Moderne Physik für Informatiker

Sommersemester 2019

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

gehalten von

Prof. Dr. M. M. Mühlleitner

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Vorbemerkungen

Disclaimer: Dieses Vorlesungsskript erhebt keinesfalls den Anspruch auf Fehlerfreiheit.

1.1 Inhaltsangabe

I. Analytische Mechanik

II. Spezielle Relativitätstheorie

III. Quantenmechanik

1.2 Literatur

Lehrbücher:

- Analytische Mechanik
  - T. Fließbach, *Lehrbuch zur Theoretischen Physik 1 - Mechanik*, Spektrum
  - W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 1+2*, Springer
  - H. Goldstein, C. P. Poole, J. L. Safko, *Klassische Mechanik*, Wiley-VCH
  - L. D. Landau, E. M. Lifschitz, *Lehrbuch der Theoretischen Physik I (Mechanik)*, Harri Deutsch
- Spezielle Relativitätstheorie
- Quantenmechanik

Mathematische Ergänzung

- I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew, G. Musiol, H. Mühlig, *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Harri Deutsch.
- R. Shankar, *Basic Training in Mathematics (A Fitness Program for Science Students)*, Plenum Press, New York.

1.3 Einführung

1.3.1 Moderne Physik

Der Begriff der 'Modernen Physik' ist in Abgrenzung zur 'klassischen Physik' entstanden. Den Kern der klassischen Physik bilden die Mechanik, der Elektromagnetismus und die Thermodynamik. Die Moderne Physik wurde zu Beginn des 20. Jahrhunderts entwickelt, um Probleme zu verstehen und erklären zu können, die mit den Mitteln der klassischen Physik nicht mehr zugänglich waren. Die klassische Physik beruht auf dem Paradigma, dass alles im Prinzip berechnbar ist, solange die Anfangsbedingungen, also z.B. Ort $\vec{x}_i(t)$ und Geschwindigkeit $\dot{\vec{x}}_i(t)$ eines Massenpunktes i, bekannt sind. Die Experimente zeigten aber immer mehr Widersprüche, die zu ihrer Erklärung einen anderen Ansatz erforderten:

- Die idealisierte thermische Strahlungsquelle eines schwarzen Körpers absorbiert elektromagnetische Strahlung vollständig und sendet in Abhängigkeit von seiner Temperatur Wärmestrahlung aus. Der Versuch, die Schwarzkörperstrahlung rein klassisch zu beschreiben führte jedoch zur Ultraviolett (UV)-Katastrophe: Die über den gesamten Frequenzbereich integrierte Energie der Strahlung strebt für jede Temperatur $T > 0$ gegen unendlich. Erst Max Plancks Annahme, dass die Strahlungsenergie nur in Form von Energiequanten aufgenommen und abgegeben werden kann, löste dieses Problem.

- Der photoelektrische Effekt kann klassisch nicht erklärt werden. In der klassischen Betrachtungsweise sollte Licht in Abhängigkeit von seiner Intensität Energie auf das Elektron eines Metalls übertragen und dieses herausschlagen. Tatsächlich aber ist nicht die Intensität des Lichts entscheidend sondern vielmehr die Frequenz des Lichts. Dieses Phänomen kann erklärt werden, wenn man annimmt, dass das Licht Teilchencharakter hat und dass ein Lichtquant die Energie $E = h\nu$ trägt, die also von seiner Frequenz ν abhängt. Mit h wird das Planck'sche Wirkungsquantum bezeichnet.

- Das klassische Rutherford'sche Atommodell, bei dem Elektronen sich um einen positiven Atomkern bewegen, stellt klassisch ein Rätsel dar. Ein Elektron wird auf einer Umlaufbahn ständig beschleunigt und strahlt somit elektromagnetische Energie ab. Ein Atom müsste also instabil sein und das Elektron spiralförmig in den Kern stürzen. Dieses Modell kann auch nicht erklären, warum Atome nur Licht bestimmter Wellenlängen emittieren.

- Das Michelson-Morley Experiment zeigte, dass die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts unabhängig von seiner Richtung ist, und dass die Auswirkungen eines Äthers, gegen den sich die Erde bewegt, nicht feststellbar sind. Licht bewegt sich relativ zum Beobachter in jeder Richtung mit der Lichtgeschwindigkeit c, egal in welchem Bezugssystem sich der Beobachter befindet. Dies ist eine Aussage der speziellen Relativitätstheorie, in der Raum und Zeit untrennbar miteinander verknüpft sind.

Wie schon bemerkt ist der Begriff Moderne Physik relativ zur klassischen Physik zu sehen. Heute sind manche der Theorien der modernen Physik bereits wieder eingeschränkt. Geht es z.B. um Elementarteilchen, so wird in der zeitgenössischen Physik die Quantenfeldtheorie verwendet. Sie beruht auf dem Konzept der Feldquanten und deren Wechselwirkung.

1.3.2 Vorläufiger Aufbau der Vorlesung

Die Vorlesung behandelt die klassiche Mechanik, die relativistische Mechanik und die Quantenmechanik.

Klassische Mechanik

Nach einer kurzen Erinnerung an die Newtonsche Mechanik, gehen wir über zu einer formaleren, analytischen Beschreibung der Mechanik, die den Langrange-, Hamilton- und Hamilton-Jacobi-Formalismus einschließt. Sie erlaubt eine theoretische Diskussion der zu behandelnden Probleme, die sich die Symmetrien des Systems zunutze macht. Diese sind über das Noether-Theorem mit Erhaltungsgrößen verknüpft. Der Hamiltonformalismus, welcher gegenüber dem Lagrangemechanismus, für die praktische Lösung von Problemen keinen Vorteil bietet, bildet den Ausgangspunkt für die Untersuchung der Relationen zwischen der Mechanik und der Quantenmechanik. Es werden die Begriffe Hamiltonoperator und kanonisch konjugierte Variablen eingeführt.

Relativistische Mechanik

Das Prinzip, dass Raum und Zeit nicht voneinander trennbar sind, führt zur speziellen Relativitätstheorie. Während Phänomene bei geringen Geschwindigkeiten mit der klassischen Physik beschrieben werden können, kann erst die spezielle Relativitätstheorie die bei sehr hohen Geschwindigkeiten erklären.[1] Die Entwicklung der Theorie 1905 durch Albert Einstein beruhte auf Fortschritten im Gebiet des Elektromagnetismus Ende des 19. Jahrhunderts. Einsteins geniale Arbeit war ein gewaltiger Schritt nach vorne und hatte radikale Konsequenzen und so zunächst auch zahlreiche Gegner. Eine wichtige Konsequenz ist die Äquivalenz von Masse und Energie. Zum Inhalt: Es wird das Michelson-Morley Experiment vorgestellt. Es werden die Einstein'schen Postulate, Lorentztransformationen, der Minkowskiraum und die relativistische Formulierung der Elektrodynamik behandelt. Falls zeitlich möglich wird auch die Mechanik eines relativistischen Teilchens untersucht.

