Übungsbetreuung: Seraina Glaus (seraina.glaus@kit.edu) (Raum 12/08 - Geb. 30.23)

Aufgabe 1: Wellenpakete - Erwartungswerte, Unschärfe, Operatoren im Ortsraum

Wir möchten uns in dieser Aufgabe mit Wellenpaketen noch vertrauter machen und betrachten zum Einstieg eine Fouriertransformation und im Anschluss die Ausbreitung eines Gauß'schen Wellenpaketes $\Psi(x,t)$ in Raum und Zeit. Per Konstruktion erfüllt $\Psi(x,t)$ die eindimensionale Schrödingergleichung des freien Teilchens. Für ein Ebensolches berechnen wir die Orts- und Impulsunschärfe und zeigen die Heisenberg'sche Unschärferelation.

Hinweis: Da sich die Berechnung der relevanten Integrale zieht und eher weniger erhellend ist, nutzen Sie auch gerne Ihren Computer. Sie können Teilaufgaben auch einzeln bearbeiten.

(a) Gegeben sei eine komplexwertige, auf der gesamten x-Achse definierte Funktion $f(x)$. Dieser Funktion ordnen wir mittels des Integrals

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-ikx} f(x)$$

eine neue, auf $-\infty < k < \infty$ definierte Funktion $\tilde{f}(k)$ zu, die wir als Fouriertransformierte von $f(x)$ bezeichnen. Berechnen Sie (erneut) die Fouriertransformierte der Funktion

$$f(x) = e^{-\alpha x^2}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

und vergleichen Sie $\tilde{f}(k)$ mit $f(x)$. *Hinweis:* Es gilt $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \exp(-(x+iy)^2) = \sqrt{\pi}$.

(b) Als Beispiel für die Ausbreitung einer nicht-relativistischen Materiewelle in einer Dimension betrachten wir wie in der Vorlesung das Gauß'sche Wellenpaket

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\ g(k) e^{i(kx-\omega(k)t)} \qquad \text{mit} \qquad \omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

und

$$g(k) = C\ \exp\left(-\frac{1}{2a^2}(k-k_0)^2\right).$$

Beachten Sie die leicht andere Form von $g(k)$ im Vergleich zur Vorlesung.

(i) Bestimmen Sie $\Psi(x,t)$. Das Ergebnis lässt sich auf die folgende Form bringen

$$\Psi(x,t) = \frac{Ca}{\sqrt{1+i\frac{a^2\hbar t}{m}}} \exp\left(-\frac{a^2(x-v_g t)^2}{2(1+i\frac{a^2\hbar t}{m})}\right) \exp\left(i(k_0 x - \omega_0 t)\right)$$

mit $v_g = \hbar k_0/m$ und $\omega_0 = \hbar k_0^2/(2m)$.

(ii) Legen Sie die Konstante C so fest, dass $\Psi(x,t)$ und $g(k)$ "auf Eins normiert" sind, also gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ |\Psi(x,t)|^2 = 1 \qquad \text{und} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dk\ |g(k)|^2 = 1\,.$$

(c) Bilden Sie für die normierten Wellenfunktionen $\Psi(x,t)$ aus Teilaufgabe (b) ($C^{-1} = \sqrt{a\sqrt{\pi}}$) die sogenannten Mittelwerte (oder Erwartungswerte) von Ort und Impuls

(d) Als Maß für die Breite des Gaußschen Wellenpakets definiert man Δx durch

$$(\Delta x)^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$$

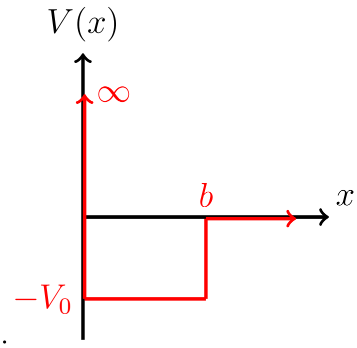
und entsprechend Δp. Berechnen Sie Δx und Δp als Funktion der Zeit. Begründen Sie das zeitliche Verhalten von und Δp.

(e) Kommentieren Sie das raum-zeitliche Verhalten von $|\Psi(x,t)|^2$.

Aufgabe 2: Gebundene Zustände - Potentialtopf

Betrachten Sie ein im eindimensionalen Potential

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für} \quad x < 0 \\ -V_0 < 0 & \text{für} \quad 0 \le x \le b \\ 0 & \text{für} \quad x > b \end{cases}$$



gebundenes Teilchen der Masse m und Energie $-V_0 < E < 0$.
Benutzen Sie die folgenden Abkürzungen

$$k_0 = \sqrt{2mV_0/\hbar^2}, \qquad \rho = \sqrt{-2mE/\hbar^2} \qquad \text{und} \quad K = \sqrt{k_0^2 - \rho^2} \quad .$$

(a) Geben Sie die allgemeine Form der Lösungen der zeitunabhängigen Schrödingergleichung für die drei Bereiche $x < 0$, $0 \le x \le b$, $x > b$ an.

(b) Formulieren Sie die Anschlussbedingungen bei $x = 0$ und $x = b$. Zeigen Sie insbesondere, dass die Anschlussbedingungen bei $x = b$ auf die Gleichung $\tan(Kb) = -K/\rho$ führen.

(c) Untersuchen Sie die Anzahl der gebundenen Zustände für festes b in Abhängigkeit der Potentialtiefe. Zeigen Sie, dass es bei hinreichend flachem Potential keinen gebundenen Zustand gibt.
Hinweis: Offenbar muss $\tan(Kb) < 0$ gelten. Schreiben Sie die Gleichung zudem in $|\sin(Kb)| = K/k_0$ um und lösen Sie die Problematik zuerst graphisch.