

# Moderne Physik für Informatiker

SOMMERSEMESTER 2019

KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)

GEHALTEN VON

PROF. DR. M. M. MÜHLEITNER



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vorbemerkungen</b>	<b>1</b>
1.1	Inhaltsangabe . . . . .	1
1.2	Literatur . . . . .	1
1.3	Einführung . . . . .	2
1.3.1	Moderne Physik . . . . .	2
1.3.2	Vorläufiger Aufbau der Vorlesung . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Klassische Newtonsche Mechanik</b>	<b>5</b>
2.1	Newtonsche Gesetze . . . . .	5
2.2	Kräfte . . . . .	6
2.2.1	Konservative Kräfte . . . . .	7
2.3	Inertialsysteme, Nicht-Inertialsysteme . . . . .	8
2.4	Weitere Themen . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Lagrangeformalismus</b>	<b>11</b>
3.1	Lagrangegleichungen 1. Art . . . . .	12
3.2	Lagrangegleichungen 2. Art . . . . .	15
3.2.1	Verallgemeinerte Koordinaten . . . . .	15
3.2.2	Die Lagrangefunktion . . . . .	16
3.3	Erhaltungsgrößen . . . . .	18
3.3.1	Energieerhaltung (“Homogenität der Zeit”) . . . . .	18
3.3.2	Zyklische Koordinaten . . . . .	19
3.4	Beispiel: Schwingende Hantel . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Variationsprinzipien in der Mechanik</b>	<b>23</b>
4.1	Die Euler-Lagrange-Gleichung . . . . .	23
4.2	Hamiltonsches Prinzip . . . . .	25
4.2.1	Bemerkungen . . . . .	26
4.2.2	Unbestimmtheit der Lagrangefunktion . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Hamiltonformalismus</b>	<b>29</b>
5.1	Kanonische Gleichungen . . . . .	29
5.1.1	Vorgehen im Hamiltonformalismus . . . . .	31
5.2	Poissonklammer . . . . .	33
5.3	Hamiltonsches Prinzip . . . . .	34
5.4	Zustand eines Systems . . . . .	35

<b>6</b>	<b>Spezielle Relativitätstheorie</b>	<b>39</b>
6.1	Das Michelson-Morley Experiment . . . . .	41
6.2	Die Einsteinschen Postulate . . . . .	43
6.3	Die Lorentztransformation . . . . .	44
6.3.1	Einschub: Index Notation . . . . .	44
6.3.2	Herleitung der Lorentz-Transformation . . . . .	46
6.4	Folgerungen aus der Lorentz-Transformation . . . . .	49
6.5	Relativistische Mechanik . . . . .	54
6.5.1	Relativistische Geschwindigkeit . . . . .	54
6.5.2	Verallgemeinerte Kraftgleichung . . . . .	55
6.5.3	Der Vierer-Impuls . . . . .	56
6.6	Zusammenfassung einiger wichtiger Relationen . . . . .	57

# Kapitel 1

## Vorbemerkungen

Disclaimer: Dieses Vorlesungsskript erhebt keinesfalls den Anspruch auf Fehlerfreiheit.

### 1.1 Inhaltsangabe

- I. Analytische Mechanik
- II. Spezielle Relativitätstheorie
- III. Quantenmechanik

### 1.2 Literatur

Lehrbücher:

- Analytische Mechanik
  - T. Fließbach, *Lehrbuch zur Theoretischen Physik 1 - Mechanik*, Spektrum
  - W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 1+2*, Springer
  - H. Goldstein, C. P. Poole, J. L. Safko, *Klassische Mechanik*, Wiley-VCH
  - L. D. Landau, E. M. Lifschitz, *Lehrbuch der Theoretischen Physik I (Mechanik)*, Harri Deutsch
- Spezielle Relativitätstheorie
- Quantenmechanik

Mathematische Ergänzung

- I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew, G. Musiol, H. Mühlig, *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Harri Deutsch.
- R. Shankar, *Basic Training in Mathematics (A Fitness Program for Science Students)*, Plenum Press, New York.

## 1.3 Einführung

### 1.3.1 Moderne Physik

Der Begriff der 'Modernen Physik' ist in Abgrenzung zur 'klassischen Physik' entstanden. Den Kern der klassischen Physik bilden die Mechanik, der Elektromagnetismus und die Thermodynamik. Die Moderne Physik wurde zu Beginn des 20. Jahrhunderts entwickelt, um Probleme zu verstehen und erklären zu können, die mit den Mitteln der klassischen Physik nicht mehr zugänglich waren. Die klassische Physik beruht auf dem Paradigma, dass alles im Prinzip berechnbar ist, solange die Anfangsbedingungen, also z.B. Ort  $\vec{x}_i(t)$  und Geschwindigkeit  $\dot{\vec{x}}_i(t)$  eines Massenpunktes  $i$ , bekannt sind. Die Experimente zeigten aber immer mehr Widersprüche, die zu ihrer Erklärung einen anderen Ansatz erforderten:

- Die idealisierte thermische Strahlungsquelle eines schwarzen Körpers absorbiert elektromagnetische Strahlung vollständig und sendet in Abhängigkeit von seiner Temperatur Wärmestrahlung aus. Der Versuch, die Schwarzkörperstrahlung rein klassisch zu beschreiben führte jedoch zur Ultraviolett (UV)-Katastrophe: Die über den gesamten Frequenzbereich integrierte Energie der Strahlung strebt für jede Temperatur  $T > 0$  gegen unendlich. Erst Max Plancks Annahme, dass die Strahlungsenergie nur in Form von Energiequanten aufgenommen und abgegeben werden kann, löste dieses Problem.
- Der photoelektrische Effekt kann klassisch nicht erklärt werden. In der klassischen Betrachtungsweise sollte Licht in Abhängigkeit von seiner Intensität Energie auf das Elektron eines Metalls übertragen und dieses heraus schlagen. Tatsächlich aber ist nicht die Intensität des Lichts entscheidend sondern vielmehr die Frequenz des Lichts. Dieses Phänomen kann erklärt werden, wenn man annimmt, dass das Licht Teilchencharakter hat und dass ein Lichtquant die Energie  $E = h\nu$  trägt, die also von seiner Frequenz  $\nu$  abhängt. Mit  $h$  wird das Planck'sche Wirkungsquantum bezeichnet.
- Das klassische Rutherford'sche Atommodell, bei dem Elektronen sich um einen positiven Atomkern bewegen, stellt klassisch ein Rätsel dar. Ein Elektron wird auf einer Umlaufbahn ständig beschleunigt und strahlt somit elektromagnetische Energie ab. Ein Atom müsste also instabil sein und das Elektron spiralförmig in den Kern stürzen. Dieses Modell kann auch nicht erklären, warum Atome nur Licht bestimmter Wellenlängen emittieren.
- Das Michelson-Morley Experiment zeigte, dass die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts unabhängig von seiner Richtung ist, und dass die Auswirkungen eines Äthers, gegen den sich die Erde bewegt, nicht feststellbar sind. Licht bewegt sich relativ zum Beobachter in jeder Richtung mit der Lichtgeschwindigkeit  $c$ , egal in welchem Bezugssystem sich der Beobachter befindet. Dies ist eine Aussage der speziellen Relativitätstheorie, in der Raum und Zeit untrennbar miteinander verknüpft sind.

Wie schon bemerkt ist der Begriff Moderne Physik relativ zur klassischen Physik zu sehen. Heute sind manche der Theorien der modernen Physik bereits wieder eingeschränkt. Geht es z.B. um Elementarteilchen, so wird in der zeitgenössischen Physik die Quantenfeldtheorie verwendet. Sie beruht auf dem Konzept der Feldquanten und deren Wechselwirkung.

### 1.3.2 Vorläufiger Aufbau der Vorlesung

Die Vorlesung behandelt die klassische Mechanik, die relativistische Mechanik und die Quantenmechanik.

#### Klassische Mechanik

Nach einer kurzen Erinnerung an die Newtonsche Mechanik, gehen wir über zu einer formaleren, analytischen Beschreibung der Mechanik, die den Lagrange-, Hamilton- und Hamilton-Jacobi-Formalismus einschließt. Sie erlaubt eine theoretische Diskussion der zu behandelnden Probleme, die sich die Symmetrien des Systems zunutze macht. Diese sind über das Noether-Theorem mit Erhaltungsgrößen verknüpft. Der Hamiltonformalismus, welcher gegenüber dem Lagrangemechanismus, für die praktische Lösung von Problemen keinen Vorteil bietet, bildet den Ausgangspunkt für die Untersuchung der Relationen zwischen der Mechanik und der Quantenmechanik. Es werden die Begriffe Hamiltonoperator und kanonisch konjugierte Variablen eingeführt.

#### Relativistische Mechanik

Das Prinzip, dass Raum und Zeit nicht voneinander trennbar sind, führt zur speziellen Relativitätstheorie. Während Phänomene bei geringen Geschwindigkeiten mit der klassischen Physik beschrieben werden können, kann erst die spezielle Relativitätstheorie die bei sehr hohen Geschwindigkeiten erklären.<sup>1</sup> Die Entwicklung der Theorie 1905 durch Albert Einstein beruhte auf Fortschritten im Gebiet des Elektromagnetismus Ende des 19. Jahrhunderts. Einsteins geniale Arbeit war ein gewaltiger Schritt nach vorne und hatte radikale Konsequenzen und so zunächst auch zahlreiche Gegner. Eine wichtige Konsequenz ist die Äquivalenz von Masse und Energie. Zum Inhalt: Es wird das Michelson-Morley Experiment vorgestellt. Es werden die Einstein'schen Postulate, Lorentztransformationen, der Minkowskiraum und die relativistische Formulierung der Elektrodynamik behandelt. Falls zeitlich möglich wird auch die Mechanik eines relativistischen Teilchens untersucht.

#### Quantenmechanik

Die Quantenmechanik erlaubt im Gegensatz zur klassischen Mechanik die Beschreibung und die Berechnung der physikalischen Eigenschaften von Materie im Größenbereich von Atomen und darunter. Sie bildet die Grundlage zur Beschreibung der Phänomene der Atomphysik, der Festkörperphysik, der Kern- und Elementarteilchenphysik. Nach ein wenig Historie, werden einfache eindimensionale Probleme behandelt, die mit Hilfe der Schrödingergleichung beschrieben werden können. Sie bildet die grundlegende Gleichung der nichtrelativistischen Quantenmechanik und wurde 1926 von Erwin Schrödinger als Wellengleichung aufgestellt. Es werden die Grundpostulate der Quantenmechanik vorgestellt. Symmetrien werden behandelt und hierbei insbesondere der Drehimpuls und der Spin. Das Wasserstoffatom wird berechnet. Die Behandlung von identischen Teilchen in der Quantenmechanik wird beleuchtet, welche letztlich auf die Unterscheidung von Bosonen und Fermionen führt.

---

<sup>1</sup>Die spezielle Relativitätstheorie stimmt bei niedrigen Geschwindigkeiten natürlich mit der klassischen Physik überein, so dass letztere letztlich als Spezialfall ersterer anzusehen ist.



# Kapitel 2

## Klassische Newtonsche Mechanik

In der klassischen Mechanik geht es um die Bewegung bzw. die Bewegungszustände von Körpern unter dem Einfluß von Kräften. Eine typische Problemstellung der Mechanik ist:

Gegeben seien für ein System von Massenpunkten  $1 \leq i \leq N$  deren Orte  $\vec{r}_i(t_0)$  und deren Geschwindigkeiten  $\vec{v}_i(t_0)$  zu einer bestimmten Anfangszeit  $t_0$ . Auf diese Massenpunkte wirken sowohl äußere Kräfte  $\vec{F}$  als auch Kräfte zwischen ihnen. Diese seien für die Wirkung zwischen Massenpunkt  $i$  und Massenpunkt  $j$  durch  $\vec{F}_{ij}$  bezeichnet. Wie lauten nun die *kinematischen Größen*  $\vec{r}_i(t)$  und  $\vec{v}_i(t) \equiv \dot{\vec{r}}_i(t)$ <sup>1</sup> für beliebige Zeiten danach? Zur Lösung des Problems werden Differentialgleichungen aufgestellt, und die kinematischen Größen Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung,  $\vec{r}_i(t)$ ,  $\dot{\vec{r}}_i(t)$  und  $\ddot{\vec{r}}_i(t)$ , ergeben sich als Lösung dieser *Bewegungsgleichungen*.

Neben den kinematischen Größen sind weitere wichtige Begriffe der Mechanik die *Kraft*  $\vec{F}$ , die *Masse*  $m$  eines Massenpunktes und sein Impuls  $\vec{p}$ . Der physikalische Begriff für die Kraft, welche eine vektorielle Größe ist, geht auf Isaac Newton zurück. Er definierte sie als Ursache für die Bewegung eines Körpers oder für die Änderung seines Bewegungszustandes. Ist ein Körper kräftefrei, so bleibt seine Bewegung unverändert.

### 2.1 Newtonsche Gesetze

Mit den 1687 in Newtons Werk *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* formulierten *Newtonschen Gesetzen* wurden die Grundlagen der klassischen Mechanik geschaffen. Diese Gesetze werden im Folgenden in Erinnerung gerufen.

#### Lex Prima (Galileisches Trägheitsgesetz)

Ein Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Translation, sofern er nicht durch einwirkende Kräfte zur Änderung seines Zustands gezwungen wird.

Dies definiert *Inertialsysteme*: In ihnen ruht ein kräftefreier Körper bzw. ein Massenpunkt oder bewegt sich geradlinig, gleichförmig.

