Übungsbetreuung: Seraina Glaus (seraina.glaus@kit.edu) (Raum 12/08 - Geb. 30.23)

Aufgabe 1: Variationsrechnung - Kürzester Weg auf Zylindermantel

Wie in der Vorlesung motiviert ist die Lagrange-Mechanik eng verknüpft mit dem Variationsprinzip, welches erlaubt für viele mathematische Problemstellungen extremale Lösungen zu ermitteln. In dieser Aufgabe berechnen wir die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf einem Zylindermantel.

(a) Nutzen Sie Zylinderkoordinaten in der Form $\vec{r} = (x, y, z)^T = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, z)^T$ und drücken Sie ein Wegelement $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ durch Zylinderkoordinaten aus. Zeigen Sie so, dass der Weg zwischen den Punkten A und B gegeben ist durch

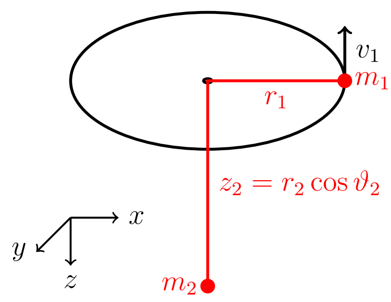
$$S = \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{R^2\varphi'(z)^2 + 1}dz\,.$$

Hinweis: Der Radius R sei konstant. Somit ist $dR = 0$.

(b) Finden Sie den minimalen Weg S. Nutzen Sie für den Integranden die Euler-Lagrange-Gleichungen und zeigen Sie, dass dies auf eine Gerade auf dem (ausgerollten) Zylindermantel führt.

Aufgabe 2: Erhaltungsgrößen - Rotation in der Ebene

Betrachten Sie zwei Massen m_1 und m_2 im konstanten Gravitationsfeld $\vec{F} = mg\vec{e}_z$, welche durch einen dünnen Faden der Länge l aneinander gebunden sind. Die Masse m_1 befindet sich dabei auf einer Ebene ($z =$const.), die Masse m_2 hängt frei von dieser Ebene herab. Benutzen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung, um die Bewegungsgleichungen der beide Massen aufzustellen.



(a) Treffen Sie zunächst eine Aussage über die Erhaltungsgrößen des Problems.

(i) Die kartesischen Koordinaten $(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2)$ sind nicht geeignet, da es komplizierte Abhängigkeiten gibt. Man führt daher ebene Polarkoordinaten $(x_1 = r_1\cos\varphi_1, y_1 = r_1\sin\varphi_1, z_1)$ für m_1 und Kugelkoordinaten $(x_2 = r_2\cos\varphi_2\sin\vartheta_2, y_2 = r_2\sin\varphi_2\sin\vartheta_2, z_2 = r_2\cos\vartheta_2)$ für m_2 ein. Wie lauten die Zwangsbedingungen in den Koordinaten $(r_1, \varphi_1, z_1; r_2, \varphi_2, \vartheta_2)$?
Hinweis: Vernachlässigen Sie mögliche Torsionseffekte des Fadens.

(ii) Überlegen Sie sich nun die kinetische und die potentielle Energie für m_1 in den ebenen Polarkoordinaten. Bedenken Sie dabei, dass $z_1 =$const. und als Koordinatenursprung für die z-Richtung gewählt werden kann.

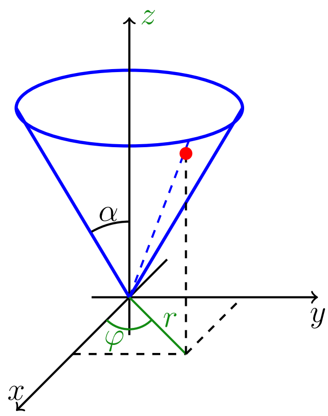
(iii) Die kinetische und die potentielle Energie von m_2 sind gegeben als $T_2 = \frac{m_2}{2}(\dot{r}_2^2 + r_2^2\dot{\vartheta}_2^2 + r_2^2\dot{\varphi}_2^2 \sin^2\vartheta_2)$ bzw. $V_2 = -m_2 g r_2 \cos\vartheta_2$. Nun können Sie die Lagrange-Funktion aufschreiben. Was sind die zyklischen Koordinaten und welche Erhaltungsgrößen resultieren daraus?

(b) Setzen Sie nun $\varphi_2 = \vartheta_2 = 0$, d.h. die Masse m_2 sei dahingehend eingeschränkt, dass sie sich nur noch in der z-Richtung bewegen kann. Wenden Sie auf die daraus resultierende Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$ die Euler-Lagrange-Gleichung an. *Hinweis:* Mit dieser Einschränkung ist $\mathcal{L}$ nur noch von zwei freien Koordinatensätzen $(r_1, \dot{r}_1)$ und $(\varphi_1, \dot{\varphi}_1)$ abhängig. Bedenken Sie, dass es zwischen r_1 und r_2 eine Beziehung gibt.

(c) Sie haben nun zwei Euler-Lagrange-Gleichungen für r_1 und φ_1, wobei letztere Koordinate zyklisch ist. Sie können daher die beiden Gleichungen entkoppeln, indem Sie in der Gleichung für r_1 den Betrag des konstanten Drehimpulses $L_1 = m_1 r_1^2 \dot{\varphi}_1$ anstelle von $\dot{\varphi}_1$ einsetzen. Überlegen Sie sich wie die Bewegung von m_1 bei gegebenener Anfangsgeschwindigkeit v_1 und daher konstantem L_1 aussieht, ohne die Bewegungsgleichung von r_1 explizit zu lösen, d.h. nur durch Betrachtung des Vorzeichens von $\ddot{r}_1$ als Funktion von r_1.

Aufgabe 3: Hamilton- versus Lagrange-Formalismus - Teilchen im Kegel

Ein Punktteilchen der Masse m gleitet reibungsfrei auf der Innenseite eines Kreiskegels. Die Gravitationskraft wirke in die negative z–Richtung und der Winkel α zwischen der z-Achse und der Kegeloberfläche sei konstant.



(a) Benutzen Sie zur Beschreibung des Problems Zylinderkoordinaten, also $(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)^T$. Wie lautet die Zwangsbedingung? Die unabhängigen Koordinaten seien z und φ. Stellen Sie die Lagrange-Funktion auf und benutzen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen um die folgenden Bewegungsgleichungen herzuleiten:

$$2\dot{z}\dot{\varphi} + z\ddot{\varphi} = 0$$
$$\ddot{z}(1 + \tan^2\alpha) - z\dot{\varphi}^2 \tan^2\alpha + g = 0$$

(b) Identifizieren Sie eine zyklische Koordinate. Ersetzen Sie in der Bewegungsgleichung mit $\ddot{z}$ den Term $\dot{\varphi}$ durch den erhaltenen (Dreh)impuls p_φ und diskutieren Sie die Bewegung in z-Richtung.

(c) Wiederholen Sie die Rechnung nun im Hamilton-Formalismus. Schreiben Sie die Hamilton-Funktion auf und leiten Sie die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen her. Zeigen Sie dann, daß diese zu den bereits in Aufgabenteil (a) hergeleiteten Bewegungsgleichungen äquivalent sind. Zudem können Sie eine der beiden Hamilton'schen Bewegungsgleichungen als die DGL aus Teilaufgabe (b) identifzieren.