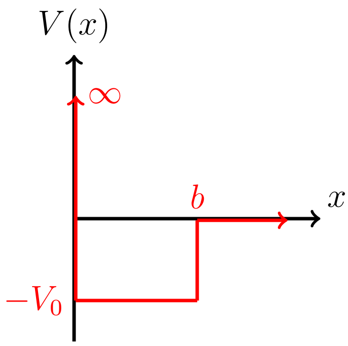
Übungsbetreuung: Seraina Glaus (seraina.glaus@kit.edu) (Raum 12/08 - Geb. 30.23)

Aufgabe 1: Gebundene Zustände - Potentialtopf

Betrachten Sie ein im eindimensionalen Potential

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für} \quad x < 0 \\ -V_0 < 0 & \text{für} \quad 0 \leq x \leq b \\ 0 & \text{für} \quad x > b \end{cases}$$



gebundenes Teilchen der Masse m und Energie $-V_0 < E < 0$.
Benutzen Sie die folgenden Abkürzungen

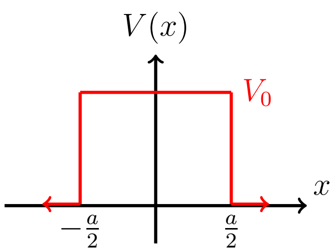
$$k_0 = \sqrt{2mV_0/\hbar^2}, \qquad \rho = \sqrt{-2mE/\hbar^2} \qquad \text{und} \quad K = \sqrt{k_0^2 - \rho^2} \quad .$$

(a) Geben Sie die allgemeine Form der Lösungen der zeitunabhängigen Schrödingergleichung für die drei Bereiche $x < 0$, $0 \leq x \leq b$, $x > b$ an.

(b) Formulieren Sie die Anschlussbedingungen bei $x = 0$ und $x = b$. Zeigen Sie insbesondere, dass die Anschlussbedingungen bei $x = b$ auf die Gleichung $\tan(Kb) = -K/\rho$ führen.

(c) Untersuchen Sie die Anzahl der gebundenen Zustände für festes b in Abhängigkeit der Potentialtiefe. Zeigen Sie, dass es bei hinreichend flachem Potential keinen gebundenen Zustand gibt.
Hinweis: Offenbar muss $\tan(Kb) < 0$ gelten. Schreiben Sie die Gleichung zudem in $|\sin(Kb)| = K/k_0$ um und lösen Sie die Problematik zuerst graphisch.

Aufgabe 2: Streuung am Potentialwall - Tunneleffekt



Betrachten Sie die Streuung eines freien, von links einlaufenden Teilchens $\propto e^{ik(x-vt)}$ mit $v = \omega/k > 0$ an einem Potentialwall ($V_0 > 0$)

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad |x| \geq \frac{a}{2} \\ V_0 & \text{für} \quad |x| < \frac{a}{2} \end{cases}$$

Lösen Sie die stationäre Schrödingergleichung und bestimmen Sie die Energieeigenwerte für den Fall $0 < E < V_0$ in folgenden Schritten:

(a) Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion folgende Form hat

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Re^{-ikx} & \text{für} \quad x \leq -\frac{a}{2} \\ Ae^{qx} + Be^{-qx} & \text{für} \quad -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \\ Te^{ikx} & \text{für} \quad x \geq \frac{a}{2} \end{cases} \qquad \text{mit} \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, \quad q = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$$

mit dem Reflexionskoeffizient R und dem Transmissionskoeffizient T.

(b) Formulieren Sie die Anschlussbedingungen, welche auf folgendes Gleichungssystem führen:

$$\begin{pmatrix} (1 - i\frac{q}{k})e^{-qa/2} & (1 + i\frac{q}{k})e^{qa/2} \\ (1 + i\frac{q}{k})e^{qa/2} & (1 - i\frac{q}{k})e^{-qa/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-ika/2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösen Sie das Gleichungssystem und ermitteln Sie A und B.

(c) Berechnen Sie mit Hilfe von A und B aus den Anschlussbedingungen den Reflexions- R und Transmissionskoeffizient T. Welche Eigenschaft steht im Widerspruch zum klassischen Verhalten?