Das heißt also, dass seine Geschwindigkeit  $\vec{v}$  in Betrag und Richtung konstant ist. Sein Bewegungszustand kann nur die Einwirkung einer äußeren Kraft verändert werden. Damit ergibt sich die Definition der (trägen) *Masse* zu: Jeder Massenpunkt setzt der Einwirkung von Kräften einen Trägheitswiderstand, seine Masse, entgegen. Der *Impuls* ist damit definiert

---

<sup>1</sup>Der Punkt über einer Größe bezeichnet deren zeitliche Ableitung, also z.B.  $\dot{\vec{r}}_i = d\vec{r}_i/dt$ .

als

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (2.1)$$

### Lex Secunda (Bewegungsgesetz)

Die Änderung der Bewegung eines Körpers ist proportional zu der auf ihn wirkenden Kraft und geschieht in die Richtung, in welche die Kraft weist.

Es gilt also

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}. \quad (2.2)$$

Da meist die Masse  $m$  unveränderlich ist, ergibt sich mit

$$\dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}\vec{v} \equiv \vec{a} \quad (2.3)$$

die Gleichung

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (2.4)$$

Der Körper wird also in die Richtung der Kraft beschleunigt, die auf ihn wirkt.

### Lex Tertia (actio=reactio)

Übt ein Körper  $A$  auf einen anderen Körper  $B$  eine Kraft aus (actio), so wirkt von Körper  $B$  auf Körper  $A$  eine gleich große aber entgegen gerichtete Kraft (reactio).

Das bedeutet, dass Kräfte immer paarweise auftreten.

## 2.2 Kräfte

Wichtige Beispiele für Kräfte sind

Gravitationskraft: Die Gravitationskraft wirkt zwischen zwei Massen, hier im folgenden  $M$  und  $m$  genannt, und bewirkt deren Anziehung. Sie nimmt mit zunehmendem Abstand der Massen ab, besitzt aber unendliche Reichweite. Die von  $M$  auf  $m$ , siehe Fig. 2.1, ist gegeben durch

$$\vec{F}_2 = -\gamma \frac{Mm}{r^2} \hat{r} \quad (2.5)$$

mit dem normierten Richtungsvektor

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}. \quad (2.6)$$

Es gilt  $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ . Speziell auf der Erde ergibt sich mit Masse  $m_e$  und Radius  $r_e$  der Erde sowie der bekannten Gravitationskonstante<sup>2</sup>  $\gamma$  dann

$$F = mg, \quad (2.7)$$

wobei  $g = 9.81 \text{ m/s}^2 \approx 10 \text{ m/s}^2$  die Erdbeschleunigung ist. Durch das Graviationsgesetz wird der Begriff der schweren Masse definiert,  $m = m_{\text{schwer}}$ ,  $M = M_{\text{schwer}}$ . Die schwere und die

<sup>2</sup>Der Wert der Gravitationskonstante beträgt  $\gamma = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 / (\text{kg s}^2)$ .

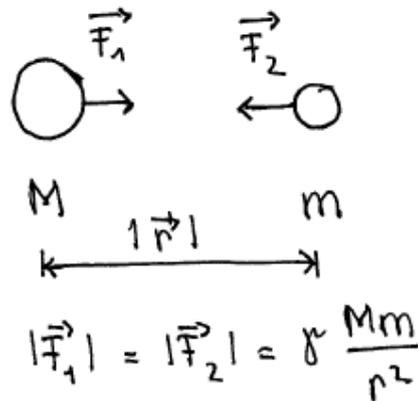


Abbildung 2.1: Die Gravitationskraft zwischen zwei Körpern.

träge Masse sind a priori unabhängig voneinander. Alle bisher durchgeführten Experimente bestätigen, dass die schwere Masse eines Körpers seiner trägen Masse entspricht. Dies ist das (schwache) Äquivalenzprinzip.

**Coulombkraft** Die Coulombkraft wirkt zwischen zwei Punktladungen oder kugelsymmetrisch verteilten elektrischen Ladungen,  $Q_1, Q_2$ . Je nach Vorzeichen der Ladungen wirkt sie anziehend (siehe Gravitationskraft) oder abstoßend in Richtung der Verbindungsgeraden der beiden Ladungen bzw. Ladungsmittelpunkte. Im Vakuum ist sie gegeben durch

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \hat{r}. \quad (2.8)$$

Bei  $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{As/(Vm)}$  handelt es sich um die elektrische Feldkonstante.

**Lorentzkraft** Die Lorentzkraft wirkt auf eine bewegte Ladung in einem magnetischen oder elektrischen Feld. Sie ist gegeben durch

$$\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (2.9)$$

Bei  $e$  handelt es sich um die elektrische Ladung,  $\vec{E}$  die elektrische Feldstärke und  $\vec{B}$  die magnetische Flussdichte. Die magnetische Komponente der Kraft wirkt senkrecht zur Bewegung der Ladung und senkrecht zur Richtung des magnetischen Feldes.

**Federkraft** Die dem harmonischen Oszillator zugrunde liegende Kraft ist linear (proportional zur zunehmenden Auslenkung) und stets negativ, also

$$F = \alpha|x| < 0. \quad (2.10)$$

Bei  $x$  handelt es sich um die Auslenkung der Feder aus der Ruhelage und  $\alpha$  bezeichnet die Federkonstante.

### 2.2.1 Konservative Kräfte

Konservative Kräfte verrichten längs eines geschlossenen Wegs keinerlei Arbeit. Die Energie bleibt erhalten. Beispiele für konservative Kräfte sind die Gravitationskraft, die Coulombkraft oder die Federkraft. Die von der Kraft längs des Weges von  $\vec{r}_1$  nach  $\vec{r}_2$  geleistete Arbeit

ist definiert als

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} F(\vec{r}') d\vec{r}' . \quad (2.11)$$

Somit ist also

$$dW = \vec{F} d\vec{r} . \quad (2.12)$$

Die kinetische Energie  $T$  eines Massenpunktes mit Masse  $m$  und Geschwindigkeit  $\vec{v}$  ist

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 . \quad (2.13)$$

Die zeitliche Änderung der kinetischen Energie ist

$$\frac{d}{dt} T = m \vec{v} \dot{\vec{v}} = \vec{v} \vec{F} . \quad (2.14)$$

Es gilt

$$dT = \vec{F} \vec{v} dt = \vec{F} d\vec{r} = dW . \quad (2.15)$$

Es wird also Arbeit in kinetische Energie umgewandelt. Betrachten wir den Spezialfall, dass sich die Kraft aus dem negativen Gradienten einer potentiellen Energie  $V(\vec{r})$  ergibt, also

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V . \quad (2.16)$$

Damit gilt<sup>3</sup>

$$\oint \vec{F} d\vec{r} = 0 . \quad (2.17)$$

Die Arbeit ist also vom Integrationsweg unabhängig. Mit der Definition der Gesamtenergie

$$E \equiv T + V \quad (2.18)$$

ergibt sich

$$\frac{d}{dt} E = \frac{d}{dt} T + \frac{d}{dt} V = \vec{v} \vec{F} + (\vec{\nabla} V) \dot{\vec{r}} = \vec{v} \vec{F} - \vec{F} \dot{\vec{r}} = 0 . \quad (2.19)$$

Die Energie ist also erhalten.

## 2.3 Inertialsysteme, Nicht-Inertialsysteme

Bei einem *Inertialsystem* handelt es sich um ein Bezugssystem, in dem sich kräftefreie Körper geradlinig und gleichförmig bewegen. Es gilt hier also das Newtonsche Trägheitsgesetz in seiner einfachsten Form. Es gibt unendlich viele Inertialsysteme. Sie bewegen sich gegeneinander geradlinig und gleichförmig. Ihre räumliche und zeitliche Koordinaten hängen über

---

<sup>3</sup>Denn  $\oint \vec{F} d\vec{r} = -\int_A^B \vec{\nabla} V d\vec{r} - \int_B^A \vec{\nabla} V d\vec{r} = -V(\vec{r}_B) + V(\vec{r}_A) - V(\vec{r}_A) + V(\vec{r}_B) = 0$ .

eine *Galilei-Transformation* miteinander zusammen.

*Galilei-Invarianz:* Die Gesetze der Newtonschen Mechanik sind *invariant* (von gleicher mathematischer Form) unter einer Galilei-Transformation

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{v}_0 t \quad \text{und} \quad t' = t, \quad (2.20)$$

wenn sich die Systeme  $\Sigma$  und  $\Sigma'$  mit konstanter Geschwindigkeit  $\vec{v}_0$  gegeneinander bewegen. Die zwei Systeme sind vollkommen gleichwertig. Da die Gesetze der Newtonschen Mechanik in allen Inertialsystemen die gleiche Form haben, gibt es kein bevorzugtes Bezugssystem und man kann daher die Geschwindigkeit nicht absolut messen. Dies ist das *Relativitätsprinzip* der Newtonschen Mechanik. Wir werden später im Rahmen der relativistischen Physik die Lorentz-Transformationen kennenlernen.

*Beschleunigte Bezugssysteme* sind Bezugssysteme, die kein Inertialsystem sind. Beispiele für solche Systeme sind rotierende Systeme. Es gibt in beschleunigten Bezugssystemen sogenannte Scheinkräfte. Die hängen vom Bezugssystem ab und verschwinden, wenn man in ein Inertialsystem übergeht. Beispiele sind die Coriolis-Kraft und die Zentrifugalkraft in rotierenden Systemen.

## 2.4 Weitere Themen

Weitere spezielle Themen im Rahmen der Newtonschen Mechanik sind z.B. Schwingungen, Untersuchungen des (gedämpften) harmonischen Oszillators; Eigenschwingungen in Systemen von Massenpunkten; Mechanik mehrerer Massenpunkte, starrer Körper, Bewegung von Schwerpunkt und Rotationsbewegung, Kreisel. Im Rahmen dieser Vorlesung werden diese und andere aufgrund Zeitmangels nicht behandelt.



# Kapitel 3

## Lagrangeformalismus

Joseph Louis Lagrange (siehe Fig. 3.1) hat, ausgehend vom Prinzip der kleinsten Wirkung, die klassische Newtonsche Mechanik in die Sprache der Variationsrechnung übersetzt. Es handelt sich um eine zu den Newtonschen Gesetzen äquivalente Formulierung der mechanischen Grundgesetze. Die Lagrangesche (und Hamiltonsche) Formulierung ermöglicht jedoch einen wesentlich tieferen Einblick in die dynamische und geometrische Struktur der Mechanik.

1788 eingeführt, ist der Lagrangeformalismus eine Formulierung der klassischen Mechanik, in der die Dynamik des Systems durch eine einzige skalare Funktion, die Lagrangefunktion, beschrieben wird. Mithilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen lassen sich daraus die Bewegungsgleichungen bestimmen. Der Vorteil dieses Formalismus gegenüber der Newtonschen Mechanik ist, daß sich damit Probleme mit Zwangsbedingungen relativ einfach behandeln lassen – durch das explizite Ausrechnen der Zwangskräfte oder durch die geeignete Wahl generalisierter Koordinaten. Ein Beispiel für eine Zwangsbedingung ist die Bewegung von Körpern, die durch feste Verbindungsstangen zwischen diesen eingeschränkt ist.

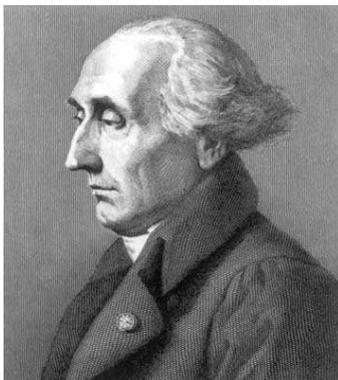


Abbildung 3.1: Joseph-Louis-Lagrange (\* 25. Januar 1736 in Turin als Giuseppe Lodovico Lagrangia; † 10. April 1813 in Paris) war ein italienischer Mathematiker und Astronom. [Quelle:Wikipedia].

### 3.1 Lagrangegleichungen 1. Art

Wir betrachten Systeme, die aus  $N$  Massenpunkten mit Massen  $m_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) bestehen. Falls sich diese in allen 3 Raumdimensionen frei von Einschränkungen bewegen können, so hat das System  $3N$  Freiheitsgrade. Im folgenden betrachten wir Systeme, die Zwangsbedingungen unterworfen sind. Diese können beispielsweise dadurch gegeben sein, dass die Abstände der Massenpunkte konstant sind. Dies ist in einem starren Körper der Fall. Oder aber die Bewegung der Massenpunkte ist auf eine Fläche im Raum eingeschränkt z.B. durch Gleiten auf einem horizontalen Tisch. Ein anderes Beispiel ist das mathematische Pendel.

*Holonome Zwangsbedingungen:* Wir betrachten ein System von  $N$  Teilchen, deren Koordinaten durch  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$  gegeben sind. Falls sich für das System von  $N$  Teilchen die  $N_Z$  Zwangsbedingungen in der Form

$$A_\mu(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0 \quad , \quad \mu = 1, \dots, N_Z \quad (3.1)$$

schreiben lassen, so heißen diese *holonome Zwangsbedingungen*. Alle Zwangsbedingungen, die nicht von der Form (3.1) sind, heißen *nichtholonome* (Zwangsbedingungen in Form von Ungleichungen oder differentielle, nicht-integrierte Zwangsbedingungen).

Ein Beispiel für nichtholonome Zwangsbedingungen sind in einer Kugel vom Radius  $R$  eingeschlossene Gasmoleküle. Ihre Koordinaten unterliegen der Bedingung  $r_i \leq R$ .

