

Übungsbetreuung: Seraina Glaus (seraina.glaus@kit.edu) (Raum 12/08 - Geb. 30.23)

### Aufgabe 1: Dirac-Notation

Wir möchten in dieser Aufgabe vertrauter mit der Bra-Ket oder auch Dirac-Notation von Zuständen im Hilbert-Raum werden. Beachten Sie, dass die drei Teilaufgaben linear unabhängig sind und die Rechnungen kurz sind.

- (a) In einem komplexen Hilbert-Raum sei durch  $\hat{T} := |u\rangle\langle u|$  mit  $|u\rangle \neq 0$  ein linearer Operator definiert. Wann ist  $\hat{T}$  hermitesch? Welche Eigenschaft muss  $|u\rangle$  haben, damit  $\hat{T}$  ein Projektionsoperator ist?

*Hinweis:* Der zu  $\hat{T}$  adjungierte Operator  $\hat{T}^\dagger$  ist definiert durch  $(\langle\psi|T|\varphi\rangle)^* = \langle\varphi|T^\dagger|\psi\rangle$ . Selbstdjungiertheit/Hermitizität bedeutet  $\hat{T}^\dagger = \hat{T}$  (in Analogie zur linearen Algebra).  $\hat{T}$  ist ein Projektionsoperator, wenn es sich um einen hermiteschen Operator mit der zusätzlichen Eigenschaft  $\hat{T}^2 = \hat{T}$  handelt.

- (b) Zeigen Sie: Besitzt ein linearer Operator  $\hat{A}$  die Eigenschaft  $\hat{A}\hat{A}^\dagger = \hat{A}^\dagger\hat{A}$  und ist  $|a\rangle$  mit  $\langle a|a\rangle = 1$  ein Eigenvektor von  $\hat{A}$  zum Eigenwert  $a$ , so ist  $|a\rangle$  auch Eigenvektor von  $\hat{A}^\dagger$  zum Eigenwert  $a^*$ .

*Hinweis:* Ein Operator, welcher mit seinem Adjungierten vertauscht, heißt Normaloperator und besitzt stets ein vollständiges System orthogonaler Eigenvektoren.

- (c) In einem zweidimensionalen komplexen Hilbert-Raum mit Orthonormalbasis  $\{|1\rangle, |2\rangle\}$  sei ein linearer Operator  $\hat{A}$  durch  $\hat{A}|1\rangle = -|2\rangle$  und  $\hat{A}|2\rangle = |1\rangle$  definiert. Schreiben Sie  $\hat{A}$  als Linearkombination von Ket-Bra-Ausdrücken. Ist  $\hat{A}$  ein Normaloperator, d.h. kommutiert  $\hat{A}$  mit seinem adjungierten Operator? Ist  $\hat{A}$  hermitesch? Ist  $\hat{A}$  unitär? Existiert  $\hat{A}^{-1}$ ?

### Aufgabe 2: Der quantenmechanische harmonische Oszillator

Der Hamilton-Operator des harmonischen Oszillators ist gegeben durch

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2.$$

Man führt in Analogie zur kanonischen Transformation die Auf- und Absteigeoperatoren

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right) \quad \text{und} \quad \hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right)$$

ein, die gemäß der Vorlesung Energiequanten erzeugen und vernichten.

- (a) Rekapitulieren Sie mit Hilfe der Vorlesung die Form des Hamilton-Operators ausgedrückt durch  $\hat{a}$  und  $\hat{a}^\dagger$ . Wie lauten die Energieeigenwerte  $E_n$  des harmonischen Oszillators?
- (b) Betrachten Sie nun die Ortsdarstellung, in der der Impulsoperator  $\hat{p}$  der bekannte Differentialoperator ist. Bestimmen die Grundzustandswellenfunktion  $\psi_0(x)$ , indem Sie ausnutzen, dass  $\hat{a}\psi_0(x) = 0$  gilt.

- (c) Bestimmen Sie die Wellenfunktion des ersten angeregten Zustands mit Hilfe von  $\hat{a}^\dagger$ .
- (d) Bestimmen Sie die Orts- und Impulsunschärfe des Grundzustands, definiert durch

$$\Delta x = \sqrt{\langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2} \quad \text{und} \quad \Delta p = \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2}$$

und zeigen Sie, dass die Heisenbergsche Unschärferelation erfüllt ist.

*Hinweis:* Der Erwartungswert  $\langle \hat{O} \rangle$  im Zustand  $|\psi\rangle$  ist gegeben durch  $\langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle$ .