Übungsbetreuung: Seraina Glaus (seraina.glaus@kit.edu) (Raum 12/08 - Geb. 30.23)

Aufgabe 1: Zeitdilatation - Zwillingsparadoxon

Auf der Südhalbkugel der Erde lebt ein Zwillingspaar. Einer der Zwillinge fliege mit einer Rakete zu einem entfernten Planeten, kehre um und fliege wieder zur Erde zurück, während der andere Zwilling seelenruhig die Zeit am Strand von Bali absitzt. Zur näheren Untersuchung des Paradoxons sei der Raketenflug in sechs Phasen unterteilt, genauer Phase 1, der Beschleunigung mit Beschleunigung a von der Erde weg über eine Dauer T_a, Phase 2, der Flug mit konstanter Geschwindigkeit V über eine Dauer T_c, Phase 3, dem Landeanflug mit Beschleunigung $-a$ über eine Dauer T_a. Die Phasen $4-6$ decken äquivalent den Rückflug ab. Alle angegebenen Zeiten seien von der wasserdichten Uhr des sonnengebräunten Erdzwillings im System Σ abgelesen, welcher beim Abflug seine Uhr mit der des Raketenzwillings im System Σ' abgeglichen hat.

(a) Berechnen Sie für die einzelnen Phasen die Zeitdilatation

$$\Delta t' = \int \sqrt{1 - \left(\frac{v(t)}{c}\right)^2} dt \quad .$$

Hinweis: Verwenden Sie die Geschwindigkeit $v(t)$ aus Sicht des Systems Σ in Phase 1:

$$v(t) = \frac{at}{\sqrt{1 + (at)^2/c^2}}$$

Nutzen Sie den arcsinh für das Resultat der ersten Phase 1. Die Phasen $3-6$ folgen aus Symmetrieüberlegungen der Phasen 1 und 2.

(b) Setzen Sie die Gesamtzeit $\Delta t'$ zusammen und zeigen Sie, dass $\Delta t' \leq \Delta t = 4T_a + 2T_c$ gilt. Betrachten Sie den Grenzwert $V \ll c$ und $V = 0.9c$.
Hinweis: Zeigen und nutzen Sie die nachfolgende Beziehung:

$$T_a = \frac{V}{a\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

(c) Das vermeintliche Paradoxon besteht nun in folgender Aussage: Der Raketenzwilling kann behaupten, dass der sonnengebräunte und entspannte Erdzwilling eigentlich jünger sein müsste als er selbst, da das Raketensystem Σ' in Ruhe war und sich die Erde entfernt und wieder genähert hat. Wo liegt der Denkfehler, der das Paradoxon auflöst? Betrachten Sie hierzu auch den Limes $T_a \to 0$.

Aufgabe 2: Zeitdilatation - Myonenzerfall

Im Jahre 1941 zeigten Hall und Rossi, dass der Zerfall von Myonen aus der kosmischen Höhenstrahlung $\mu^\pm \to e^\pm \nu_1 \bar{\nu}_2$ aufgrund ihrer hohen Geschwindigkeit nur adäquat mit Berücksichtigung der Zeitdilatation zu beschreiben war. Im Jahr 1963 wiederholten Frisch und Smith das Experiment mit höherer Genauigkeit. Geht man davon aus, dass die Anzahl der Myonen aus der Höhenstrahlung auf der Erde gleichverteilt ist, lässt sich durch Messung in zwei verschiedenen Höhen unter Benutzung eines Geschwindigkeitsfilters eine höhenabhängige Anzahlbestimmung durchführen. Für Myonen mit Geschwindigkeit $0.995c$ ergibt sich zwischen dem ersten Messpunkt auf dem Mount Washington und dem zweiten Messpunkt in Cambrigde eine Flugzeit von 6.4 μs bei einem Höhenunterschied von 1907 m. Berechnen Sie die relative Anzahl der Myonen, die in Cambrigde zu messen sind mit und ohne Zeitdilatation bei einer mittleren Lebensdauer von $\tau = 2.20$ μs eines ruhenden(!) Myons, d.h. $N(t)/N(0) = e^{-t/\tau}$. Welches Ergebnis ist kompatibel mit dem Messwert 0.731?

Aufgabe 3: Längenkontraktion - Relativistisches Auto

Herr Müller baut ein Haus und gestaltet die anliegende Autogarage versehentlich viel zu kurz, um sein Auto darin parken zu können. Da er sein gesamtes Geld in den Bau investiert hat, muss er sich etwas anderes überlegen, um das Problem zu lösen. Da erinnert er sich an seine erste Vorlesung über Spezielle Relativitätstheorie. Die Länge seines Autos beträgt l_A, die Garage hat aber leider nur eine Einparktiefe von $l_A/2$. Herr Müller will sich nun das Phänomen der Längenkontraktion zunutze machen und berechnen, wie schnell das Auto theoretisch in die Garage einfahren müsste, damit sich das Garagentor bei erreichen des Garagenendes gerade noch schließen lässt.

(a) Ausgehend von allgemeinen Lorentz-Transformationen, bestimmen Sie die Länge eines bewegten Autos l'_A im Ruhesystem der Garage.

(b) Bestimmen Sie nun die Geschwindigkeit v mit welcher das Auto mindestens fahren muss, um in die Garage zu passen.