Die Zwangsbedingungen lassen sich weiter bzgl. ihrer Zeitabhängigkeit unterscheiden.

Sie heißen *skleronom*, falls keine explizite Zeitabhängigkeit besteht, ansonsten *rheonom*.

Ein Beispiel für eine holonome und rheonome Zwangsbedingung ist gegeben, wenn sich ein Massenpunkt auf einer bewegten Raumkurve bewegt.

Die Anzahl der Freiheitsgrade  $f$  ist, falls die  $N_Z$  Gleichungen  $A_\mu = 0$  unabhängig sind, gegeben durch

$$f = 3N - N_Z \quad (3.2)$$

Im folgenden betrachten wir einige Beispiele:

- ▷ Alle Massenpunkte  $m_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) können sich nur in einer Ebene bewegen. Die Zwangsbedingung lautet dann ( $\vec{p}$  Stützvektor der Ebene,  $\vec{h}$  Normalenvektor der Ebene)

$$\vec{h} \cdot (\vec{r}_i - \vec{p}) = 0 \quad \iff \quad \vec{h} \cdot \vec{r}_i - k = 0 \quad \text{mit} \quad \vec{h}, \vec{p}, k (\equiv \vec{h} \cdot \vec{p}) = \text{const.} \quad (3.3)$$

Damit ist  $N_Z = N$  und  $f = 2N$ . Bei (3.3) handelt es sich um eine holonome skleronome Zwangsbedingung.

- ▷ Falls sich die Ebene zusätzlich mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegt, so ist die Zwangsbedingung durch

$$\vec{h} \cdot (\vec{r}_i - \vec{v}t) - k = 0 \quad (3.4)$$

gegeben. Hier ist ebenfalls  $N_Z = N$  und  $f = 2N$ . Durch (3.4) ist eine holonome rheonome Zwangsbedingung gegeben.

▷ Für paarweise konstante Abstände der  $m_i$  ( $i, j = 1, \dots, N$ ) haben wir

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = r_{ij} = \text{const.} . \quad (3.5)$$

Die Freiheitsgrade, die dann noch übrig bleiben, sind durch die Bewegungsmöglichkeiten des starren Körpers gegeben. Diese sind die Translation des Schwerpunktes und die Rotation des Systems als Ganzes um drei orthogonale Achsen. Die Anzahl der Freiheitsgrade ist also  $f = 6$ . Für 2 Massenpunkte,  $N = 2$ , ist  $f = 5$ . Gleichung (3.5) beschreibt eine holonome skleronome Zwangsbedingung.

Durch *Zwangskräfte*  $\vec{Z}_i$  kann der Einfluß der Zwangsbedingungen auf die Bewegung der Massenpunkte beschrieben werden. Solche Zwangskräfte sind z.B. Auflagekräfte, Lagerkräfte, Fadenspannungen usw. Diese Zwangskräfte wirken zusätzlich zu den eigentlichen Kräften  $\vec{F}_i$  auf die Massenpunkte. Die Newton'schen Bewegungsgleichungen lauten also

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{Z}_i \quad , \quad i = 1, \dots, N . \quad (3.6)$$

Die Zwangskräfte hängen im allgemeinen selbst von der Bewegung ab und sind Funktionen von  $\vec{r}_i$  und  $\dot{\vec{r}}_i$ .

Im folgenden sehen wir, wie wir die Zwangsbedingungen in die Bewegungsgleichungen integrieren können. Betrachten wir den einfachen Fall der Bewegung eines einzigen Massenpunktes  $m$  unter der Zwangsbedingung

$$A(\vec{r}, t) = 0 . \quad (3.7)$$

Die Bewegung findet auf der durch  $A = 0$  definierten Fläche statt. Diese kann auch zeitabhängig sein. Die Zwangsbedingung schränkt seine Bewegung innerhalb der Fläche nicht ein, noch beeinflusst sie sie. Damit hat die Zwangskraft keine Komponente tangential zur Fläche und muss vielmehr senkrecht auf der Fläche stehen, d.h.

$$\vec{Z}(\vec{r}, t) = \lambda(t) \cdot \vec{\nabla} A(\vec{r}, t) . \quad (3.8)$$

Der Gradient  $\vec{\nabla} A$  zeigt in Richtung der Normalen der Fläche. Der Proportionalitätsfaktor  $\lambda(t)$  muss noch bestimmt werden. Er hängt wegen der Zeitabhängigkeit von  $A(\vec{r}, t)$  und der Abhängigkeit von der tatsächlichen Bewegung von der Zeit ab.

*Bemerkung:* Daß der Gradient  $\vec{\nabla} A$  senkrecht auf der durch  $A = 0$  definierten Fläche steht, sieht man folgendermaßen: Seien  $\vec{r}$  und  $\vec{r} + d\vec{r}$  zwei infinitesimal benachbarte Punkte auf dieser Fläche, also

$$A(\vec{r}, t) = 0 \quad , \quad A(\vec{r} + d\vec{r}, t) = 0 . \quad (3.9)$$

Die Entwicklung der zweiten Gleichung um  $\vec{r}$  liefert

$$A(\vec{r} + d\vec{r}, t) = A(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} A \cdot d\vec{r} + \mathcal{O}((d\vec{r})^2) = 0 . \quad (3.10)$$

Hieraus folgt, daß  $\vec{\nabla} A \cdot d\vec{r} = 0$ . Da  $d\vec{r}$  ein beliebiger infinitesimaler Vektor parallel zur Tangentialfläche im Punkt  $\vec{r}$  ist, steht also  $\vec{\nabla} A$  senkrecht auf der Fläche.

Die Bewegung des Massenpunktes wird also durch folgendes Gleichungssystem beschrieben,

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda \cdot \vec{\nabla} A(\vec{r}, t) \quad (3.11)$$

$$A(\vec{r}, t) = 0 . \quad (3.12)$$

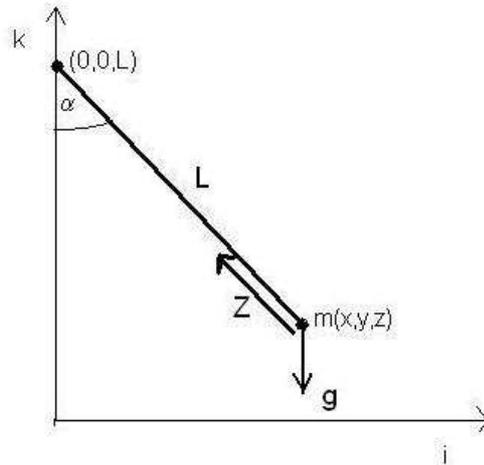


Abbildung 3.2: Das ebene Pendel. Auf die Masse  $m$  wirkt die Schwerkraft  $\vec{F}$  und die durch den Faden ausgeübte unbekannte Zwangskraft  $\vec{Z}$ .

*Ebenes Pendel:* Betrachten wir als Beispiel das ebene Pendel, siehe Fig. 3.2. Hier kann man sich nochmals klarmachen, daß die Zwangskraft von der tatsächlichen Bewegung abhängt. Denn sie muß zum einen die Komponente der Schwerkraft in Fadenrichtung kompensieren. Die Zwangsbedingung legt die Richtung der Zwangskraft fest. Das Pendel bewege sich in der  $x$ - $z$ -Ebene (im Bild  $i$ - $k$ -Ebene). Somit haben wir

$$A(\vec{r}, t) = x^2 + (L - z)^2 - L^2 = 0 \quad (3.13)$$

$$\vec{\nabla} A = 2 \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ (z - L) \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Und die Bewegungsgleichungen mit Zwangsbedingung lauten also

$$m\ddot{x} = 2\lambda x \quad (3.15)$$

$$m\ddot{z} = -mg + 2\lambda(z - L) \quad (3.16)$$

$$x^2 + z^2 - 2Lz = 0. \quad (3.17)$$

*Allgemeiner Fall:* Betrachten wir den allgemeinen Fall mehrerer (d.h.  $N$ ) Teilchen und mehrerer (d.h.  $N_Z$ ) Zwangsbedingungen. Die  $3N$  Bewegungsgleichungen und  $N_Z$  Zwangsbedingungen ergeben die *Lagrangegleichungen 1. Art*

Lagrangegleichungen 1. Art

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_{\mu=1}^{N_Z} \lambda_{\mu}(t) \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} A_{\mu}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) \quad i = 1, \dots, N \quad (3.18)$$

$$A_{\mu}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0 \quad \mu = 1, \dots, N_Z. \quad (3.19)$$

Bemerkung: Hier bedeutet  $\partial/\partial \vec{r}_i \equiv \vec{\nabla}_i = (\partial/\partial x_i, \partial/\partial y_i, \partial/\partial z_i)^T$ , also der Gradient, der auf das Teilchen  $i$  wirkt.

Damit wenigstens ein Freiheitsgrad vorhanden ist, ist die Zahl der Zwangsbedingungen begrenzt auf  $N_Z \leq 3N - 1$ .

## 3.2 Lagrangegleichungen 2. Art

Die bisher eingeführten Zwangskräfte sind lediglich Hilfsgrößen und im allgemeinen nicht von physikalischer Bedeutung. Es ist daher geschickt, sie von Anfang an zu vermeiden. Tut man dies, indem man sie als ersten Schritt zur Lösung der Lagrangegleichungen 1. Art eliminiert, so führt dies möglicherweise auf komplizierte Formulierungen. Ein besseres Verfahren ist, von vornherein die Koordinaten so zu wählen, dass sie den durch die holonomen Zwangsbedingungen definierten Unterraum parametrisieren. Solche Koordinaten werden *verallgemeinerte Koordinaten* genannt. Beim ebenen Pendel verwendet man statt der kartesischen Koordinaten, welche die Zwangsbedingung  $x^2 + y^2 = L^2$  explizit berücksichtigen müssen, Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$ . Konstanz der Pendellänge bedeutet eine konstante Koordinate  $r$ . Und die Bewegung des Pendels wird mit der Winkelkoordinate vollständig beschrieben. Im folgenden soll das Vorgehen zur Verwendung verallgemeinerter Koordinaten eingeführt werden.

### 3.2.1 Verallgemeinerte Koordinaten

Wir betrachten ein System von  $N$  Massenpunkten, die durch  $3N$  Koordinaten  $\vec{r}_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) beschrieben werden. Bei  $N_Z$  Zwangsbedingungen sind nur  $f = 3N - N_Z$  Koordinaten voneinander unabhängig. ( $f$  ist die Anzahl der verbleibenden Freiheitsgrade.) Jede beliebige Wahl dieser  $f$  unabhängigen Koordinaten wird als *generalisierte* oder *verallgemeinerte Koordinaten* bezeichnet,

$$q = \{q_1, \dots, q_f\}, \quad f = 3N - N_Z. \quad (3.20)$$

Diese Wahl ist nicht eindeutig. Die Wahl wird aber durch Symmetrie-Gesichtspunkte und Anstreben größtmöglicher Einfachheit nahegelegt.<sup>1</sup> Die Orte der Teilchen sind durch die Wahl der  $q_k$  ( $k = 1, \dots, f$ ) festgelegt,

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_f, t). \quad (3.21)$$

Die verallgemeinerten Koordinaten enthalten die Zwangsbedingungen implizit. Diese sind für beliebige  $q_k$  ( $k = 1, \dots, f$ ) also automatisch erfüllt. D.h.

$$A_\mu(\vec{r}_1(q_1, \dots, q_f, t), \dots, \vec{r}_N(q_1, \dots, q_f, t)) = 0, \quad \mu = 1, \dots, N_Z. \quad (3.22)$$

*Beispiel:* Betrachten wir das ebene Pendel mit variabler Fadenlänge  $L(t)$ . Der einzige Freiheitsgrad ist der Winkel  $\varphi(t)$ . Die kartesischen Koordinaten ausgedrückt durch die verallgemeinerte Koordinate  $\varphi(t)$  erfüllen die Zwangsbedingung automatisch, denn

$$x(t) = L(t) \sin \varphi(t) \quad (3.23)$$

$$y(t) = 0 \quad (3.24)$$

$$z(t) = -L(t) \cos \varphi(t) \quad (3.25)$$

---

<sup>1</sup>Auch wenn keine Zwangsbedingungen vorliegen, ist die Benutzung generalisierter Koordinaten nützlich. Etwa beim Zentralkraftproblem, dessen Beschreibung durch  $(r, \theta, \varphi)$  einfacher ist also durch  $(x, y, z)$ .

und

$$x^2 + z^2 = L(t)^2 . \quad (3.26)$$

*Bemerkung:* Auch Impulse und Energien etc. können als generalisierte Koordinaten verwendet werden.