Quantenmechanik

Die Quantenmechanik erlaubt im Gegensatz zur klassischen Mechanik die Beschreibung und die Berechnung der physikalischen Eigenschaften von Materie im Größenbereich von Atomen und darunter. Sie bildet die Grundlage zur Beschreibung der Phänomene der Atomphysik, der Festkörperphysik, der Kern- und Elementarteilchenphysik. Nach ein wenig Historie, werden einfache eindimensionale Probleme behandelt, die mit Hilfe der Schrödingergleichung beschrieben werden können. Sie bildet die grundlegende Gleichung der nichtrelativistischen Quantenmechanik und wurde 1926 von Erwin Schrödinger als Wellengleichung aufgestellt. Es werden die Grundpostulate der Quantenmechanik vorgestellt. Symmetrien werden behandelt und hierbei insbesondere der Drehimpuls und der Spin. Das Wasserstoffatom wird berechnet. Die Behandlung von identischen Teilchen in der Quantenmechanik wird beleuchtet, welche letztlich auf die Unterscheidung von Bosonen und Fermionen führt.

[1] Die spezielle Relativitätstheorie stimmt bei niedrigen Geschwindigkeiten natürlich mit der klassischen Physik überein, so dass letztere letztlich als Spezialfall ersterer anzusehen ist.

Kapitel 2

Klassische Newtonsche Mechanik

In der klassichen Mechanik geht es um die Bewegung bzw. die Bewegungszustände von Körpern unter dem Einfluß von Kräften. Eine typische Problemstellung der Mechanik ist:

Gegeben seien für ein System von Massenpunkten $1 \leq i \leq N$ deren Orte $\vec{r}_i(t_0)$ und deren Geschwindigkeiten $\vec{v}_i(t_0)$ zu einer bestimmten Anfangzeit t_0. Auf diese Massenpunkte wirken sowohl äußere Kräfte $\vec{F}$ als auch Kräfte zwischen ihnen. Diese seien für die Wirkung zwischen Massenpunkt i und Massenpunkt j durch $\vec{F}_{ij}$ bezeichnet. Wie lauten nun die *kinematischen Größen* $\vec{r}_i(t)$ und $\vec{v}_i(t) \equiv \dot{\vec{r}}_i(t)$[1] für beliebige Zeiten danach? Zur Lösung des Problems werden Differentialgleichungen aufgestellt, und die kinematischen Größen Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung, $\vec{r}_i(t)$, $\dot{\vec{r}}_i(t)$ und $\ddot{\vec{r}}_i(t)$, ergeben sich als Lösung dieser *Bewegungsgleichungen*.

Neben den kinematischen Größen sind weitere wichtige Begriffe der Mechanik die *Kraft* $\vec{F}$, die *Masse* m eines Massenpunktes und sein Impuls $\vec{p}$. Der physikalische Begriff für die Kraft, welche eine vektorielle Größe ist, geht auf Isaac Newton zurück. Er definierte sie als Ursache für die Bewegung eines Körpers oder für die Änderung seines Bewegungszustandes. Ist ein Körper kräftefrei, so bleibt seine Bewegung unverändert.

2.1 Newtonsche Gesetze

Mit den 1687 in Newtons Werk *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* formulierten *Newtonschen Gesetzen* wurden die Grundlagen der klassischen Mechanik geschaffen. Diese Gesetze werden im Folgenden in Erinnerung gerufen.

Lex Prima (Galileisches Trägheitsgesetz)

Ein Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Translation, sofern er nicht durch einwirkende Kräfte zur Änderung seines Zustands gezwungen wird.

Dies definiert *Inertialsysteme*: In ihnen ruht ein kräftefreier Körper bzw. ein Massenpunkt oder bewegt sich geradlinig, gleichförmig.

Das heißt also, dass seine Geschwindigkeit $\vec{v}$ in Betrag und Richtung konstant ist. Sein Bewegungszustand kann nur die Einwirkung einer äußeren Kraft verändert werden. Damit ergibt sich die Definition der (trägen) *Masse* zu: Jeder Massenpunkt setzt der Einwirkung von Kräften einen Trägheitswiderstand, seine Masse, entgegen. Der *Impuls* ist damit definiert

[1] Der Punkt über einer Größe bezeichnet deren zeitliche Ableitung, also z.B. $\dot{\vec{r}}_i = d\vec{r}_i/dt$.

als

$$\vec{p} = m\vec{v} \; . \tag{2.1}$$

Lex Secunda (Bewegungsgesetz)

Die Änderung der Bewegung eines Körpers ist proportional zu der auf ihn wirkenden Kraft und geschieht in die Richtung, in welche die Kraft weist.

Es gilt also

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F} \; . \tag{2.2}$$

Da meist die Masse m unveränderlich ist, ergibt sich mit

$$\dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}\vec{v} \equiv \vec{a} \tag{2.3}$$

die Gleichung

$$\vec{F} = m\vec{a} \; . \tag{2.4}$$

Der Körper wird also in die Richung der Kraft beschleunigt, die auf ihn wirkt.

Lex Tertia (actio=reactio)

Übt ein Körper A auf einen anderen Körper B eine Kraft aus (actio), so wirkt von Körper B auf Körper A eine gleich große aber entgegen gerichtete Kraft (reactio).

Das bedeutet, dass Kräfte immer paarweise auftreten.

2.2 Kräfte

Wichtige Beispiele für Kräfte sind

Gravitationskraft: Die Gravitationskraft wirkt zwischen zwei Massen, hier im folgenden M und m genannt, und bewirkt deren Anziehung. Sie nimmt mit zunehmendem Abstand der Massen ab, besitzt aber unendliche Reichweite. Die von M auf m, siehe Fig. 2.1, ist gegeben durch

$$\vec{F}_2 = -\gamma \frac{Mm}{r^2}\hat{r} \tag{2.5}$$

mit dem normierten Richtungsvektor

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \; . \tag{2.6}$$

Es gilt $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$. Speziell auf der Erde ergibt sich mit Masse m_e und Radius r_e der Erde sowie der bekannten Gravitationskonstante[2] γ dann

$$F = mg \; , \tag{2.7}$$

wobei $g = 9.81\, m/s^2 \approx 10\, m/s^2$ die Erdbeschleunigung ist. Durch das Graviationsgesetz wird der Begriff der schweren Masse definiert, $m = m_{\text{schwer}}$, $M = M_{\text{schwer}}$. Die schwere und die

[2]Der Wert der Gravitationskonstante beträgt $\gamma = 6.674 \cdot 10^{-11}\, m^3/(kg\, s^2)$.

