Übungsbetreuung: Seraina Glaus (seraina.glaus@kit.edu) (Raum 12/08 - Geb. 30.23)

Aufgabe 1: Wellenpakete - Erwartungswerte, Unschärfe, Operatoren im Ortsraum

Wir möchten uns in dieser Aufgabe mit Wellenpaketen noch vertrauter machen und betrachten zum Einstieg eine Fouriertransformation und im Anschluss die Ausbreitung eines Gauß'schen Wellenpaketes $\Psi(x,t)$ in Raum und Zeit. Per Konstruktion erfüllt $\Psi(x,t)$ die eindimensionale Schrödingergleichung des freien Teilchens. Für ein Ebensolches berechnen wir die Orts- und Impulsunschärfe und zeigen die Heisenberg'sche Unschärferelation.

Hinweis: Da sich die Berechnung der relevanten Integrale zieht und eher weniger erhellend ist, nutzen Sie auch gerne Ihren Computer. Sie können Teilaufgaben auch einzeln bearbeiten.

(a) Gegeben sei eine komplexwertige, auf der gesamten x-Achse definierte Funktion $f(x)$. Dieser Funktion ordnen wir mittels des Integrals

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-ikx} f(x)$$

eine neue, auf $-\infty < k < \infty$ definierte Funktion $\tilde{f}(k)$ zu, die wir als Fouriertransformierte von $f(x)$ bezeichnen. Berechnen Sie (erneut) die Fouriertransformierte der Funktion

$$f(x) = e^{-\alpha x^2}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

und vergleichen Sie $\tilde{f}(k)$ mit $f(x)$. *Hinweis:* Es gilt $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \exp(-(x+iy)^2) = \sqrt{\pi}$.

(b) Als Beispiel für die Ausbreitung einer nicht-relativistischen Materiewelle in einer Dimension betrachten wir wie in der Vorlesung das Gauß'sche Wellenpaket

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\; g(k) e^{i(kx-\omega(k)t)} \qquad \text{mit} \qquad \omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

und

$$g(k) = C \exp\left(-\frac{1}{2a^2}(k-k_0)^2\right) .$$

Beachten Sie die leicht andere Form von $g(k)$ im Vergleich zur Vorlesung.

(i) Bestimmen Sie $\Psi(x,t)$. Das Ergebnis lässt sich auf die folgende Form bringen

$$\Psi(x,t) = \frac{Ca}{\sqrt{1+i\frac{a^2\hbar t}{m}}} \exp\left(-\frac{a^2(x-v_g t)^2}{2(1+i\frac{a^2\hbar t}{m})}\right) \exp\left(i(k_0 x - \omega_0 t)\right)$$

mit $v_g = \hbar k_0/m$ und $\omega_0 = \hbar k_0^2/(2m)$.

(ii) Legen Sie die Konstante C so fest, dass $\Psi(x,t)$ und $g(k)$ "auf Eins normiert" sind, also gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\; |\Psi(x,t)|^2 = 1 \qquad \text{und} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dk\; |g(k)|^2 = 1\,.$$

(c) Bilden Sie für die normierten Wellenfunktionen $\Psi(x,t)$ aus Teilaufgabe (b) ($C^{-1} = \sqrt{a\sqrt{\pi}}$) die sogenannten Mittelwerte (oder Erwartungswerte) von Ort und Impuls

(d) Als Maß für die Breite des Gaußschen Wellenpakets definiert man Δx durch

$$(\Delta x)^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$$

und entsprechend Δp. Berechnen Sie Δx und Δp als Funktion der Zeit. Begründen Sie das zeitliche Verhalten von und Δp.

(e) Kommentieren Sie das raum-zeitliche Verhalten von $|\Psi(x,t)|^2$.

Aufgabe 2: Operatoren in der Ortsdarstellung

Der Ortsoperator X und der Impulsoperator P wirken in folgender Weise auf die Wellenfunktion im Ortsraum $\psi(\vec{x},t)$:

$$\vec{X}\psi(\vec{x},t) = \vec{x}\psi(\vec{x},t)\ , \qquad X_j\psi(\vec{x},t) = x_j\psi(\vec{x},t)\ ,$$
$$\vec{P}\psi(\vec{x},t) = -\mathrm{i}\hbar\nabla\psi(\vec{x},t)\ , P_j\psi(\vec{x},t) = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}\psi(\vec{x},t)\ .$$

(a) Zeigen Sie in dieser Darstellung, dass folgende Relation gilt:

$$[X_j, P_k] = \mathrm{i}\hbar\delta_{jk}\,.$$

(b) Zeigen Sie analog für ein freies Teilchen ($H = \vec{P}^{\,2}/2m$):

$$[X_k, H] = \mathrm{i}\frac{\hbar}{m}P_k\,.$$

Hinweis: Um die Operatorrelationen zu beweisen benutzen Sie $[A,B]\,\psi(\vec{x},t)$, und die Eigenschaften des Kommutators:

- Antisymmetrie: $[A,B] = -[B,A]$,
- (Bi-)Linearität: $[\lambda A + B, C] = \lambda[A,C] + [B,C]$,
- Jacobi-Identität: $[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0$,
- Produktregel: $[A,BC] = [A,B]\,C + B\,[A,C]$.