Übungsbetreuung: Seraina Glaus (seraina.glaus@kit.edu) (Raum 12/08 - Geb. 30.23)

Aufgabe 1: Hamilton-Formalismus - Fadenpendel

In der Vorlesung wurde für das Fadenpendel nachfolgende Hamilton-Funktion abgeleitet:

$$H = \frac{p^2}{2ml^2} - mgl\cos q\,.$$

(a) Entwickeln Sie diese für kleine q bis zur zweiten Ordnung. Argumentieren Sie, wieso der konstante Term der Hamilton-Funktion außer Acht gelassen werden kann und zeigen Sie die Relation

$$H(q,p) = \frac{1}{2ml^2}p^2 + \frac{mgl}{2}q^2\,.$$

(b) Bevor wir die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen bestimmen, normieren wir q und p identisch, um die spätere Matrix einfacher zu diagonalisieren. Setzen Sie $p = \bar{p}\sqrt{m\omega_0 l^2}$ und $q = \bar{q}/\sqrt{m\omega_0 l^2}$ und zeigen Sie $\bar{H}(\bar{q},\bar{p}) = \frac{1}{2}\omega_0(\bar{p}^2+\bar{q}^2)$. Hierbei ist $\omega_0^2 = g/l$. Ermitteln Sie aus $H(\bar{q},\bar{p})$ die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen. Formulieren Sie die beiden Gleichungen als Matrixgleichung mit $\vec{\pi} = (\bar{q},\bar{p})^T$ in der Form

$$\frac{d}{dt}\vec{\pi} = \mathbf{M}\vec{\pi}\,.$$

(c) Machen Sie den Ansatz $\vec{\pi} = \vec{v}e^{\lambda t}$ mit konstantem $\vec{v}$ und lösen Sie die erhaltene Eigenwertgleichung. Bestimmen Sie so die Eigenwerte λ_1 und λ_2 und die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$.

(d) Setzen Sie nun $\vec{\pi} = A\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + B\vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}$ und bestimmen Sie A und B passend zum Anfangswertproblem $\bar{q}(0) = 0$ und $\bar{p}(0) = \bar{p}_0$.

(e) Skizzieren Sie die Bewegung im Phasenraum, also der zweidimensionalen Ebene aufgespannt von q und p. Welches geometrische Gebilde erhalten Sie?
Hinweis: Beachten Sie die erfolgte Normierung von q und p in $\vec{\pi} = (\bar{q},\bar{p})^T$.

(f) Machen Sie zuletzt eine kanonische Transformation auf die Koordinaten $\tilde{q}$ und $\tilde{p}$ durch

$$\tilde{q} = \frac{(1+i)(p - il^2 m\omega_0 q)}{2\sqrt{m\omega_0 l^2}}, \qquad \tilde{p} = \frac{(1+i)(p + il^2 m\omega_0 q)}{2\sqrt{m\omega_0 l^2}}$$

$$\text{bzw.} \qquad q = \frac{(1+i)(\tilde{q}-\tilde{p})}{2\sqrt{m\omega_0 l^2}}, \qquad p = \frac{(1-i)\sqrt{m\omega_0 l^2}(\tilde{q}+\tilde{p})}{2}$$

und bestimmen Sie die transformierte Hamilton-Funktion $\tilde{H}(\tilde{q},\tilde{p})$ (die keine weiteren Zeitabhängigkeiten erhält). Zeigen Sie, dass die Transformation die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen entkoppelt. Zeigen Sie außerdem, dass die fundamentalen Poisson-Klammern unverändert bleiben: $\{\tilde{q},\tilde{p}\}_{q,p} = 1, \{\tilde{q},\tilde{q}\}_{q,p} = 0, \{\tilde{p},\tilde{p}\}_{q,p} = 0$.

Aufgabe 2: Minkowski-Raum - Matrix- und Index-Schreibweise

In der speziellen und der allgemeinen Relativitätstheorie ist es üblich, die Einstein'sche Summenkonvention, d.h. über doppelt vorkommende Indizes wird summiert, und die Vierer-Vektor Schreibweise zu verwenden. Ein kontravarianter Vierer-Vektor (Index oben) ist dabei gegeben durch $x^\mu = (ct, x, y, z)$. Ein kovarianter Vierer-Vektor (Index unten) kann mittels der Minkowski-Metrik $g_{\mu\nu}$ aus dem kontravarianten Vierer-Vektor bestimmt werden durch

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (ct, -x, -y, -z) \ , \qquad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Das Skalarprodukt ist damit gegeben durch $x_\mu x^\mu = x^\mu x^\nu g_{\mu\nu}$. Die Lorentz-Transformation eines kontravarianten Vierer-Vektor ist gegeben durch

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \ , \qquad \Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\vec{\beta}^T \\ -\gamma\vec{\beta} & \mathbb{1} + (\gamma - 1)\frac{\vec{\beta}\vec{\beta}^T}{\vec{\beta}^2} \end{pmatrix} \ , \qquad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c} = (\beta_x, \beta_y, \beta_z)^T \ .$$

Betrachten Sie einen Boost in x-Richtung, d.h. $\vec{\beta} = (\beta, 0, 0)^T$. Verwenden Sie in den ersten vier Teilaufgaben explizit die vierdimensionalen Matrix- und Vektor-Darstellungen!