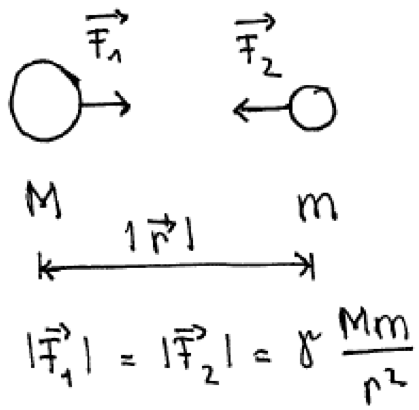

Abbildung 2.1: Die Gravitationskraft zwischen zwei Körpern.

träge Masse sind a priori unabhängig voneinander. Alle bisher durchgeführten Experimente bestätigen, dass die schwere Masse eines Körpers seiner trägen Masse entspricht. Dies ist das (schwache) Äquivalenzprinzip.

Coulombkraft Die Coulombkraft wirkt zwischen zwei Punktladungen oder kugelsymmetrisch verteilten elektrischen Ladungen, Q_1, Q_2. Je nach Vorzeichen der Ladungen wirkt sie anziehend (siehe Gravitationskraft) oder abstoßend in Richtung der Verbindungsgeraden der beiden Ladungen bzw. Ladungsmittelpunkte. Im Vakuum ist sie gegeben durch

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \hat{r} \ . \tag{2.8}$$

Bei $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} As/(Vm)$ handelt es sich um die elektrische Feldkonstante.

Lorentzkraft Die Lorentzkraft wirkt auf eine bewegte Ladung in einem magnetischen oder elektrischen Feld. Sie ist gegeben durch

$$\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \ . \tag{2.9}$$

Bei e handelt es sich um die elektrische Ladung, $\vec{E}$ die elektrische Feldstärke und $\vec{B}$ die magnetische Flussdichte. Die magnetische Komponente der Kraft wirkt senkrecht zur Bewegung der Ladung und senkrecht zur Richtung des magnetischen Feldes.

Federkraft Die dem harmonischen Oszillator zugrunde liegende Kraft ist linear (proportional zur zunehmenden Auslenkung) und stets negativ, also

$$F = \alpha |x| < 0 \ . \tag{2.10}$$

Bei x handelt es sich um die Auslenkung der Feder aus der Ruhelage und α bezeichnet die Federkonstante.

2.2.1 Konservative Kräfte

Konservative Kräfte verrichten längs eines geschlossenen Wegs keinerlei Arbeit. Die Energie bleibt erhalten. Beispiele für konservative Kräfte sind die Gravitationskraft, die Coulombkraft oder die Federkraft. Die von der Kraft längs des Weges von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$ geleistete Arbeit ist definiert als

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} F(\vec{r}')\, d\vec{r}' \ . \tag{2.11}$$

Somit ist also

$$dW = \vec{F} d\vec{r} \ . \tag{2.12}$$

Die kinetische Energie T eines Massenpunktes mit Masse m und Geschwindigkeit $\vec{v}$ ist

$$T = \frac{1}{2} m\vec{v}^2 \ . \tag{2.13}$$

Die zeitliche Änderung der kinetischen Energie ist

$$\frac{d}{dt} T = m\vec{v}\dot{\vec{v}} = \vec{v}\vec{F} \ . \tag{2.14}$$

Es gilt

$$dT = \vec{F}\vec{v}dt = \vec{F}d\vec{r} = dW \ . \tag{2.15}$$

Es wir also Arbeit in kinetische Energie umgewandelt. Betrachten wir den Spezialfall, dass sich die Kraft aus dem negativen Gradienten einer potentiellen Energie $V(\vec{r})$ ergibt, also

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V \ . \tag{2.16}$$

Damit gilt[3]

$$\oint \vec{F} d\vec{r} = 0 \ . \tag{2.17}$$

Die Arbeit ist also vom Integrationsweg unabhängig. Mit der Definition der Gesamtenergie

$$E \equiv T + V \tag{2.18}$$

ergibt sich

$$\frac{d}{dt} E = \frac{d}{dt} T + \frac{d}{dt} V = \vec{v}\vec{F} + (\vec{\nabla} V)\dot{\vec{r}} = \vec{v}\vec{F} - \vec{F}\dot{\vec{r}} = 0 \ . \tag{2.19}$$

Die Energie ist also erhalten.

2.3 Inertialsysteme, Nicht-Inertialsysteme

Bei einem *Intertialsystem* handelt es sich um ein Bezugssystem, in dem sich kräftefreie Körper geradlinig und gleichförmig bewegen. Es gilt hier also das Newtonsche Trägheitsgesetz in seiner einfachsten Form. Es gibt unendlich viele Intertialsysteme. Sie bewegen sich gegeneinander geradlinig und gleichförmig. Ihre räumliche und zeitliche Koordinaten hängen über

[3] Denn $\oint \vec{F} d\vec{r} = -\int_A^B \vec{\nabla} V d\vec{r} - \int_B^A \vec{\nabla} V d\vec{r} = -V(\vec{r}_B) + V(\vec{r}_A) - V(\vec{r}_A) + V(\vec{r}_B) = 0$.

eine *Galilei-Transformation* miteinander zusammen.

Galilei-Invarianz: Die Gesetze der Newtonschen Mechanik sind *invariant* (von gleicher mathematischer Form) unter einer Galilei-Transformation

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{v}_0 t \qquad \text{und} \qquad t' = t \,, \tag{2.20}$$

wenn sich die Systeme Σ und Σ' mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}_0$ gegeneinander bewegen. Die zwei Systeme sind vollkommen gleichwertig. Da die Gesetze der Newtonschen Mechanik in allen Inertialsystemen die gleiche Form haben, gibt es kein bevorzugtes Bezugssystem und man kann daher die Geschwindigkeit nicht absolut messen. Dies ist das *Relativitätsprinzip* der Newtonschen Mechanik. Wir werden später im Rahmen der relativistischen Physik die Lorentz-Transformationen kennenlernen.

Beschleunigte Bezugssysteme sind Bezugssysteme, die kein Inertialsystem sind. Beispiele für solche Systeme sind rotierende Systeme. Es gibt in beschleunigten Bezugssystemen sogenannte Scheinkräfte. Die hängen vom Bezuggssystem ab und verschwinden, wenn man in ein Inertialsystem übergeht. Beispiele sind die Coriolis-Kraft und die Zentrifugalkraft in rotierenden Systemen.