### 3.2.2 Die Lagrangefunktion

Im folgenden soll die Lagrangefunktion hergeleitet werden. Dazu multiplizieren wir die Bewegungsgleichung (3.18) für  $m_i$  mit  $\partial \vec{r}_i / \partial q_\alpha$  und summieren über  $i$ ,<sup>2</sup>

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i - \sum_{\mu=1}^{N_Z} \lambda_\mu(t) \frac{\partial A_\mu}{\partial \vec{r}_i} = 0 \quad \left| \cdot \sum_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right. \quad \alpha = 1, \dots, f . \quad (3.27)$$

Aus  $A_\mu(\{q_\alpha\}, t) \equiv 0$  folgt, daß

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial q_\alpha} = 0 . \quad (3.28)$$

Nun hängt aber  $A_\mu$  über die kartesischen Koordinaten  $\vec{r}_i(\{q_\alpha\}, t)$  von  $q_\alpha$  ab. Damit ist also

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial q_\alpha} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial A_\mu}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} . \quad (3.29)$$

Und somit ist mit Glg. (3.28) auch

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial A_\mu}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = 0 . \quad (3.30)$$

Damit fallen aus Glg. (3.27) die Zwangskräfte heraus,

$$\sum_{i=1}^N \left( m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} - \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) = 0 , \quad \alpha = 1, \dots, f . \quad (3.31)$$

Zur weiteren Umformung dieser  $f$  Gleichungen betrachten wir die totale Zeitableitung von  $\vec{r}_i$ ,

$$\dot{\vec{r}}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_{\beta} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta} \dot{q}_\beta = \dot{\vec{r}}_i(\{q_\beta\}, t) . \quad (3.32)$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} . \quad (3.33)$$

Dies verwenden wir im 1. Term der Bewegungsgleichungen (3.31),

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right\} - \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \quad (3.34)$$

$$= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} T \right\} - \frac{\partial}{\partial q_\alpha} T , \quad (3.35)$$

<sup>2</sup>Die Anführungszeichen in Glg. (3.27) sollen ausdrücken, dass erst multipliziert und dann summiert wird.

wobei

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \quad (3.36)$$

die kinetische Energie bezeichnet. In Glg. (3.34) wurde verwendet, daß

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right\} = \frac{d}{dt} \left\{ \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} \right\} = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} + \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_\alpha}, \quad (3.37)$$

da

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_\alpha}. \quad (3.38)$$

Mit der potentiellen Energie  $V$  des Systems, ausgedrückt durch die verallgemeinerten Koordinaten  $q \equiv \{q_\alpha\}$ ,

$$V(q, t) = V(\vec{r}_1(q, t), \dots, \vec{r}_N(q, t)), \quad (3.39)$$

erhalten wir für die Kraftterme

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = \sum_i \left( -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}(q, t). \quad (3.40)$$

Wir definieren als *verallgemeinerte Kräfte*  $Q_\alpha$

$$Q_\alpha = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, f. \quad (3.41)$$

Unter Verwendung von Gln. (3.31), (3.34), (3.35) und (3.40) lassen sich somit die Bewegungsgleichungen kompakt schreiben als

Lagrangegleichungen 2. Art

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \quad \text{mit } \alpha = 1, \dots, f \quad \text{und} \quad (3.42)$$

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - V(q, t) \quad (3.43)$$

Hierbei bezeichnet  $L$  die Lagrangefunktion, die von den verallgemeinerten Koordinaten  $q$  und den Geschwindigkeiten  $\dot{q}$  sowie der Zeit  $t$  abhängt. Bei den Gleichungen (3.42) handelt es sich um die *Lagrangegleichungen 2. Art*. Sie sind die Bewegungsgleichungen eines Systems von Massenpunkten und der wichtigste Ausgangspunkt zur Lösung von Problemen in der Mechanik. Die Lagrangefunktion charakterisiert ein System eindeutig.

Bemerkungen:

- In den Lagrangegleichungen 2. Art sind die Zwangsbedingungen eliminiert. Sie treten nicht mehr auf.

- Durch die Gleichungen (3.42) ist ein System von  $\alpha$  Differentialgleichungen 2. Ordnung gegeben. Zu dessen Lösung werden  $2\alpha$  Anfangsbedingungen benötigt.
- Die zentralen Begriffe sind hier Energie und Arbeit im Vergleich zu den zentralen Begriffen Impuls und Kraft der Newtonschen Mechanik.
- Die Lagrangegleichungen sind invariant unter Punkttransformationen:

$$(q_1, \dots, q_\alpha) \xleftrightarrow{\text{diffbar}} (\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_\alpha) \quad (3.44)$$

mit

$$\bar{q}_1 = \bar{q}_1(q_1, \dots, q_\alpha, t) \quad , \quad \dots \quad , \quad \bar{q}_\alpha = \bar{q}_\alpha(q_1, \dots, q_\alpha, t) . \quad (3.45)$$

Damit hat man bei der Wahl der generalisierten Koordinaten gewisse Freiheiten. Dies kann zur Vereinfachung der Lösung des Problems genutzt werden, indem man beispielsweise Symmetrien ausnutzt.

Um die Bewegungsgleichungen eines Systems mit Zwangsbedingungen aufzustellen, geht man also wie folgt vor:

- 1) Wahl einer geeigneten Parametrisierung des  $f$ -dimensionalen Unterraums des  $3N$ -dimensionalen Konfigurationsraums:  $q = \{q_1, \dots, q_f\}$ .
- 2) Bestimmung von  $T$  und  $V$ . Bestimmung von  $L$ .
- 3) Aufstellen der Lagrangegleichungen.

### 3.3 Erhaltungsgrößen

Erhaltungssätze bestimmen das qualitative Verhalten eines Systems und sind für die Lösung der Bewegungsgleichungen von großem Nutzen. Im Lagrangeformalismus sind Erhaltungsgrößen dadurch gegeben, daß die Lagrangefunktion  $L(q, \dot{q}, t)$  von einem oder mehrerer ihrer Argumente nicht abhängt.

#### 3.3.1 Energieerhaltung (“Homogenität der Zeit”)

Die Lagrangefunktion soll nicht explizit von der Zeit abhängen,

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 . \quad (3.46)$$

Die totale Ableitung der Lagrangefunktion nach der Zeit ist damit unter Verwendung der Lagrangegleichungen 2. Art

$$\frac{d}{dt}L = \sum_{\alpha=1}^f \left\{ \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}}_{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \ddot{q}_\alpha \right\} = \sum_{\alpha} \left\{ \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \ddot{q}_\alpha \right\} = \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha \right\} \quad (3.47)$$

Daraus ergibt sich der Erhaltungssatz

$$\frac{d}{dt}H = 0, \quad (3.48)$$

wobei die Erhaltungsgröße  $H$  definiert ist als

$$H = \left( \sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} \right) - L. \quad (3.49)$$

Bei  $H$  handelt es sich um die *Hamiltonfunktion*.

Hängen die Zwangsbedingungen nicht explizit von der Zeit ab, so ist die kinetische Energie quadratisch in den  $\dot{q}_{\alpha}$ ,

$$T = \sum_{\alpha', \beta} m_{\alpha' \beta} \dot{q}_{\alpha'} \dot{q}_{\beta}, \quad (3.50)$$

wobei es sich bei den Koeffizienten  $m_{\alpha' \beta}$  um den verallgemeinerten Massentensor handelt. Hängt ferner  $V$  nicht von den Geschwindigkeiten  $\dot{q}_{\alpha}$  ab, so ist

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} = \sum_{\alpha', \beta} 2m_{\alpha' \beta} \dot{q}_{\alpha'} \dot{q}_{\beta} = 2T \quad (3.51)$$

und damit

$$H = 2T - L = T + V = E. \quad (3.52)$$

Damit ist die Hamiltonfunktion gleich der Energie des Systems.

### 3.3.2 Zyklische Koordinaten

Falls  $L$  unabhängig von einer verallgemeinerten Koordinate  $q_{\beta}$  ist, d.h.

$$\frac{\partial L}{\partial q_{\beta}} = 0, \quad (3.53)$$

dann nennt man  $q_{\beta}$  eine *zyklische Koordinate*. Aus den Bewegungsgleichungen folgt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\beta}} = \frac{\partial L}{\partial q_{\beta}} = 0. \quad (3.54)$$

Damit ist

$$p_{\beta} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\beta}} = \text{zeitlich konstant}. \quad (3.55)$$

Bei  $p_{\beta}$  handelt es sich um den *verallgemeinerten Impuls*. Zyklische Koordinaten führen automatisch zu einem *Erhaltungssatz*. Um Problemstellungen zu erleichtern sollten also möglichst viele generalisierte Koordinaten zyklisch sein. Zeitlich konstante Koordinaten nennt man auch Konstanten der Bewegung.

Beispiele:

1) Freies Teilchen: Die Lagrangefunktion lautet

$$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 \quad (3.56)$$

und ist unabhängig von  $\vec{r}$ . Damit ist der zugehörige verallgemeinerte Impuls

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} = \text{const.} . \quad (3.57)$$

Es liegt Impulserhaltung vor. Dies entspricht der Translationsinvarianz des Systems.

2) Massenpunkt auf einem Kreis in der  $x$ - $y$ -Ebene. Die geeignete verallgemeinerte Koordinate ist gegeben durch  $q = \varphi$ , wobei  $\varphi$  der Winkel ist. Damit lautet die Lagrangefunktion

$$L = \frac{m}{2} r^2 \dot{\varphi}^2 , \quad \text{wobei } r \text{ der Radius des Kreises ist.} \quad (3.58)$$

Sie hängt nicht von der verallgemeinerten Koordinate  $q = \varphi$  ab. Der zugehörige verallgemeinerte Impuls ist

$$J_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} = \text{const.} . \quad (3.59)$$

Es liegt Drehimpulserhaltung vor. Damit verbunden ist die Isotropie des Raums.

### 3.4 Beispiel: Schwingende Hantel

Wir betrachten eine Hantel, die aus zwei Massenpunkten  $m_1$  und  $m_2$  besteht, die durch eine Stange der Länge  $l$  verbunden sind. Die Hantel schwingt in der  $x$ - $y$ -Ebene unter Einfluss des Schwerfeldes, das in  $y$ -Richtung wirkt. Die Aufhängung der Hantel im Massenpunkt  $m_1$  sei in  $x$ -Richtung frei beweglich, siehe Abb. 3.3. Wir haben 6 Freiheitsgrade für die zwei

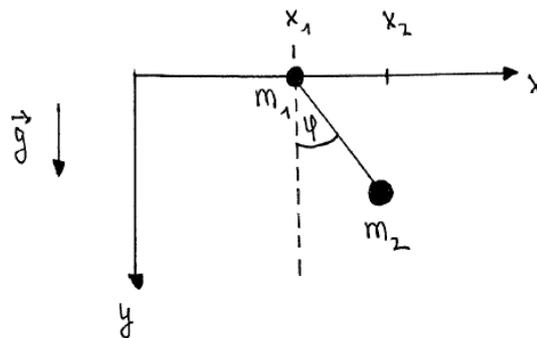


Abbildung 3.3: Bewegung einer Hantel im Schwerfeld mit Erdbeschleunigung  $\vec{g}$ .

Massenpunkte, die sich a priori in alle drei Raumrichtungen bewegen können. Sie unterliegen aber 4 holonomen skleronomen Zwangsbedingungen. Diese sind durch

$$z_1 = z_2 = 0 , \quad y_1 = 0 , \quad (x_1 - x_2)^2 + y_2^2 - l^2 = 0 \quad (3.60)$$

gegeben. Wir haben damit  $\alpha = 6 - 4 = 2$  Freiheitsgrade. Als generalisierte Koordinaten bieten sich an

$$q_1 = x_1 \quad \text{und} \quad q_2 = \varphi . \quad (3.61)$$

Mit

$$x_1 = q_1 \quad (3.62)$$

$$x_2 = q_1 + l \sin q_2 \quad (3.63)$$

$$y_1 = z_1 = z_2 = 0 \quad (3.64)$$

$$y_2 = l \cos q_2 \quad (3.65)$$

sowie

$$\dot{x}_1 = \dot{q}_1 \quad (3.66)$$

$$\dot{x}_2 = \dot{q}_1 + l\dot{q}_2 \cos q_2 \quad (3.67)$$

$$\dot{y}_2 = -l\dot{q}_2 \sin q_2 \quad (3.68)$$

haben wir für die kinetische Energie  $T$

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \quad (3.69)$$

$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(l^2\dot{q}_2^2 + 2l\dot{q}_1\dot{q}_2 \cos q_2) . \quad (3.70)$$

Die potentielle Energie ergibt sich zu

$$V = 0 - m_2gl \cos q_2 . \quad (3.71)$$

Die Lagrangefunktion lautet damit

$$L = T - V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(l^2\dot{q}_2^2 + 2l\dot{q}_1\dot{q}_2 \cos q_2) + m_2gl \cos q_2 . \quad (3.72)$$

Die Lagrangefunktion hängt nicht von  $q_1$  (nur von  $\dot{q}_1$ ) ab! Bei  $q_1$  handelt es sich um eine zyklische Koordinate. Der zugehörige verallgemeinerte Impuls lautet

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = (m_1 + m_2)\dot{q}_1 + m_2l\dot{q}_2 \cos q_2 = \text{const.} \equiv c' . \quad (3.73)$$

Für  $\dot{q}_1$  finden wir damit ( $c = c'/(m_1 + m_2)$ )

$$\dot{q}_1 = c - \frac{m_2l}{m_1 + m_2}\dot{q}_2 \cos q_2 . \quad (3.74)$$

Und somit ( $a \equiv \text{const.}$ )

$$q_1(t) = ct - \frac{m_2l}{m_1 + m_2} \sin q_2(t) + a . \quad (3.75)$$

Mit den Anfangsbedingungen

$$q_1(t=0) = 0 \quad \text{und} \quad q_2(t=0) = 0 \quad (3.76)$$

sowie

$$\dot{q}_1(t=0) = -\frac{m_2l}{m_1 + m_2}\omega_0 \quad \text{und} \quad \dot{q}_2(t=0) = \omega_0 \quad (3.77)$$

finden wir

$$a = c = 0 \quad (3.78)$$

und somit also

$$q_1(t) = -\frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \sin q_2(t) . \quad (3.79)$$