(a) Überprüfen Sie zunächst, dass die inverse Lorentz-Transformation gegeben ist durch

$$\left(\Lambda^{-1}\right)^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

(b) Zeigen Sie, dass die Relation $\Lambda_\nu{}^\mu = g_{\nu\beta} \Lambda^\beta{}_\alpha g^{\mu\alpha} = \left(\Lambda^{-1}\right)^\mu{}_\nu$ gilt, indem Sie die Matrixmultiplikation $g_{\nu\beta} \Lambda^\beta{}_\alpha g^{\mu\alpha}$ ausführen.

(c) Berechnen Sie nun den Vierer-Vektor x'^μ und sodann auch $x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu$.

(d) Zeigen Sie nun explizit, dass $x_\mu x^\mu$ invariant unter Lorentz-Transformationen ist, also $x'_\mu x'^\mu = x_\mu x^\mu$ gilt.

(e) Zeigen Sie zuletzt in der Index-Schreibweise, dass das Skalarprodukt invariant bleibt. *Hinweis:* Nutzen Sie, dass $g_{\mu\nu} = \Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda_\nu{}^\beta g_{\alpha\beta}$ gilt, also $g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ ist. Die rechte Seite der Gleichung entspricht dem Transformationsverhalten eines Tensors 2. Stufe.

Aufgabe 3: Galilei-Transformation

Die allgemeine Koordinatentransformation der Galilei-Gruppe, kurz Galilei-Transformation, von $\{\vec{r}, t\}$ nach $\{\vec{r}\,', t'\}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \vec{r}\,' &= \lambda_1 \mathbf{R} \cdot \vec{r} - \vec{v}t - \vec{r}_0 \ , \\ t' &= \lambda_2 t + t_0 \ , \end{aligned}$$

wobei λ_1, λ_2 Vorzeichen aus der Menge $\{-1, +1\}$ bezeichnen und $\mathbf{R}$ eine Drehmatrix im dreidimensionalen Raum ist. Die Galilei–Transformationen verkörpern damit das Kollektiv der Grundtransformationen Zeittranslation (konstante Verschiebung des Ursprungs der Zeitachse), Ortstranslation (konstante Verschiebung des Ursprungs des Ortsraums und Translation auf ein sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegendes Bezugssystem), Drehung im Ortsraum, Raumspiegelung und Zeitumkehr. $P_G = \{\mathbf{R}, \vec{v}, \vec{r}_0, t_0, \lambda_1, \lambda_2\}$ bezeichnet dabei die Parametermenge (10 reelle Parameter, denn die Drehung $\mathbf{R}$ kann i.A. durch drei Winkel beschrieben werden, und 2 Vorzeichen) der Galilei-Transformation.

(a) Eine Untergruppe der Galilei-Transformation bildet die Boost-Gruppe, deren Transformation gegeben ist durch

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{v}t\,,$$
$$t' = t\,.$$

Dies stellt den Spezialfall von $P_{G'} = \{\mathbb{1}, \vec{v}, \vec{0}, 0, 1, 1\} = \{\vec{v}\}$ dar, wobei $\mathbb{1}$ die dreidimensionale Einheitsmatrix bezeichnet, und schränkt damit die Galilei-Transformationen auf 3 Parameter ein. Fassen wir $\vec{r}$ und t im Vierervektor $r^T = (ct, \vec{r}^T) = (ct, x, y, z)$ zusammen, so können wir die eingeschränkte Galilei-Transformation auch in Vierermatrixform schreiben. Zeigen Sie in diesem Fall, dass

$$r' = \Gamma_{G'}(\vec{v})r$$

gilt, wobei

$$\Gamma_{G'}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\vec{v}}{c} & \mathbb{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v_x}{c} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{v_y}{c} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{v_z}{c} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad r = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ mit } \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Vierermatrixdarstellung für den eingeschränkten Parameterraum aus Teil (a), dass die Menge G' aller daraus resultierender Galilei-Transformationen eine Gruppe bilden. Gehen Sie wie folgt vor:

(i) Zeigen Sie, dass die Hintereinanderausführung zweier Transformationen $P_{G'}$ und $P'_{G'}$, dargestellt durch $\Gamma \in G'$ bzw. $\Gamma' \in G'$ wieder eine Galilei-Transformation ergibt, dass also $\Gamma'' = \Gamma' \cdot \Gamma \in G'$ gilt. Was ergibt sich dann für $\vec{v}\,''$ in Abhängigkeit von $\vec{v}$ und $\vec{v}\,'$?

(ii) Zeigen Sie, dass $\Gamma \cdot (\Gamma' \cdot \Gamma'') = (\Gamma \cdot \Gamma') \cdot \Gamma''$.

(iii) Zeigen Sie, dass ein Einselement $\mathbf{1}$ existiert (nicht zu verwechseln mit der dreidimensionalen Einheitsmatrix) so dass $\Gamma \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} \cdot \Gamma = \Gamma$.

(iv) Zeigen Sie, dass ein inverses Element Γ^{-1} existiert, so dass $\Gamma \cdot \Gamma^{-1} = \Gamma^{-1} \cdot \Gamma = \mathbf{1}$.

(c) Zeigen Sie Eigenschaft (i) aus Teil (b) nun für Galilei-Transformationen G'' bei denen $\mathbf{R} \neq \mathbb{1}$ gilt, also für $P_{G''} = \{\mathbf{R}, \vec{v}, \vec{0}, 0, 1, 1\} = \{\mathbf{R}, \vec{v}\}$:

(i) Wie sieht $\Gamma_{G''}(\mathbf{R}, \vec{v})$ aus?

(ii) Was ergibt sich in diesem Fall für $\vec{v}\,''$, was für R''?