2.4 Weitere Themen

Weitere spezielle Themen im Rahmen der Newtonschen Mechanik sind z.B. Schwingungen, Untersuchungen des (gedämpften) harmonischen Oszillators; Eigenschwinungen in Systemen von Massenpunkten; Mechanik mehrerer Massenpunkte, starrer Körper, Bewegung von Schwerpunkt und Rotationsbewegung, Kreisel. Im Rahmen dieser Vorlesung werden diese und andere aufgrund Zeitmangels nicht behandelt.

Kapitel 3

Lagrangeformalismus

Joseph Louis Lagrange (siehe Fig. 3.1) hat, ausgehend vom Prinzip der kleinsten Wirkung, die klassische Newtonsche Mechanik in die Sprache der Variationsrechnung übersetzt. Es handelt sich um eine zu den Newtonschen Gesetzen äquivalente Formulierung der mechanischen Grundgesetze. Die Lagrangesche (und Hamiltonsche) Formulierung ermöglicht jedoch einen wesentlich tieferen Einblick in die dynamische und geometrische Struktur der Mechanik.

1788 eingeührt, ist der Lagrangeformalismus eine Formulierung der klassischen Mechanik, in der die Dynamik des Systems durch eine einzige skalare Funktion, die Lagrangefunktion, beschrieben wird. Mithilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen lassen sich daraus die Bewegungsgleichungen bestimmen. Der Vorteil dieses Formalismus gegenüber der Newtonschen Mechanik ist, daß sich damit Probleme mit Zwangsbedingungen relativ einfach behandeln lassen – durch das explizite Ausrechnen der Zwangskräfte oder durch die geeignete Wahl generalisierter Koordinaten. Ein Beispiel für eine Zwangsbedingung ist die Bewegung von Körpern, die durch feste Verbindungsstangen zwischen diesen eingeschränkt ist.

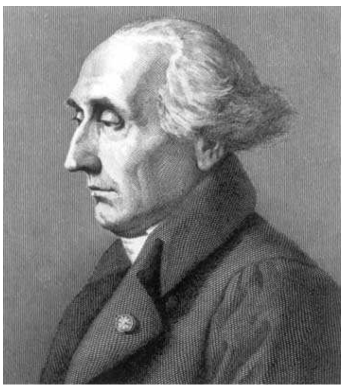

Abbildung 3.1: Joseph-Louis-Lagrange (* 25. Januar 1736 in Turin als Giuseppe Lodovico Lagrangia; † 10. April 1813 in Paris) war ein italienischer Mathematiker und Astronom. [Quelle:Wikipedia].

3.1 Lagrangegleichungen 1. Art

Wir betrachten Systeme, die aus N Massenpunkten mit Massen m_i $(i = 1, ..., N)$ bestehen. Falls sich diese in allen 3 Raumdimensionen frei von Einschränkungen bewegen können, so hat das System $3N$ Freiheitsgrade. Im folgenden betrachten wir Systeme, die Zwangsbedingungen unterworfen sind. Diese können beispielsweise dadurch gegeben sein, dass die Abstände der Massenpunkte konstant sind. Dies ist in einem starren Körper der Fall. Oder aber die Bewegung der Massenpunkte ist auf eine Fläche im Raum eingeschränkt z.B. durch Gleiten auf einem horizontalen Tisch. Ein anderes Beispiel ist das mathematische Pendel.

Holonome Zwangsbedingungen: Wir betrachten ein System von N Teilchen, deren Koordinaten durch $\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N$ gegeben sind. Falls sich für das System von N Teilchen die N_Z Zwangsbedingungen in der Form

$$A_\mu(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N, t) = 0 \quad , \quad \mu = 1, ..., N_Z \tag{3.1}$$

schreiben lassen, so heißen diese *holonome Zwangsbedingungen*. Alle Zwangsbedingungen, die nicht von der Form (3.1) sind, heißen *nichtholonom* (Zwangsbedingungen in Form von Ungleichungen oder differentielle, nicht-integrable Zwangsbedingungen).
Ein Beispiel für nichtholonome Zwangsbedingungen sind in einer Kugel vom Radius R eingeschlossene Gasmoleküle. Ihre Koordinaten unterliegen der Bedingung $r_i \leq R$.

Die Zwangsbedingungen lassen sich weiter bzgl. ihrer Zeitabhängigkeit unterscheiden.

Sie heißen *skleronom*, falls keine explizite Zeitabhängigkeit besteht, ansonsten *rheonom*.

Ein Beispiel für eine holonome und rheonome Zwangsbedingung ist gegeben, wenn sich ein Massenpunkt auf einer bewegten Raumkurve bewegt.

Die Anzahl der Freiheitsgrade f ist, falls die N_Z Gleichungen $A_\mu = 0$ unabhängig sind, gegeben durch

$$f = 3N - N_Z \; . \tag{3.2}$$

Im folgenden betrachen wir einige Beispiele:

▷ Alle Massenpunkte m_i $(i = 1, ..., N)$ können sich nur in einer Ebene bewegen. Die Zwangsbedingung lautet dann ($\vec{p}$ Stützvektor der Ebene, $\vec{h}$ Normalenvektor der Ebene)

$$\vec{h} \cdot (\vec{r}_i - \vec{p}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{h} \cdot \vec{r}_i - k = 0 \quad \text{mit} \quad \vec{h}, \vec{p}, k (\equiv \vec{h} \cdot \vec{p}) = const. \tag{3.3}$$

Damit ist $N_Z = N$ und $f = 2N$. Bei (3.3) handelt es sich um eine holonome skleronome Zwangsbedingung.

▷ Falls sich die Ebene zusätzlich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt, so ist die Zwangsbedingung durch

$$\vec{h} \cdot (\vec{r}_i - \vec{v}t) - k = 0 \tag{3.4}$$

gegeben. Hier ist ebenfalls $N_Z = N$ und $f = 2N$. Durch (3.4) ist eine holonome rheonome Zwangsbedingung gegeben.

▷ Für paarweise konstante Abstände der m_i $(i, j = 1, ..., N)$ haben wir

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = r_{ij} = const. \; . \tag{3.5}$$

Die Freiheitsgrade, die dann noch übrig bleiben, sind durch die Bewegungsmöglichkeiten des starren Körpers gegeben. Diese sind die Translation des Schwerpunktes und die Rotation des Systems als Ganzes um drei orthogonale Achsen. Die Anzahl der Freiheitsgrade ist also $f = 6$. Für 2 Massenpunkte, $N = 2$, ist $f = 5$. Gleichung (3.5) beschreibt eine holonome skleronome Zwangsbedinung.

