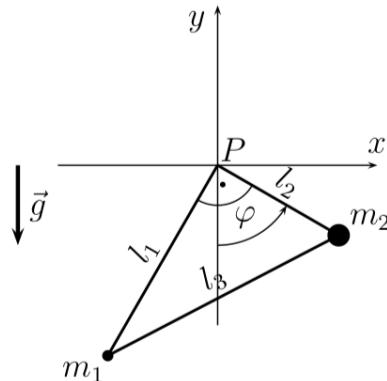


Übungsbetreuung: Seraina Glaus (seraina.glaus@kit.edu) (Raum 12/08 - Geb. 30.23)

Aufgabe 1: Lagrange Methode 2. Art - Starre Stangen



Gegeben ist eine Anordnung wie in der Skizze dargestellt, in der zwei Massen m_1 und m_2 mittels masseloser starrer Stangen mit Längen l_1 und l_2 mit einem Aufhängepunkt verbunden sind. Die beiden Massen sind über eine weitere starre massenlose Stange der Länge $l_3 = \sqrt{l_1^2 + l_2^2}$ miteinander verbunden. Die Anordnung kann um den Aufhängepunkt P im Schwerfeld der Erde schwingen.

- Wie lauten die Zwangsbedingungen?
- Stellen Sie die Lagrange Gleichungen zweiter Art auf.
- Bestimmen Sie die Gleichgewichtspositionen und die Schwingungsfrequenz um die stabile Gleichgewichtslage.
- Bestimmen Sie die Zwangskräfte, welche die Stangen im stabilen Gleichgewicht auf die Massenpunkte m_1 und m_2 ausüben.

Aufgabe 2: Lagrange Methode 1. und 2. Art - Perle auf Stab

Eine Perle gleitet reibungsfrei und ohne äussere Kräfte auf einem Stab, der sich in der x-y-Ebene mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um den Ursprung dreht.

- Stellen Sie die Bewegungsgleichung mit Hilfe der Lagrange Gleichungen erster Art auf und lösen Sie die Bewegungsgleichung. Führen Sie die Rechnung in Zylinderkoordinaten durch. Wie lautet die Zwangskraft und was ist ihre Bedeutung? Ist die Energie in diesem System erhalten?
- Formulieren Sie nun die Bewegungsgleichung unter Verwendung der Lagrange Gleichung 2. Art.

Aufgabe 3: Erhaltungsgrößen - Bewegung im kugelsymmetrischen Potential

Die Bewegung eines Teilchens in einem kugelsymmetrischen Potential V soll mittels Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) beschrieben werden. Diese sind gegeben durch

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \vartheta \\ r \sin \varphi \sin \vartheta \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

Die Parameter bewegen sich in folgenden Bereichen: $r > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi[$, $\vartheta \in [0, \pi]$.

- (a) Ermitteln Sie zunächst die kinetische Energie $T = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2$ des Teilchens in Kugelkoordinaten. Führen Sie die folgende Schritte aus:
- Bestimmen Sie die Richtungsvektoren \vec{r}_{q_i} für die Kugelkoordinaten $q_i = (r, \vartheta, \varphi)$ mittels $\vec{r}_{q_i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$ und bilden Sie die normierten Einheitsvektoren $\vec{e}_{q_i} = \frac{\vec{r}_{q_i}}{|\vec{r}_{q_i}|}$.
 - Zeigen Sie, dass Sie $\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{dq_i}{dt} \frac{d\vec{r}}{dq_i}$ mit Hilfe der Einheitsvektoren schreiben können als
$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta + r\sin(\vartheta)\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi.$$
 - Berechnen Sie nun die kinetische Energie T in Kugelkoordinaten. Sie können hierbei die Orthonormalität der Einheitsvektoren nutzen.
- (b) Bilden Sie die Lagrange-Funktion L für ein Teilchen mit Masse m im kugelsymmetrischen Potential $V = V(r, t)$. Welche Koordinate $q_i = (r, \vartheta, \varphi)$ ist zyklisch? Ermitteln Sie den dazugehörigen zeitlich konst. verallgemeinerten Impuls $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$.