Und per Rücktransformation

$$x_1(t) = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l \sin \varphi(t) , \quad y_1(t) = z_1(t) = 0 , \quad (3.80)$$

$$x_2(t) = \frac{m_1}{m_1 + m_2} l \sin \varphi(t) , \quad y_2(t) = l \cos \varphi(t) , \quad z_2(t) = 0 . \quad (3.81)$$

Die Bahnkurve von  $m_2$  ist eine Ellipse:

$$\frac{x_2^2}{\left(\frac{m_1 l}{m_1 + m_2}\right)^2} + \frac{y_2^2}{l^2} = 1 . \quad (3.82)$$

Der genaue zeitliche Verlauf ergibt sich aus der Lösung von  $\varphi(t)$  bzw.  $q_2(t)$ . Mit

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m_2(l^2 \dot{q}_2 + l \dot{q}_1 \cos q_2) \quad (3.83)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m_2(l^2 \ddot{q}_2 + l \ddot{q}_1 \cos q_2 - l \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin q_2) \quad (3.84)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = m_2(-l \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin q_2 - gl \sin q_2) . \quad (3.85)$$

ergibt sich aus den Lagrangegleichungen 2. Art

$$l^2 \ddot{q}_2 + l \ddot{q}_1 \cos q_2 + gl \sin q_2 = 0 . \quad (3.86)$$

Mit

$$\ddot{q}_1 = -\frac{m_2 l}{m_1 + m_2} (\ddot{q}_2 \cos q_2 - \dot{q}_2^2 \sin q_2) \quad (3.87)$$

ergibt sich dann

$$l^2 \ddot{q}_2 + l \cos q_2 \left( -\frac{m_2 l}{m_1 + m_2} (\ddot{q}_2 \cos q_2 - \dot{q}_2^2 \sin q_2) \right) + gl \sin q_2 = 0 . \quad (3.88)$$

Dies ist eine komplizierte Differentialgleichung. Sie ist für kleine  $\varphi$  lösbar:

$$\varphi(t) = \frac{\omega_0}{\omega} \sin \omega t , \quad (3.89)$$

mit

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l} \frac{m_1 + m_2}{m_1}} . \quad (3.90)$$

# Kapitel 4

## Variationsprinzipien in der Mechanik

Die Variationsrechnung beschäftigt sich mit der Lösung von Problemen, bei denen der Extremwert (Minimum oder Maximum) einer Größe gefunden werden soll, die als Integral über einen Funktionalausdruck darzustellen ist.

Die Vorteile der Verwendung von Variationsprinzipien sind mehr grundsätzlicher Natur. So lassen sich damit tiefe Grundstrukturen der Mechanik verstehen und für die Praxis nutzbar machen. Ein Beispiel, das später diskutiert wird, ist der Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungssätzen.

Funktional: Bei der Variationsrechnung betrachtet man Funktionale. Während eine Funktion  $y = y(x)$  jedem  $x$ -Wert eine Zahl (den  $y$ -Wert) zuordnet, wird bei einem Funktional jeder Funktion eine Zahl (der Wert des Funktionals) zugeordnet. Funktionale sind also Funktionen von Funktionen.

Beispiel: Es ist

$$J = J[y] = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + y'(x)^2} \quad (4.1)$$

das Funktional, das die Wegstrecke entlang der Kurve  $y = y(x)$  zwischen den beiden Punkten  $(x_1, y(x_1))$  und  $(x_2, y(x_2))$  angibt. Es wird also durch das Funktional jeder Verbindungskurve  $y(x)$  zwischen den beiden Punkten eine Zahl, die Weglänge, zugeordnet.

Bemerkung: Oben wurde das Wegelement  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$  geschrieben als:

$$ds = \sqrt{1 + dy^2/dx^2} dx = \sqrt{1 + y'^2} dx, \quad \text{mit } y' \equiv dy/dx. \quad (4.2)$$

Beispiel: Gesucht ist die Brachystochrone, die schnellste Verbindung zweier Punkte durch eine Bahn, auf der ein Massenpunkt unter dem Einfluß der Gravitationskraft reibungsfrei gleitet, Fig. 4.1. Aus der Energieerhaltung folgt  $mv^2/2 = mg(y_1 - y)$ . Damit haben wir

$$J[y] = T = \int_1^2 \frac{ds}{v} = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2g(y_1 - y(x))}}. \quad (4.3)$$

### 4.1 Die Euler-Lagrange-Gleichung

Problemstellung: Gesucht ist die Funktion  $y(x)$ , deren Randwerte

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2 \quad (4.4)$$



Abbildung 4.1: Brachystochrone

als gegeben vorausgesetzt werden, welche das Funktional

$$J = J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(y, y', x) \quad (4.5)$$

minimiert.

Sei  $y_0(x)$  die gesuchte Funktion. Für jede infinitesimal davon abweichende Funktion  $y(x) = y_0(x) + \delta y(x) = y_0(x) + \epsilon \eta(x)$ , mit  $\epsilon$  infinitesimal,  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$  muss dann gelten

$$J[y_0 + \epsilon \eta(x)] > J[y_0] \quad , \quad \forall \eta(x) . \quad (4.6)$$

Daraus folgt

$$\frac{d}{d\epsilon} J[y_0 + \epsilon \eta(x)]|_{\epsilon=0} = 0 , \quad (4.7)$$

ganz analog zur Bedingung des Extremums einer Funktion  $f(x)$  in  $x = x_0$ :  $f'(x) = 0$  bei  $x = x_0$ . Aus der Bedingung  $dJ/d\epsilon$  ergibt sich eine Differentialgleichung (DGL) für  $\eta(x)$ :

$$\frac{d}{d\epsilon} J[y_0(x) + \epsilon \eta(x)]|_{\epsilon=0} \stackrel{(4.5)}{=} \int_{x_1}^{x_2} dx \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) \right] \stackrel{!}{=} 0 . \quad (4.8)$$

Daraus ergibt sich nach partieller Integration des 2. Terms<sup>1</sup>

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) = \underbrace{\left[ \frac{\partial F}{\partial y'} \eta(x) \right]_{x_1}^{x_2}}_{=0} - \int_{x_1}^{x_2} dx \eta(x) \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \quad (4.9)$$

schließlich

$$\frac{d}{d\epsilon} J[y_0(x) + \epsilon \eta(x)]|_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \eta(x) \stackrel{!}{=} 0 . \quad (4.10)$$

Da das Integral für beliebiges  $\eta(x)$  verschwinden soll, muss der Ausdruck in der Klammer null sein. Damit finden wir die Euler-Lagrange-Gleichung

Euler-Lagrange-Gleichung:  $\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y'} \right) = \frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y} \quad (4.11)$

<sup>1</sup>Zu Erinnerung:  $\int f'g = fg - \int fg'$ .

Dies ist eine DGL zweiter Ordnung für die gesuchte Funktion  $y(x)$ . Die Lösungen  $y(x)$  dieser DGL sind *stationäre* Punkte von  $J[y]$ . Im Fall mehrerer Lösungen muss die zum Minimum gehörige Lösung gefunden werden.

Man nennt  $\delta y(x) = \epsilon \eta(x)$  Variation von  $y(x)$ . Das Funktional  $J$  ist für das gesuchte  $y(x)$  stationär, d.h. die Variation  $\delta J$  von  $J$  verschwindet. In Kurznotation ist die Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\delta J = J[y + \delta y] - J[y] = \int dx (F_y \delta y + F_{y'} \delta y') = \int_{x_1}^{x_2} dx \left( F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} \right) \delta y = 0. \quad (4.12)$$

Da dies für beliebige  $\delta y$  gilt, folgt daraus

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad (4.13)$$

und damit die Euler-Lagrange-Gleichung.

Beispiel: Es soll die kürzeste Verbindung zwischen zwei vorgegebenen Punkten gefunden werden. Dies ist die Funktion  $y(x)$ , für die (4.1) minimal wird. Mit

$$F = \sqrt{1 + y'(x)^2} \quad (4.14)$$

ergibt sich die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dx} \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} = 0, \quad (4.15)$$

welche nach Integration

$$y' = \text{const.}, \quad y = ax + b \quad (4.16)$$

liefert. Die Konstanten  $a, b$  sind durch die Randpunkte festgelegt. Die Gerade ist also die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten.

Für mehrere Funktionen  $y_i(x)$ , also  $F(y_1(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), \dots, y_n'(x), x)$ , ergibt sich die DGL 2. Grades

$$\text{Euler-Lagrange-Gleichung: } \frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y_i'} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.17)$$

## 4.2 Hamiltonsches Prinzip

Beim Hamiltonschen Prinzip handelt es sich um ein Variationsprinzip, dessen Euler-Lagrange-Gleichungen die Lagrangegleichungen der Mechanik sind. Es erlaubt, die Grundgesetze der Mechanik elegant zu formulieren und wird auch in anderen Gebieten der Physik angewandt.

Betrachten wir die Form der Lagrangegleichungen

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}, \quad (4.18)$$

so legt sie nahe, sie als Euler-Lagrange-Gleichungen für das Stationaritätsprinzip

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t) = \text{stationär} \quad (4.19)$$

aufzufassen. Das *Wirkungsfunktional*  $S$ , kurz *Wirkung*, wird jeder Bahnkurve  $q(t)$  zugeordnet. Im Argument der Lagrangefunktion  $L$  steht  $q$  für  $(q_1, \dots, q_f)$  und  $\dot{q}$  für  $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$ . Die Randbedingungen sind dabei, dass die Variation der Endpunkte festgehalten wird, d.h.

$$q_\alpha(t_1) = q_{1\alpha} \quad , \quad q_\alpha(t_2) = q_{2\alpha} \quad . \quad (4.20)$$

Man nennt

Hamiltonsches Prinzip:  $\delta S[q] = 0$

Das *Hamiltonsche Prinzip* ist eine Bedingung an die gesuchte Bahnkurve  $q(t)$  und äquivalent zu den Lagrangegleichungen 2. Art, also

$$\delta S[q] = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \quad . \quad (4.21)$$

Meist wird  $S$  minimal, so dass man vom *Prinzip der kleinsten Wirkung* spricht.

Das Hamiltonsche Prinzip besagt, dass die Bewegung so abläuft, dass die Bahnkurve die Wirkung stationär macht.

Der Bewegungsablauf eines mechanischen Systems wird also folgendermaßen bestimmt:

- Auffinden der Lagrangefunktion  $L$ , gegeben durch  $L = T - V$ , und damit der Wirkung  $S$ .
- Betrachte alle Wege  $q(t) = \{q_\alpha(t)\}$ , die von den Anfangspunkten  $q_{1\alpha}$  zur Zeit  $t_1$  zu den Endpunkten  $q_{2\alpha}$  zur Zeit  $t_2$  führen. Finde die Wege  $q_\alpha(t)$ , die das Minimum (oder Extremum) von  $S$  ergeben. Falls  $\bar{q}(t) \equiv \{\bar{q}_\alpha(t)\}$  der gesuchte Weg ist, so gilt

$$S[q(t)] \geq S[\bar{q}(t)] \quad (4.22)$$

für alle  $q(t)$ .

- Aus der Stationaritätsbedingung  $\delta S = 0$  folgen die Lagrangegleichungen.

### 4.2.1 Bemerkungen

Das Hamiltonsche Prinzip wird meist nicht explizit angeschrieben, aber mit den Lagrangegleichungen implizit verwendet. Bei allgemeinen Betrachtungen wie etwa Symmetrien oder beim Aufstellen neuer Theorien ist es der geeignete Ausgangspunkt. Das Prinzip der kleinsten Wirkung ist die allgemeinste und kompakteste Formulierung der Mechanik:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t) = 0 \quad . \quad (4.23)$$

Diese Formulierung ist völlig unabhängig von der Wahl der Koordinaten. Weiterhin vorteilhaft ist, dass sich die Form der Lagrangefunktion durch Symmetriebedingungen stark einschränken lässt. Betrachten wir als Beispiel die Lagrangefunktion eines freien Teilchens. Für sie muss gelten

1. Aufgrund der Homogenität der Zeit kann  $L$  nicht explizit von  $t$  abhängen.
2. Aufgrund der Homogenität des Raumes kann  $L$  nicht explizit von  $\vec{r}$  abhängen.
3. Ferner muss  $L$  isotrop sein und kann damit nicht von einem Vektor abhängen, der eine bestimmte Raumrichtung auszeichnet.

Damit kann  $L$  nur von  $\dot{\vec{r}}^2$  abhängen. Die einfachste Möglichkeit ist

$$L = \text{const.} \dot{\vec{r}}^2 . \quad (4.24)$$

Dies liefert mit  $\text{const.} = m/2$  die bekannte Form.

## 4.2.2 Unbestimmtheit der Lagrangefunktion

Es kann verschiedene Lagrangefunktionen geben, die zu denselben Bewegungsgleichungen führen. Sie sind zueinander gleichwertig. Da  $\delta \int dt L = 0$  mit den Bewegungsgleichungen äquivalent ist, ist also eine vorgegebene Lagrangefunktion  $L$  gleichwertig zu  $L^* = \text{const.} L$  oder zu  $L^* = L + \text{const.}$ .