Durch *Zwangskräfte* $\vec{Z}_i$ kann der Einfluß der Zwangsbedingungen auf die Bewegung der Massenpunkte beschrieben werden. Solche Zwangskräfte sind z.B. Auflagekräfte, Lagerkräfte, Fadenspannungen usw. Diese Zwangskräfte wirken zusätzlich zu den eigentlichen Kräften $\vec{F}_i$ auf die Massenpunkte. Die Newton'schen Bewegungsgleichungen lauten also

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{Z}_i \quad , \quad i = 1, ..., N \; . \tag{3.6}$$

Die Zwangskräfte hängen im allgemeinen selbst von der Bewegung ab und sind Funktionen von $\vec{r}_i$ und $\dot{\vec{r}}_i$.

Im folgenden sehen wir, wie wir die Zwangsbedingungen in die Bewegungsgleichungen integrieren können. Betrachten wir den einfachen Fall der Bewegung eines einzigen Massenpunktes m unter der Zwangsbedingung

$$A(\vec{r}, t) = 0 \; . \tag{3.7}$$

Die Bewegung findet auf der durch $A = 0$ definierten Fläche statt. Diese kann auch zeitabhängig sein. Die Zwangsbedingung schränkt seine Bewegung innerhalb der Fläche nicht ein, noch beeinflusst sie sie. Damit hat die Zwangskraft keine Komponente tangential zur Fläche und muss vielmehr senkrecht auf der Fläche stehen, d.h.

$$\vec{Z}(\vec{r}, t) = \lambda(t) \cdot \vec{\nabla} A(\vec{r}, t) \; . \tag{3.8}$$

Der Gradient $\vec{\nabla} A$ zeigt in Richtung der Normalen der Fläche. Der Proportionalitätsfaktor $\lambda(t)$ muss noch bestimmt werden. Er hängt wegen der Zeitabhängigkeit von $A(\vec{r}, t)$ und der Abhängigkeit von der tatsächlichen Bewegung von der Zeit ab.

Bemerkung: Daß der Gradient $\vec{\nabla} A$ senkrecht auf der durch $A = 0$ definierten Fläche steht, sieht man folgendermaßen: Seien $\vec{r}$ und $\vec{r} + d\vec{r}$ zwei infinitesimal benachbarte Punkte auf dieser Fläche, also

$$A(\vec{r}, t) = 0 \quad , \quad A(\vec{r} + d\vec{r}, t) = 0 \; . \tag{3.9}$$

Die Entwicklung der zweiten Gleichung um $\vec{r}$ liefert

$$A(\vec{r} + d\vec{r}, t) = A(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} A \cdot d\vec{r} + \mathcal{O}((d\vec{r})^2) = 0 \; . \tag{3.10}$$

Hieraus folgt, daß $\vec{\nabla} A \cdot d\vec{r} = 0$. Da $d\vec{r}$ ein beliebiger infinitesimaler Vektor parallel zur Tangentialfläche im Punkt $\vec{r}$ ist, steht also $\vec{\nabla} A$ senkrecht auf der Fläche.

Die Bewegung des Massenpunktes wird also durch folgendes Gleichungssystem beschrieben,

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{r}} &= \vec{F} + \lambda \cdot \vec{\nabla} A(\vec{r}, t) && (3.11) \\ A(\vec{r}, t) &= 0 \; . && (3.12) \end{aligned}$$

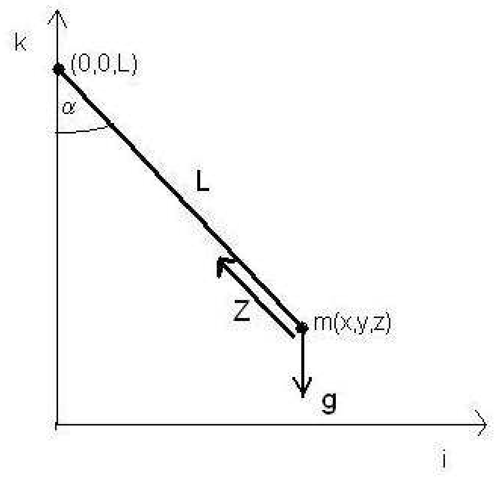

Abbildung 3.2: Das ebene Pendel. Auf die Masse m wirkt die Schwerkraft $\vec{F}$ und die durch den Faden ausgeübte unbekannte Zwangskraft $\vec{Z}$.

Ebenes Pendel: Betrachten wir als Beispiel das ebene Pendel, siehe Fig. 3.2. Hier kann man sich nochmals klarmachen, daß die Zwangskraft von der tatsächlichen Bewegung abhängt. Denn sie muß zum einen die Komponente der Schwerkraft in Fadenrichtung kompensieren. Die Zwangsbedingung legt die Richtung der Zwangskraft fest. Das Pendel bewege sich in der x-z–Ebene (im Bild i-k–Ebene). Somit haben wir

$$A(\vec{r},t) = x^2 + (L-z)^2 - L^2 = 0 \tag{3.13}$$

$$\vec{\nabla} A = 2\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ (z-L) \end{pmatrix} . \tag{3.14}$$

Und die Bewegungsgleichungen mit Zwangsbedingung lauten also

$$m\ddot{x} = 2\lambda x \tag{3.15}$$

$$m\ddot{z} = -mg + 2\lambda(z-L) \tag{3.16}$$

$$x^2 + z^2 - 2Lz = = 0 . \tag{3.17}$$

Allgemeiner Fall: Betrachten wir den allgemeinen Fall mehrerer (d.h. N) Teilchen und mehrerer (d.h. N_Z) Zwangsbedingungen. Die $3N$ Bewegungsgleichungen und N_Z Zwangsbedingungen ergeben die *Lagrangegleichungen 1. Art*

Lagrangegleichungen 1. Art

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_{\mu=1}^{N_Z} \lambda_\mu(t)\frac{\partial}{\partial\vec{r}_i}A_\mu(\vec{r}_1,...,\vec{r}_N,t) \qquad i=1,...,N \tag{3.18}$$

$$A_\mu(\vec{r}_1,...,\vec{r}_N,t) = 0 \qquad \mu = 1,...,N_Z . \tag{3.19}$$

Bemerkung: Hier bedeutet $\partial/\partial\vec{r}_i \equiv \vec{\nabla}_i = (\partial/\partial x_i, \partial/\partial y_i, \partial/\partial z_i)^T$, also der Gradient, der auf das Teilchen i wirkt.

Damit wenigstens ein Freiheitsgrad vorhanden ist, ist die Zahl der Zwangsbedingungen begrenzt auf $N_Z \leq 3N - 1$.

