangsbedingungen $z(0) = \dot{z}(0) = 0$.

(b) Berechne die Energie der Perle und zeige, dass der Energiegewinn durch rheonome Zwangsarbeit verursacht wird.