*Eichtransformationen* führen zu einer Klasse von gleichwertigen Lagrangefunktionen. Diese Transformationen sind dadurch gegeben, dass zu  $L$  die totale Zeitableitung einer beliebigen Funktion  $f(q, t)$  addiert wird. Die Funktion hängt nicht von  $\dot{q}$  ab. Wir haben also die Transformation

$$L(q, \dot{q}, t) \longrightarrow L^*(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t) . \quad (4.25)$$

Die Lagrangefunktionen  $L$  und  $L^*$  führen zu denselben Bewegungsgleichungen, wie nun gezeigt wird. Das Wirkungsintegral zu  $L^*$  lautet

$$S^* = \int_{t_1}^{t_2} dt L^* = \int_{t_1}^{t_2} dt L + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} f(q, t) = \int_{t_1}^{t_2} dt L + \underbrace{f(q_2, t_2) - f(q_1, t_1)}_{\text{const.}} , \quad (4.26)$$

wobei  $f(q_2, t_2) \equiv f(q_\alpha(t_2), t_2) = f(q_1(t_2), \dots, q_f(t_2), t_2)$  und analog  $f(q_1, t_1) \equiv f(q_1(t_1), \dots, q_f(t_1), t_1)$ . Bei der Variation von  $S$  werden die Bahnen  $q(t)$  variiert, so dass

$$\delta S^* = \delta S + \sum_{\alpha=1}^f \left( \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \right)_{t_2} \delta q_\alpha(t_2) - \sum_{\alpha=1}^f \left( \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \right)_{t_1} \delta q_\alpha(t_1) = \delta S , \quad (4.27)$$

da die Variation an den Randwerten verschwindet. Damit ist also  $\delta S^* = \delta S$ , und somit sind die Bedingungen  $\delta S^* = 0$  und  $\delta S = 0$  identisch. Die Lagrangefunktionen  $L$  und  $L^*$  sind damit gleichwertig, da sie zu denselben Bewegungsgleichungen führen. Wir betrachten zwei Beispiele.

(i) *Galileitransformation:*

Die Transformation ist durch  $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \vec{v}$  ( $\vec{v} = \text{const.}$ ) gegeben. Damit transformiert sich die Lagrangefunktion gemäß

$$L \rightarrow L + m\dot{\vec{r}}\vec{v} + \frac{m}{2}\vec{v}^2 = L + \frac{d}{dt}(m\vec{r} \cdot \vec{v} + \frac{m}{2}\vec{v}^2 t) . \quad (4.28)$$

Der Zusatzterm kann also als totale Zeitableitung geschrieben werden, so dass beide Lagrangefunktionen zu denselben Bewegungsgleichungen führen.

(ii) *Eichtransformation in der Elektrodynamik:*

Durch die Definitionen

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (4.29)$$

sind die elektromagnetischen Potentiale  $\vec{A}$  und  $\Phi$  nur bis auf eine Eichtransformation festgelegt. So sind  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  unter der Transformation

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda(\vec{r}, t), \quad \Phi \rightarrow \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (4.30)$$

mit beliebigem  $\Lambda(\vec{r}, t)$  invariant. Unter dieser Transformation ändert sich  $L$  [ $L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - Q\Phi + \frac{Q}{c}\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}$ ] gemäß

$$L \rightarrow L + \frac{Q}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t} + \frac{Q}{c}\vec{\nabla}\Lambda \cdot \dot{\vec{r}} = L + \frac{Q}{c}\frac{d\Lambda(\vec{r}, t)}{dt}. \quad (4.31)$$

Der Zusatzterm ist also durch eine totale zeitliche Ableitung gegeben, und es folgt die Invarianz der Bewegungsgleichungen.

# Kapitel 5

## Hamiltonformalismus

In der Hamilton'schen Formulierung der Mechanik werden die verallgemeinerten Impulse als Bewegungsgrößen gleichwertig zu den verallgemeinerten Koordinaten betont. Anders formuliert führt der Hamiltonformalismus die DGL 2. Ordnung für die Koordinaten in eine doppelt so große Anzahl von DGL 1. Ordnung für die Koordinaten und Impulse über. Damit ist er der geeignete Ausgangspunkt für die Anknüpfung an die Quantenmechanik, die durch eine DGL 1. Ordnung für den Zustandsvektor beschrieben wird.

Der Hamiltonformalismus bietet zwar für die praktische Lösung von Problemen keine Vorteile gegenüber dem Lagrangeformalismus. Wie oben schon gesagt ist er aber der Ausgangspunkt für die Untersuchung der Relationen zwischen der Mechanik und der Quantenmechanik. Er ist damit von besonderem theoretischen Interesse. So werden einige der verwendeten Begriffe in anderen Bereichen der Theoretischen Physik vorausgesetzt. In der Quantenmechanik geht man bei der Aufstellung des Hamiltonoperators von der *Hamiltonfunktion* aus. In der Statistik wird der Begriff des *Phasenraumvolumens* benötigt. Diese Begriffe und die kanonischen Bewegungsgleichungen werden im folgenden eingeführt.

### 5.1 Kanonische Gleichungen

Gegeben sei die Lagrangefunktion  $L(q, \dot{q}, t)$ . Die verallgemeinerten Impulse  $p_i$  werden durch

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \dots, f, \quad (5.1)$$

definiert. Diese können dazu verwendet werden, die verallgemeinerten Geschwindigkeiten  $\dot{q}_i$  zu eliminieren, denn aus

$$p_i = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i} \quad \text{folgt durch Auflösen} \quad \dot{q}_k = \dot{q}_k(q, p, t), \quad k = 1, \dots, f. \quad (5.2)$$

Wie gehabt verwenden wir in den Argumenten die Abkürzungen

$$q = (q_1, \dots, q_f), \quad \dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f), \quad p = (p_1, \dots, p_f). \quad (5.3)$$

Betrachten wir das folgende Beispiel:

$$L = \frac{m}{2} \dot{q}^2, \quad p = m\dot{q}, \quad \dot{q} = \frac{p}{m}. \quad (5.4)$$

Wir definieren die *Hamiltonfunktion*  $H$  als

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^f \dot{q}_i p_i - L = \sum_i \dot{q}_i(q, p, t) p_i - L(q, \dot{q}(q, p, t), t). \quad (5.5)$$

Die Hamiltonfunktion hat die Bedeutung der Energie des Systems. Die Lagrangefunktion ist eine Funktion von  $q, \dot{q}, t$ . Die Hamiltonfunktion hingegen ist eine Funktion von  $q, p, t$ . Aus dem vollständigen Differential der Lagrangefunktion

$$\begin{aligned} dL(q, \dot{q}, t) &= \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_i (\dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i) + \frac{\partial L}{\partial t} dt, \end{aligned} \quad (5.6)$$

wobei

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad \text{und die Lagrangegleichung} \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} p_i = \dot{p}_i \quad (5.7)$$

benutzt wurde, folgt

$$\begin{aligned} dH &= d\left(\sum_{i=1}^f \dot{q}_i p_i - L\right) \\ &= \sum_i (\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \dot{p}_i dq_i - p_i d\dot{q}_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_i (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_i \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Durch Vergleichen findet man die *kanonischen* oder *Hamilton'schen Bewegungsgleichungen*

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \text{mit } i = 1, 2, \dots, f \quad (5.9)$$

und

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (5.10)$$

Es handelt sich um ein System von  $2f$  DGL 1. Ordnung anstelle der  $f$  DGL 2. Ordnung im Lagrangeformalismus. Die Bewegung des Systems findet im Raum der  $p_i$  und  $q_i$  statt. Man nennt diesen Raum Phasenraum.

Beispiel: Teilchen der Masse  $m$  im Potential  $V(\vec{r})$  in 3 Dimensionen:

$$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r}), \quad \vec{p} = m\dot{\vec{r}} \quad (5.11)$$

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r}) \rightsquigarrow \dot{\vec{p}} = -\nabla V(\vec{r}), \quad \dot{\vec{r}} = \frac{\vec{p}}{m}. \quad (5.12)$$

### 5.1.1 Vorgehen im Hamiltonformalismus

Wir geben hier das Rezept für die Lösung von Problemen im Hamiltonformalismus an:

1. Finde zunächst die generalisierten Koordinaten

$$\vec{q} = (q_1, \dots, q_f) . \quad (5.13)$$

2. Finde die Transformationen

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, \dots, q_f, t) \quad (5.14)$$

$$\dot{\vec{r}}_k = \dot{\vec{r}}_k(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) . \quad (5.15)$$

3. Drücke die in den Teilchenkoordinaten gegebene kinetische und potentielle Energie durch die generalisierten Koordinaten aus.

4. Bestimme die generalisierten Impulse gemäß

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \Rightarrow p_j = p_j(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) . \quad (5.16)$$

5. Löse (5.16) für  $\dot{q}_j$ ,

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(\vec{q}, \vec{p}, t) . \quad (5.17)$$

6. Ersetze dies in der Lagrangefunktion,

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}(\vec{q}, \vec{p}, t), t) = \tilde{L}(\vec{q}, \vec{p}, t) . \quad (5.18)$$

7. Bestimme  $H$  mit Hilfe der Legendre-Transformation,

$$H(\vec{q}, \vec{p}, t) = \sum_{j=1}^f p_j \dot{q}_j(\vec{q}, \vec{p}, t) - \tilde{L}(\vec{q}, \vec{p}, t) . \quad (5.19)$$

8. Stelle die kanonischen Bewegungsgleichungen auf und löse sie.

**Beispiel Fadenpendel:** Wir betrachten ein Fadenpendel mit Masse  $m$ , das sich im Schwerfeld der Erde mit Erdbeschleunigung  $\vec{g}$  bewegt, siehe Fig. 5.1. Die Zwangsbedingungen sind durch

$$z = \text{const.} = 0 \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 = l^2 = \text{const.} \quad (5.20)$$

gegeben. Damit haben wir  $f = 3 - 2 = 1$  Freiheitsgrade. Wir wählen als generalisierte Koordinate  $q = \varphi$ . Damit haben wir

$$x = l \sin q , \quad \dot{x} = l \dot{q} \cos q \quad (5.21)$$

$$y = l \cos q , \quad \dot{y} = -l \dot{q} \sin q . \quad (5.22)$$

Für die kinetische und potentielle Energie und damit die Lagrangefunktion ergibt sich so ausgedrückt in der generalisierten Koordinate

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{q}^2 \quad (5.23)$$

$$V = -mgy = -mgl \cos q \quad (5.24)$$

$$L = T - V = \frac{1}{2} m l^2 \dot{q}^2 + mgl \cos q . \quad (5.25)$$

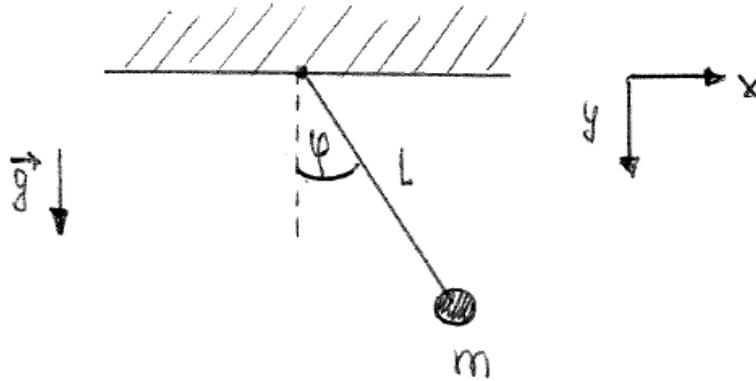


Abbildung 5.1: Fadenpendel.

Hieraus lässt sich der generalisierte Impuls berechnen,

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = ml^2 \dot{q} \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = \frac{p}{ml^2} . \quad (5.26)$$

Und die Langrangefunktion  $\tilde{L}$  wird

$$\tilde{L}(\vec{q}, \vec{p}) = \frac{p^2}{2ml^2} + mgl \cos q . \quad (5.27)$$

Mit Hilfe der Legendre-Transformation finden wir für die Hamiltonfunktion

$$\begin{aligned} H &= p\dot{q} - \tilde{L}(\vec{q}, \vec{p}) = \frac{p^2}{ml^2} - \frac{p^2}{2ml^2} - mgl \cos q \\ &= \frac{p^2}{2ml^2} - mgl \cos q . \end{aligned} \quad (5.28)$$

Die kanonischen Bewegungsgleichungen ergeben sich zu

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{ml^2} \quad (5.29)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -mgl \sin q . \quad (5.30)$$

Hierbei handelt es sich um ein System von  $2f = 2$  gekoppelten Differentialgleichungen 1. Ordnung. Durch Einsetzen finden wir 1 Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$\ddot{q} = \frac{\dot{p}}{ml^2} = -\frac{g}{l} \sin q . \quad (5.31)$$

Dies ist die bekannte Differentialgleichung des Fadenpendels.

## 5.2 Poissonklammer

In diesem Abschnitt wird die *Poissonklammer* definiert. Sie ergibt einen Ausdruck für die Zeitableitung einer beliebigen physikalischen Größe und damit eine alternative Form der Bewegungsgleichungen. In der Quantenmechanik hat die Poissonklammer die direkte Entsprechung im *Kommutator* von Operatoren.