3.2 Lagrangegleichungen 2. Art

Die bisher eingeführten Zwangskräfte sind lediglich Hilfsgrößen und im allgemeinen nicht von physikalischer Bedeutung. Es ist daher geschickt, sie von Anfang an zu vermeiden. Tut man dies, indem man sie als ersten Schritt zur Lösung der Lagrangegleichungen 1. Art eliminiert, so führt dies möglicherweise auf komplizierte Formulierungen. Ein besseres Verfahren ist, von vornherein die Koordinaten so zu wählen, dass sie den durch die holonomen Zwangsbedingungen definierten Unterraum parametrisieren. Solche Koordinaten werden *verallgemeinerte Koordinaten* genannt. Beim ebenen Pendel verwendet man statt der kartesischen Koordinaten, welche die Zwangsbedingung $x^2 + y^2 = L^2$ explizit berücksichtigen müssen, Polarkoordinaten (r, φ). Konstanz der Pendellänge bedeutet eine konstante Koordinate r. Und die Bewegung des Pendels wird mit der Winkelkoordinate vollständig beschrieben. Im folgenden soll das Vorgehen zur Verwendung verallgemeinerter Koordinaten eingeführt werden.

3.2.1 Verallgemeinerte Koordinaten

Wir betrachten ein System von N Massenpunkten, die durch $3N$ Koordinaten $\vec{r}_i$ $(i = 1, ..., N)$ beschrieben werden. Bei N_Z Zwangsbedingungen sind nur $f = 3N - N_Z$ Koordinaten voneinander unabhängig. (f ist die Anzahl der verbleibenden Freiheitsgrade.) Jede beliebige Wahl dieser f unabhängigen Koordinaten wird als *generalisierte* oder *verallgemeinerte Koordinaten* bezeichnet,

$$q = \{q_1, ..., q_f\} \ , \qquad f = 3N - N_Z \ . \tag{3.20}$$

Diese Wahl ist nicht eindeutig. Die Wahl wird aber durch Symmetrie-Gesichtspunkte und Anstreben größtmöglicher Einfachheit nahegelegt.[1] Die Orte der Teilchen sind durch die Wahl der q_k $(k = 1, ..., f)$ festgelegt,

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, ..., q_f, t) \ . \tag{3.21}$$

Die verallgemeinerten Koordinaten enthalten die Zwangsbedingungen implizit. Diese sind für beliebige q_k $(k = 1, ..., f)$ also automatisch erfüllt. D.h.

$$A_\mu(\vec{r}_1(q_1, ..., q_f, t), ..., \vec{r}_N(q_1, ..., q_f, t)) = 0 \quad , \quad \mu = 1, ..., N_Z \ . \tag{3.22}$$

Beispiel: Betrachten wir das ebene Pendel mit variabler Fadenlänge $L(t)$. Der einzige Freiheitsgrad ist der Winkel $\varphi(t)$. Die kartesischen Koordinaten ausgedrückt durch die verallgemeinerte Koordinate $\varphi(t)$ erfüllen die Zwangsbedingung automatisch, denn

$$x(t) = L(t) \sin \varphi(t) \tag{3.23}$$
$$y(t) = 0 \tag{3.24}$$
$$z(t) = -L(t) \cos \varphi(t) \tag{3.25}$$

[1] Auch wenn keine Zwangsbedingungen vorliegen, ist die Benutzung generalisierter Koordinaten nützlich. Etwa beim Zentralkraftproblem, dessen Beschreibung durch (r, θ, φ) einfacher ist also durch (x, y, z).

und

$$x^2 + z^2 = L(t)^2 \ . \tag{3.26}$$

Bemerkung: Auch Impulse und Energien etc. können als generalisierte Koordinaten verwendet werden.

3.2.2 Die Lagrangefunktion

Im folgenden soll die Lagrangefunktion hergeleitet werden. Dazu multiplizieren wir die Bewegungsgleichung (3.18) für m_i mit $\partial\vec{r}_i/\partial q_\alpha$ und summieren über i,[2]

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i - \sum_{\mu=1}^{N_Z} \lambda_\mu(t)\frac{\partial A_\mu}{\partial \vec{r}_i} = 0 \qquad \Big| \text{“}\cdot \sum_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\text{”} \qquad \alpha = 1, ..., f \ . \tag{3.27}$$

Aus $A_\mu(\{q_\alpha\}, t) \equiv 0$ folgt, daß

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial q_\alpha} = 0 \ . \tag{3.28}$$

Nun hängt aber A_μ über die kartesischen Koordinaten $\vec{r}_i(\{q_\alpha\}, t)$ von q_α ab. Damit ist also

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial q_\alpha} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial A_\mu}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \ . \tag{3.29}$$

Und somit ist mit Glg. (3.28) auch

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial A_\mu}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = 0 \ . \tag{3.30}$$

Damit fallen aus Glg. (3.27) die Zwangskräfte heraus,

$$\sum_{i=1}^{N} \left(m_i\ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} - \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) = 0 \ , \qquad \alpha = 1, ..., f \ . \tag{3.31}$$

Zur weiteren Umformung dieser f Gleichungen betrachten wir die totale Zeitableitung von $\vec{r}_i$,

$$\dot{\vec{r}}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_\beta \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta = \dot{\vec{r}}_i(\{q_\beta\}, t) \ . \tag{3.32}$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \ . \tag{3.33}$$

Dies verwenden wir im 1. Term der Bewegungsgleichungen (3.31),

$$\begin{aligned} \sum_i m_i\ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} &= \sum_i m_i\ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{d}{dt}\left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} \right\} - \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} && (3.34) \\ &= \frac{d}{dt}\left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} T \right\} - \frac{\partial}{\partial q_\alpha} T \ , && (3.35) \end{aligned}$$

[2] Die Anführungszeichen in Glg. (3.27) sollen ausdrücken, dass erst multipliziert und dann summiert wird.

wobei

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \tag{3.36}$$

die kinetische Energie bezeichnet. In Glg. (3.34) wurde verwendet, daß

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right\} = \frac{d}{dt} \left\{ \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} \right\} = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} + \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_\alpha} , \tag{3.37}$$

da

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_\alpha} . \tag{3.38}$$

Mit der potentiellen Energie V des Systems, ausgedrückt durch die verallgemeinerten Koordinaten $q \equiv \{q_\alpha\}$,

$$V(q,t) = V(\vec{r}_1(q,t), ..., \vec{r}_N(q,t)) , \tag{3.39}$$

erhalten wir für die Kraftterme

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = \sum_i \left(-\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial}{\partial q_\alpha} V(q,t) . \tag{3.40}$$

Wir definieren als *verallgemeinerte Kräfte* Q_α

$$Q_\alpha = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} , \qquad \alpha = 1, ..., f . \tag{3.41}$$

Unter Verwendung von Glgen. (3.31), (3.34), (3.35) und (3.40) lassen sich somit die Bewegungsgleichungen kompakt schreiben als

Lagrangegleichungen 2. Art

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \quad \text{mit} \quad \alpha = 1, ..., f \quad \text{und} \tag{3.42}$$

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - V(q,t) \tag{3.43}$$

Hierbei bezeichnet L die Lagrangefunktion, die von den verallgemeinerten Koordinaten q und den Geschwindigkeiten $\dot{q}$ sowie der Zeit t abhängt. Bei den Gleichungen (3.42) handelt es sich um die *Lagrangegleichungen 2. Art.* Sie sind die Bewegungsgleichungen eines Systems von Massenpunkten und der wichtigste Ausgangspunkt zur Lösung von Problemen in der Mechanik. Die Lagrangefunktion charakterisiert ein System eindeutig.