Eine physikalischen Größe in einem System, das durch die Koordinaten  $q_i$  und die Impulse  $p_i$  beschrieben wird, kann nur von diesen Variablen und der Zeit abhängen. Wir betrachten also zwei solche Größen  $F(p, q, t)$  und  $K(p, q, t)$  der verallgemeinerten Koordinaten und Impulse. Die *Poissonklammer* ist definiert durch

$$\{F, K\} \equiv \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial K}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial K}{\partial q_i} \right). \quad (5.32)$$

Sie wird durch geschweifte Klammern bezeichnet, die zwei Argumente einschließen,  $\{, \}$ . Zunächst werden einige Eigenschaften und spezielle Poissonklammern betrachtet. So folgt unmittelbar aus der Definition

$$(i) \quad \{F, K\} = -\{K, F\} \quad \text{und} \quad \{F, F\} = 0. \quad (5.33)$$

Da im Hamiltonformalismus die  $p_i, q_i$  und  $t$  unabhängige Variablen sind, gilt

$$\frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial q_i}{\partial p_j} = 0, \quad \frac{\partial q_i}{\partial t} = 0, \quad (5.34)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_j} = 0, \quad \frac{\partial p_i}{\partial p_j} = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial t} = 0. \quad (5.35)$$

Somit ergibt sich aus (5.32) für  $K = q_j$  oder  $K = p_j$

$$(ii) \quad \frac{\partial F}{\partial p_j} = -\{F, q_j\}, \quad \frac{\partial F}{\partial q_j} = \{F, p_j\}. \quad (5.36)$$

Und mit  $F = q_i$  oder  $F = p_i$  ergibt sich weiter

$$(iii) \quad \{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{p_i, q_j\} = -\delta_{ij}. \quad (5.37)$$

Weitere Eigenschaften sind

$$(iv) \quad \{F, c\} = 0, \quad c = \text{const.} \quad (5.38)$$

$$(v) \quad \{F_1 + F_2, K\} = \{F_1, K\} + \{F_2, K\} \quad (5.39)$$

$$(vi) \quad \frac{\partial}{\partial t} \{F, K\} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial t}, K \right\} + \left\{ F, \frac{\partial K}{\partial t} \right\} \quad (5.40)$$

$$(vii) \quad \{F, \{K, J\}\} + \{K, \{J, F\}\} + \{J, \{F, K\}\} = 0 \quad \text{Jacobi-Identität.} \quad (5.41)$$

Es wird nun die Zeitabhängigkeit einer beliebigen physikalischen Größe  $F(q, p, t)$  berechnet. Also

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (5.42)$$

$$= \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (5.43)$$

wobei im letzten Schritt die kanonischen Gleichungen verwendet wurden. Damit erhalten wir

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (5.44)$$

Durch diese Gleichung wird die Zeitabhängigkeit einer beliebigen physikalischen Größe bestimmt. Man denke bei  $F$  z.B. an den Schwerpunktimпульs, den Drehimpuls oder die Energie des Systems. Mithilfe der Glg. (5.44) lässt sich die Frage nach Erhaltungsgrößen neu formulieren. Wenn eine physikalische Größe  $F$  nicht explizit von der Zeit abhängt, so ist sie gerade dann eine Erhaltungsgröße, wenn ihre Poissonklammer mit  $H$  verschwindet. Und für  $F = H$  ergibt sich

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} . \quad (5.45)$$

Falls  $\partial H/\partial t = 0$ , so ist  $H$  eine Erhaltungsgröße. Schließlich folgen aus Glg. (5.44) die kanonischen Gleichungen in der Form

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} \quad , \quad \dot{q}_i = \{q_i, H\} . \quad (5.46)$$

### 5.3 Hamiltonsches Prinzip

In diesem Abschnitt wird das Hamiltonsche Prinzip für die Hamiltonfunktion formuliert. Es besagt, dass die Wirkung  $S$  für die tatsächliche Bewegung stationär ist. Es gilt also

$$\delta S[q] = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L \stackrel{(5.5)}{=} \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) \right) = 0 . \quad (5.47)$$

Es gilt zunächst für  $S = S[q]$ , d.h. für die Variation der  $f$  Funktionen  $q_i(t)$  bei festgehaltenen Randwerten. Wir betrachten nun  $S$  als Funktional der  $2f$  unabhängigen Funktionen  $q(t)$  und  $p(t)$ , also  $S = S[q, p]$ . Die Randwerte werden festgehalten, also

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \quad , \quad \delta p(t_1) = \delta p(t_2) = 0 . \quad (5.48)$$

Damit haben wir für die Variation  $S[q, p]$

$$\delta S[q, p] = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^f \left[ \left( \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left( \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right] . \quad (5.49)$$

Wir haben hier  $p_i \delta \dot{q}_i$  durch partielle Integration umgeformt, denn

$$p_i \delta \dot{q}_i = (p_i \delta q_i) \Big|_{t_1}^{t_2} - \dot{p}_i \delta q_i = -\dot{p}_i \delta q_i , \quad (5.50)$$

wobei wir die Randbedingungen Glg. (5.48) verwendet haben. Aus (5.49) und den kanonischen Gleichungen folgt  $\delta S[q, p] = 0$ . Da andererseits  $\delta q_i$  und  $\delta p_i$  beliebig sind, folgen

umgekehrt die kanonischen Gleichungen aus  $\delta S[q, p] = 0$ . Somit können wir genauso wie im Lagrangeformalismus die Bewegungsgleichungen durch das Hamiltonsche Prinzip ersetzen:

$$\delta S = \delta S[q, p] = 0 \quad \text{Hamiltonsches Prinzip} \quad (5.51)$$

Gegenüber dem Hamiltonschen Prinzip, das wir bereits kennengelernt haben, ist es dadurch modifiziert, dass es nach anderen, doppelt so vielen, Größen variiert wird.

Da wir (5.48) haben, kann zum Integranden in (5.47) die totale Zeitableitung einer beliebigen Funktion  $F(q, p, t)$  addiert werden, ohne dass sich die Aussage ändert. So lässt also die Transformation

$$\sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i - H \rightarrow \sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i - H + \frac{d}{dt} F(q, p, t) \quad (5.52)$$

die kanonischen Gleichungen invariant.

## 5.4 Zustand eines Systems

Wir stellen die Frage: Welche Informationen sind notwendig, um ein System vollständig zu beschreiben? Die unterschiedlichen Räume zur Beschreibung eines Systems sollen am Beispiel des einfachen harmonischen Oszillators betrachtet werden.

Konfigurationsraum: Der Konfigurationsraum wird durch die generalisierten Koordinaten beschrieben, also

$$\vec{q} = (q_1, \dots, q_f) . \quad (5.53)$$

Er ist  $f$ -dimensional. Die Bahn des harmonischen Oszillators im Konfigurationsraum ist eine Bahn zwischen den Anfangs- und Endpunkten der Bewegung, die durch die Amplitude gegeben sind, siehe Abb. 5.2 (a). Es gibt hier aber keinerlei zeitliche Information.

Ereignisraum: Hier wird auch die Zeit mit angegeben, d.h. wir haben

$$\vec{q} = (q_1, \dots, q_f) \quad \text{und} \quad t . \quad (5.54)$$

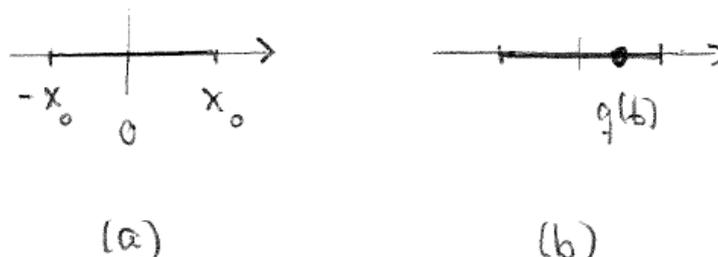


Abbildung 5.2: Bewegung des harmonischen Oszillators im Konfigurationsraum (a) und im Ereignisraum (b).

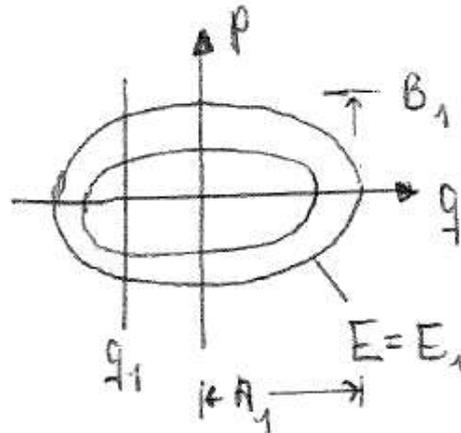


Abbildung 5.3: Bewegung des harmonischen Oszillators im Phasenraum.

Der Raum ist  $(f + 1)$ -dimensional. Die Bahn  $(\vec{q}, t)$  wird im Lagrangeformalismus aus  $2f$  Anfangsbedingungen bestimmt. Durch den Konfigurationsraum wird nur die aktuelle Konfiguration bzw. der aktuelle Zustand beschrieben, siehe Abb. 5.2 (b). Er bildet nicht den Impuls der einzelnen Elemente ab. Daher kann die weitere Bewegung der einzelnen Elemente nicht abgeleitet werden.

Phasenraum: Der Phasenraum besteht aus den verallgemeinerten Koordinaten und Impulsen, d.h.

$$\vec{q} = (q_1, \dots, q_f) \quad \text{und} \quad \vec{p} = (p_1, \dots, p_f). \quad (5.55)$$

Er ist  $2f$ -dimensional. Der Phasenraum beschreibt die Menge aller möglichen Zustände eines physikalischen Systems. Dabei entspricht jeder Zustand des Systems einem Punkt im Phasenraum.

Die Bahnen des harmonischen Oszillators sind im Phasenraum Ellipsen, denn mit  $E = T + V$  ist

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 &= E \\ \Leftrightarrow \frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{2E/(m\omega^2)} &= 1. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Die Halbachsen sind

$$A = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \quad \text{und} \quad B = \sqrt{2mE}. \quad (5.57)$$

Bei fester Energie haben wir eine Ellipse. Wir sehen (siehe Abb. 5.3), ein Punkt  $q_1$  im Konfigurationsraum reicht nicht aus, um das System vollständig zu beschreiben. Wir müssen auch Information über die Impulse geben. Dies führt zum Phasenraum.

Zustandsraum: Der Zustandsraum erweitert den Phasenraum um die Zeit, d.h.

$$\vec{q} = (q_1, \dots, q_f), \quad \vec{p} = (p_1, \dots, p_f) \quad \text{und} \quad t. \quad (5.58)$$

Er ist  $(2f + 1)$ -dimensional. Er ist in der Mechanik der Darstellungsraum mit der größten Information und legt das System fest. Der Konfigurationsraum, der Ereignisraum und der Phasenraum sind Projektionen des Zustandsraumes und enthalten damit weniger Information. Punkte im Zustandsraum  $\vec{\Pi}(t)$  werden im Hamiltonformalismus durch DGLs 1. Ordnung beschrieben. Somit erhalten wir aus  $\vec{\Pi}(t_0)$  unter Kenntnis von  $H \vec{\Pi}(t \neq t_0)$ .

Der Zustand  $\psi$ : Darunter versteht man die Gesamtheit aller Informationen, die zur vollständigen Beschreibung der momentanen Eigenschaften des Systems erforderlich sind. In der Mechanik wird jede Eigenschaft der Massenpunkte durch eine Funktion im Phasenraum  $f(\vec{q}, \vec{p}) = f(\vec{\Pi})$  beschrieben. Der Zustand  $\psi$  entspricht also einem Punkt  $\vec{\Pi}$  im Phasenraum. Die Menge der möglichen Zustände bildet den Zustandsraum oder Phasenraum des betrachteten physikalischen Systems.

Wenn aus der Kenntnis des Anfangszustandes  $\psi_0 \equiv \psi(t_0)$  der Zustand  $\psi(t)$  zum Zeitpunkt  $t$  festgelegt werden kann, dann wird die Bewegung durch eine DGL 1. Ordnung beschrieben, also hier

$$\dot{\psi}(t) = \tilde{f}(\psi(t)) . \tag{5.59}$$

Die Hamiltonschen kanonischen Gleichungen sind DGLs 1. Ordnung in der Zeit. Damit spielt also die Hamiltonfunktion eine fundamentale Rolle.



# Kapitel 6

## Spezielle Relativitätstheorie

### Literatur, z.B.:

- L.D. Landau, Ju.B. Rumer, *Was ist die Relativitätstheorie*, Teubner, Leipzig, 1985
- H. Melcher, *Relativitätstheorie in elementarer Darstellung mit Aufgaben und Lösungen*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1984
- A. Einstein, *Über spezielle und allgemeine Relativitätstheorie*, Akademie Verlag, Berlin, 1969
- Walter Greiner, *Spezielle Relativitätstheorie*, Verlag Harri Deutsch, 1992
- E.F. Taylor, J.A. Wheeler, *Spacetime Physics*, W.H. Freeman & Co Ltd, 1992

Im Namen *spezielle Relativitätstheorie* (SRT) tritt der Begriff 'Relativität' auf. Dieser geht auf den Begriff *Relativitätsprinzip* zurück. Dieses besagt, dass die physikalischen Gesetze für alle Beobachter dieselbe Form haben. Die Invarianz oder auch Kovarianz der physikalischen Gesetze gilt im Rahmen der klassischen Physik und in der 1905 von Albert Einstein aufgestellten SRT zunächst nur in *Inertialsystemen*, also Systemen, die sich relativ zueinander gleichförmig geradlinig bewegen. Einstein erweiterte dieses Prinzip durch die Forderung, dass in allen, also auch beschleunigten Bezugssystemen, die Gesetze dieselbe Form annehmen müssen. Diese allgemeine Kovarianz wird im Rahmen der *allgemeinen Relativitätstheorie* (ART) formuliert.

Ein wichtiges Kriterium ist die Geschwindigkeit  $v$  der beteiligten Systeme. So gilt bei  $v \ll c$ , wobei  $c$  die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet, die klassische Mechanik, während bei  $v \lesssim c$  die SRT anzuwenden ist. Dabei ist zu beachten, dass die Relativitätstheorie bei kleinen Geschwindigkeiten mit der klassischen Physik übereinstimmt, letztere also ein Spezialfall ersterer ist. Die Theorie ist also so konstruiert, dass die Newtonsche Mechanik als Grenzfall  $v \ll c$  enthalten ist.