<u>Bemerkungen:</u>

- In den Lagrangegleichungen 2. Art sind die Zwangsbedingungen eliminiert. Sie treten nicht mehr auf.

- Durch die Gleichungen (3.42) ist ein System von α Differentialgleichungen 2. Ordnungen gegeben. Zu dessen Lösung werden 2α Anfangsbedingungen benötigt.
- Die zentralen Begriffe sind hier Energie und Arbeit im Vergleich zu den zentralen Begriffen Impuls und Kraft der Newtonschen Mechanik.
- Die Langrangegleichungen sind invariant unter Punkttransformationen:

$$(q_1, ..., q_\alpha) \overset{\text{diffbar}}{\longleftrightarrow} (\bar{q}_1, ..., \bar{q}_\alpha) \tag{3.44}$$

  mit

$$\bar{q}_1 = \bar{q}_1(q_1, ..., q_\alpha, t) \quad , \; ... \; , \quad \bar{q}_\alpha = \bar{q}_\alpha(q_1, ..., q_\alpha, t) \; . \tag{3.45}$$

  Damit hat man bei der Wahl der generalisierten Koordinaten gewisse Freiheiten. Dies kann zur Vereinfachung der Lösung des Problems genutzt werden, indem man beispielsweise Symmetrien ausnutzt.

Um die Bewegungsgleichungen eines Systems mit Zwangsbedingungen aufzustellen, geht man also wie folgt vor:

1) Wahl einer geeigneten Parametrisierung des f-dimensionalen Unterraums des $3N$-dimensionalen Konfigurationsraums: $q = \{q_1, ..., q_f\}$.
2) Bestimmung von T und V. Bestimmung von L.
3) Aufstellen der Lagrangegleichungen.

3.3 Erhaltungsgrößen

Erhaltungssätze bestimmen das qualitative Verhalten eines Systems und sind für die Lösung der Bewegungsgleichungen von großem Nutzen. Im Lagrangeformalismus sind Erhaltungsgrößen dadurch gegeben, daß die Lagrangefunktion $L(q, \dot{q}, t)$ von einem oder mehrerer ihrer Argumente nicht abhängt.

3.3.1 Energieerhaltung (“Homogenität der Zeit”)

Die Lagrangefunktion soll nicht explizit von der Zeit abhängen,

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \; . \tag{3.46}$$

Die totale Ableitung der Lagrangefunktion nach der Zeit ist damit unter Verwendung der Lagrangegleichungen 2. Art

$$\frac{d}{dt}L = \sum_{\alpha=1}^{f} \left\{ \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}}_{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha \right\} = \sum_\alpha \left\{ \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha \right\} = \frac{d}{dt} \left\{ \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha \right\} \tag{3.47}$$

Daraus ergibt sich der Erhaltungssatz

$$\frac{d}{dt}H = 0\ , \tag{3.48}$$

wobei die Erhaltungsgröße H definiert ist als

$$H = \left(\sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha\right) - L\ . \tag{3.49}$$

Bei H handelt es sich um die *Hamiltonfunktion*.

Hängen die Zwangsbedingungen nicht explizit von der Zeit ab, so ist die kinetische Energie quadratisch in den $\dot{q}_\alpha$,

$$T = \sum_{\alpha',\beta} m_{\alpha'\beta}\dot{q}_{\alpha'}\dot{q}_\beta\ , \tag{3.50}$$

wobei es sich bei den Koeffizienten $m_{\alpha'\beta}$ um den verallgemeinerten Massentensor handelt. Hängt ferner V nicht von den Geschwindigkeiten $\dot{q}_\alpha$ ab, so ist

$$\sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha = \sum_{\alpha',\beta} 2m_{\alpha'\beta}\dot{q}_{\alpha'}\dot{q}_\beta = 2T \tag{3.51}$$

und damit

$$H = 2T - L = T + V = E\ . \tag{3.52}$$

Damit ist die Hamiltonfunktion gleich der Energie des Systems.

3.3.2 Zyklische Koordinaten

Falls L unhängig von einer verallgemeinerten Koordinate q_β ist, d.h.

$$\frac{\partial L}{\partial q_\beta} = 0\ , \tag{3.53}$$

dann nennt man q_β eine *zyklische Koordinate*. Aus den Bewegungsgleichungen folgt

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} = \frac{\partial L}{\partial q_\beta} = 0\ . \tag{3.54}$$

Damit ist

$$p_\beta \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} = \text{zeitlich konstant}\ . \tag{3.55}$$

Bei p_β handelt es sich um den *verallgemeinerten Impuls*. Zyklische Koordinaten führen automatisch zu einem *Erhaltungssatz*. Um Problemstellungen zu erleichtern sollten also möglichst viele generalisierte Koordinaten zyklisch sein. Zeitlich konstante Koordinaten nennt man auch Konstanten der Bewegung.

Beispiele:
1) Freies Teilchen: Die Lagrangefunktion lautet

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 \tag{3.56}$$

und ist unahbhängig von $\vec{r}$. Damit ist der zugehörige verallgemeinerte Impuls

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} = const.\ . \tag{3.57}$$

Es liegt Impulserhaltung vor. Dies entspricht der Translationsinvarianz des Systems.

2) Massenpunkt auf einem Kreis in der x-$y-$Ebene. Die geeignete verallgemeinerte Koordinate ist gegeben durch $q = \varphi$, wobei φ der Winkel ist. Damit lautet die Lagrangefunktion

$$L = \frac{m}{2} r^2 \dot{\varphi}^2 \ , \quad \text{wobei } r \text{ der Radius des Kreises ist.} \tag{3.58}$$

Sie hängt nicht von der verallgemeinerten Koordinate $q = \varphi$ ab. Der zugehörige verallgemeinerte Impuls ist

$$J_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = const.\ . \tag{3.59}$$

Es liegt Drehimpulserhaltung vor. Damit verbunden ist die Isotropie des Raums.

3.4 Beispiel: Schwingende Hantel

Wir betrachten eine Hantel, die aus zwei Massenpunkten m_1 und m_2 besteht, die durch eine Stange der Länge l verbunden sind. Die Hantel schwingt in der $x - y$-Ebene unter Einfluss des Schwerefeldes, das in y-Richtung wirkt. Die Aufhängung der Hantel im Massenpunkt m_1 sei in x-Richtung frei beweglich, siehe Abb. 3.3. Wir haben 6 Freiheitsgrade für die zwei

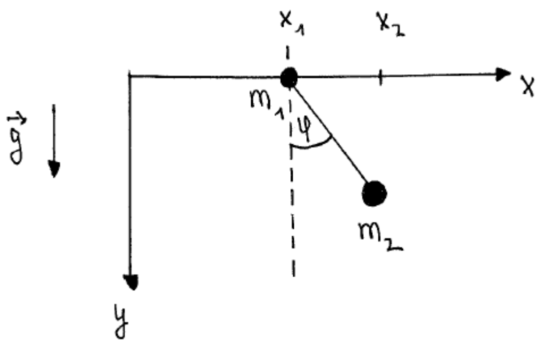

Abbildung 3.3: Bewegung einer Hantel im Schwerefeld mit Erdbeschleunigung $\vec{g}$.

Massenpunkte, die sich a priori in alle drei Raumrichtungen bewegen können. Sie unterliegen aber 4 holonomen skleronomen Zwangsbedingungen. Diese sind durch

$$z_1 = z_2 = 0 \ , \qquad y_1 = 0 \ , \qquad (x_1 - x_2)^2 + y_2^2 - l^2 = 0 \tag{3.60}$$

gegeben. Wir haben damit $\alpha = 6 - 4 = 2$ Freiheitsgrade. Als generalisierte Koordinaten bieten sich an

$$q_1 = x_1 \qquad \text{und} \qquad q_2 = \varphi \ . \tag{3.61}$$

Mit

$$x_1 = q_1 \tag{3.62}$$
$$x_2 = q_1 + l \sin q_2 \tag{3.63}$$
$$y_1 = z_1 = z_2 = 0 \tag{3.64}$$
$$y_2 = l \cos q_2 \tag{3.65}$$

sowie

$$\dot{x}_1 = \dot{q}_1 \tag{3.66}$$
$$\dot{x}_2 = \dot{q}_1 + l\dot{q}_2 \cos q_2 \tag{3.67}$$
$$\dot{y}_2 = -l\dot{q}_2 \sin q_2 \tag{3.68}$$

haben wir für die kinetische Energie T

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \tag{3.69}$$
$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(l^2\dot{q}_2^2 + 2l\dot{q}_1\dot{q}_2 \cos q_2) \ . \tag{3.70}$$

Die potentielle Energie ergibt sich zu

$$V = 0 - m_2 g l \cos q_2 \ . \tag{3.71}$$

Die Lagrangefunktion lautet damit

$$L = T - V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(l^2\dot{q}_2^2 + 2l\dot{q}_1\dot{q}_2 \cos q_2) + m_2 g l \cos q_2 \ . \tag{3.72}$$

Die Lagrangefunktion hängt nicht von q_1 (nur von $\dot{q}_1$) ab! Bei q_1 handelt es sich um eine zyklische Koordiante. Der zugehörige verallgemeinerte Impuls lautet

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = (m_1 + m_2)\dot{q}_1 + m_2 l\dot{q}_2 \cos q_2 = \text{const.} \equiv c \ . \tag{3.73}$$

Für $\dot{q}_1$ finden wir damit

$$\dot{q}_1 = c - \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}\dot{q}_2 \cos q_2 \ . \tag{3.74}$$

Und somit ($a \equiv$ const.)

$$q_1(t) = ct - \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \sin q_2(t) + a \ . \tag{3.75}$$

Mit den Anfangsbedingungen

$$q_1(t=0) = 0 \qquad \text{und} \qquad q_2(t=0) = 0 \tag{3.76}$$

sowie

$$\dot{q}_1(t=0) = -\frac{m_2 l}{m_1 + m_2}\omega_0 \qquad \text{und} \qquad \dot{q}_2(t=0) = \omega_0 \tag{3.77}$$

finden wir

$$a = c = 0 \tag{3.78}$$

und somit also

$$q_1(t) = -\frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \sin q_2(t) \; . \tag{3.79}$$

Und per Rücktransformation

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l \sin\varphi(t) \; , \qquad y_1(t) = z_1(t) = 0 \; , & (3.80) \\ x_2(t) &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} l \sin\varphi(t) \; , \qquad y_2(t) = l\cos\varphi(t) \; , \qquad z_2(t) = 0 \; . & (3.81) \end{aligned}$$

Die Bahnkurve von m_2 ist eine Ellipse:

$$\frac{x_2^2}{\left(\frac{m_1 l}{m_1+m_2}\right)^2} + \frac{y_2^2}{l^2} = 1 \; . \tag{3.82}$$

Der genaue zeitliche Verlauf ergibt sich aus der Lösung von $\varphi(t)$ bzw. $q_2(t)$. Mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} &= m_2(l^2\dot{q}_2 + l\dot{q}_1\cos q_2) & (3.83) \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} &= m_2(l^2\ddot{q}_2 + l\ddot{q}_1\cos q_2 - l\dot{q}_1\dot{q}_2\sin q_2) & (3.84) \\ \frac{\partial L}{\partial q_2} &= m_2(-l\dot{q}_1\dot{q}_2\sin q_2 - gl\sin q_2) \; . & (3.85) \end{aligned}$$

ergibt sich aus den Lagrangegleichungen 2. Art

$$l^2\ddot{q}_2 + l\ddot{q}_1\cos q_2 + gl\sin q_2 = 0 \; . \tag{3.86}$$

Mit

$$\ddot{q}_1 = -\frac{m_2 l}{m_1 + m_2}(\ddot{q}_2\cos q_2 - \dot{q}_2^2\sin q_2) \tag{3.87}$$

ergibt sich dann

$$l^2\ddot{q}_2 + l\cos q_2\left(-\frac{m_2 l}{m_1 + m_2}(\ddot{q}_2\cos q_2 - \dot{q}_2^2\sin q_2)\right) + gl\sin q_2 = 0 \; . \tag{3.88}$$

Dies ist eine komplizierte Differentialgleichung. Sie ist für kleine φ lösbar:

$$\varphi(t) = \frac{\omega_0}{\omega}\sin\omega t \; , \tag{3.89}$$

mit

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}\frac{m_1 + m_2}{m_1}} \; . \tag{3.90}$$