Der klassischen Physik folgend gibt es Bezugssysteme, die anderen 'überlegen' sind, da in ihnen keine Scheinkräfte wirken. Deshalb wurde in der klassischen Newtonschen Mechanik lange Zeit die Existenz eines *absoluten Raums* vorausgesetzt. Das Relativitätsgesetz besagt dann, dass in Inertialsystemen die gleichen Gesetze der Mechanik gelten wie im absoluten Raum selbst. Ebenso spricht in der klassischen Physik nichts gegen eine *absolute Zeit*. Konkret heißt das, dass in Inertialsystemen (gleichförmig geradlinig zueinander bewegten Systemen) Newtons Gesetz  $\vec{F} = m\vec{\ddot{r}}$  gilt und zwar ohne die Hinzunahme von Scheinkräften.

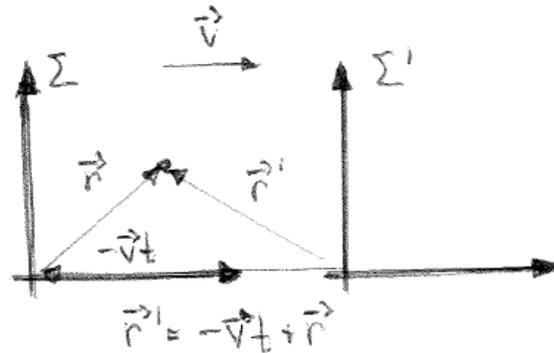


Abbildung 6.1: Zwei Inertialsysteme  $\Sigma$  und  $\Sigma'$ , die sich relativ zueinander mit  $\vec{v}$  bewegen.

Betrachten wir dies näher: Unser Ausgangspunktinertialsystem sei  $\Sigma$ . Wir betrachten ein System  $\Sigma'$ , das sich geradlinig gleichförmig mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  relativ zu  $\Sigma$  bewegt. Gemäß dem Relativitätsprinzip ist dies ein Inertialsystem, in dem die gleichen physikalischen Gesetze, insbesondere Newtons Gesetz, gelten. Sei  $\vec{r}$  die Position eines Massenpunktes der Masse  $m$  in  $\Sigma$ . Dann ist, siehe Abb. 6.1, die Position in  $\Sigma'$

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t \quad \text{bzw.} \quad \vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}t. \quad (6.1)$$

Damit haben wir

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}' + \vec{v} \quad \text{und} \quad \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}'. \quad (6.2)$$

Somit finden wir

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} = m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F}'. \quad (6.3)$$

Formal besteht also kein Unterschied zwischen  $\Sigma$  und  $\Sigma'$ . Implizit haben wir hierbei  $t = t'$  angenommen. Die physikalischen Gesetze behalten also ihre Gültigkeit unter der *Galilei-Transformation*. Diese lautet für  $\vec{v} \parallel \hat{z}$ .

$$x = x', \quad y = y', \quad z = z' + vt, \quad t' = t. \quad (6.4)$$

Betrachten wir die Konsequenzen für Lichtwellen, die sich in einem System  $\Sigma$  sphärisch ausbreiten. Wir haben

$$\Sigma: \quad \dot{\vec{r}} = c\hat{r}, \quad \text{mit} \quad \hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad (6.5)$$

$$\Sigma': \quad \text{per Galilei} \quad \dot{\vec{r}}' = c\hat{r} - \vec{v}. \quad (6.6)$$

Damit haben wir in  $\Sigma'$  keine sphärischen Wellen mehr! Durch die Galilei-Transformation wäre somit die Lichtgeschwindigkeit vom Bezugssystem abhängig. Und somit wären dann also auch die Maxwell-Gleichungen nur in einem einzigen Bezugssystem gültig. Es müsste dann durch Messung der Lichtgeschwindigkeit möglich sein, die Geschwindigkeit relativ zu diesem System zu bestimmen. Es herrschte im 19. Jahrhundert, vor dem Aufstellen der SRT durch Einstein, die Vorstellung, dass es einen ruhenden Äther gäbe, der das Übertragungsmedium für das Licht ist. Das Inertialsystem, in dem der Äther ruht, wurde mit dem *absoluten Raum* Newtons identifiziert. In diesem ruhenden Äther breitet sich das Licht sphärisch aus. Wenn es also solch einen absoluten Raum gibt, muss es möglich sein, den Bewegungszustand der Erde relativ zum Äther nachzuweisen. Die sollte mit dem *Michelson-Morley Experiment* möglich sein.

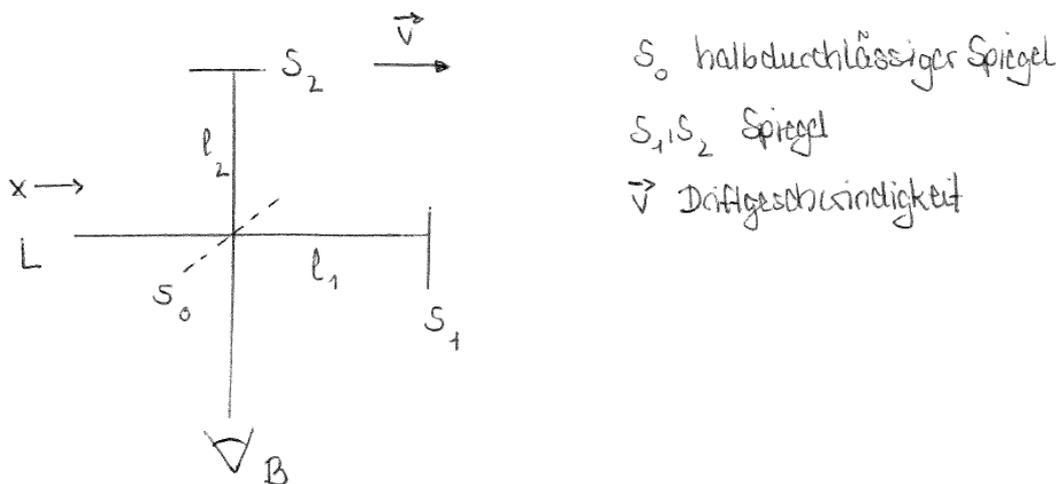


Abbildung 6.2: Das Michelson-Morley Interferometer.

## 6.1 Das Michelson-Morley Experiment

Da sich das Licht im gesamten Universum ausbreitet, sollte der Äther ebenfalls den gesamten Raum einnehmen, es also einen *Weltäther* geben. Die Erde driftet mit einer Geschwindigkeit von 30 km/s um die Sonne und somit also, wenn es den absoluten Weltäther gibt, durch diesen. Unter dieser Annahme, stellen sich die Fragen:

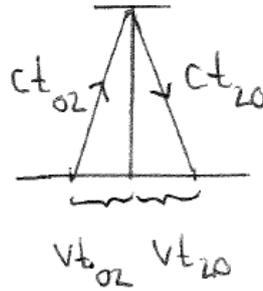
- Breitet sich das Licht zu unterschiedlichen Jahreszeiten unterschiedlich aus?
- Kann man die Geschwindigkeit der Erde relativ zum Äther bzw. des Äthers relativ zur Sonne ermitteln?

Die sollte mit dem Michelson-Morley Interferometer mit zwei zueinander senkrecht stehenden Armen möglich sein. Die Idee dabei ist, dass die Geschwindigkeit des Lichts in zwei verschiedenen Richtungen gemessen wird, einmal in Bewegungsrichtung der Erde und einmal senkrecht dazu. Der Aufbau des Experiments ist in Fig. 6.2 dargestellt. Das von einer Lichtquelle  $L$  kommende Licht wird durch einen halbdurchlässigen Spiegel  $S_0$  in zwei Anteile aufgespalten. Ein Anteil läuft zum Spiegel  $S_1$ , wird dort reflektiert und gelangt über den halbdurchlässigen Spiegel zum Beobachter  $B$ . Der andere Anteil läuft zum Spiegel  $S_2$ , wird dort reflektiert und gelangt dann ebenfalls zum Beobachter. Die beiden dort ankommenden Lichtanteile interferieren bei  $B$ . Abhängig von den vermuteten unterschiedlichen Laufzeiten des Lichts ergibt sich dann eine bestimmte Anordnung der Interferenzstreifen. Wird die Apparatur um  $90^\circ$  gedreht, dann ändern sich die Lichtlaufzeiten relativ zum vermuteten Äther und damit auch die Lage der Interferenzstreifen. Dies soll im Folgenden quantifiziert werden. Es seien  $l_1$  und  $l_2$  jeweils die Abstände zwischen  $S_0$  und  $S_1$  bzw.  $S_0$  und  $S_2$ . Mit  $\vec{v}$  sei die Driftgeschwindigkeit bezeichnet. Die beiden möglichen Lichtwege sind:

$$S_0 - S_1 - S_0 - B \quad \text{und} \quad S_0 - S_2 - S_0 - B .$$

Konstruktive Interferenz findet statt, falls für die Wegdifferenz  $\delta S$  gilt

$$\delta S = m \cdot \lambda \quad \text{mit} \quad m \in \mathbb{Z} , \tag{6.7}$$

Abbildung 6.3: Der Weg  $S_0 - S_2 - S_0$ .

wobei  $\lambda$  die Wellenlänge des Lichts bezeichnet. Wir nehmen die Position des im Äther ruhenden Beobachters ein. Läuft das Licht in Richtung der Driftgeschwindigkeit ( $S_0 \rightarrow S_1$ ) dann vergrößert sich seine Laufzeit  $t_{01}$ , läuft es gegen die Driftgeschwindigkeit ( $S_1 \rightarrow S_0$ ), so verringert sich seine Laufzeit  $t_{10}$ . Wir erhalten

$$S_0 \rightarrow S_1 : \quad t_{01} = \frac{l_1}{c - v} , \quad (6.8)$$

$$S_1 \rightarrow S_0 : \quad t_{10} = \frac{l_1}{c + v} . \quad (6.9)$$

Somit ergibt sich für die Gesamtlaufzeit  $T_1$  des Weges

$$S_0 - S_1 - S_0 : \quad T_1 = \frac{l_1}{c - v} + \frac{l_1}{c + v} = 2 \frac{l_1}{c} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} . \quad (6.10)$$

Der Weg  $S_0 - S_2 - S_0$  wird senkrecht zur Driftgeschwindigkeit durchlaufen, siehe Fig. 6.3. Wir erhalten

$$S_0 \rightarrow S_2 : \quad c^2 t_{02}^2 = l_2^2 + v^2 t_{02}^2 , \quad (6.11)$$

$$S_2 \rightarrow S_0 : \quad c^2 t_{20}^2 = l_2^2 + v^2 t_{20}^2 \quad (6.12)$$

und damit die Gesamtlaufzeit  $T_2$  des zweiten Weges

$$S_0 - S_2 - S_0 : \quad T_2 = t_{02} + t_{20} = \frac{2l_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \quad (6.13)$$

Aus dem Laufzeitunterschied der beiden Teilstrahlen ergibt sich für ihre optische Wegdifferenz

$$\delta = c(T_2 - T_1) = 2 \left( \frac{l_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{l_1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) . \quad (6.14)$$

Wird nun die Apparatur um  $90^\circ$  gedreht, so vertauschen sich die Rollen von  $l_1$  und  $l_2$ . Damit ergibt sich die optische Wegdifferenz

$$\delta' = c(T_2' - T_1') = 2 \left( \frac{l_2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{l_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) . \quad (6.15)$$

Die Frage ist nun: Wie muss der Apparat verstellt werden, nachdem er gedreht wurde, um eine Verschiebung um z.B. ein Interferenzmaximum zu erreichen? Wir haben

$$S \equiv \delta' - \delta = 2(l_1 + l_2) \left( \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \quad (6.16)$$

$$\approx 2(l_1 + l_2) \left( 1 + \frac{v^2}{c^2} + \dots - 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right) \quad (6.17)$$

$$\Rightarrow S = (l_1 + l_2) \frac{v^2}{c^2}. \quad (6.18)$$

Mit einer angenommenen Äthergeschwindigkeit von  $v = 30 \text{ km/s}$ ,  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$  und der Wellenlänge für sichtbares Licht  $\lambda = 500 \text{ nm} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$  ergibt sich, dass

$$l_1 + l_2 \approx 50 \text{ m} \quad (6.19)$$

betragen muss, um die Verschiebung um ein Interferenzmaximum zu erreichen. Die Länge bei der Apparatur von Michelson-Morley betrug etwa 10 m. Sie ließen den Strahl mehrfach reflektieren. Somit wäre das Experiment also durchaus sensitiv gewesen. Jedoch wurde keine Interferenzverschiebung beobachtet!

Aus der Tatsache, dass keine Intefferenzverschiebung beobachtet wird, ergeben sich die Folgerungen

- Die Lichtgeschwindigkeit ist überall gleich!
- Es gibt keine absolute Zeit und keinen absoluten Raum.
- Wenn es weiterhin Interferenzsysteme geben soll (ja, jetzt erst recht), so muss die Galilei-Transformation falsch sein.
- Ohne unendliche Geschwindigkeiten des Informationsaustausches ist der Begriff der *Gleichzeitigkeit* an die Synchronisation mittels Licht geknüpft. Dies ist für ein ruhendes System klar. Man kann sich etwa eine Person vorstellen, die in jeder Hand eine Lampe hält und diese in genau gleichen Zeitintervallen aufblitzen lässt. Die Blitze entstehen in der gleichen Entfernung von ihr und treffen daher gleichzeitig bei ihr ein. Für einen Beobachter, gegen den sich die Person relativ mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, ist der Begriff der Gleichzeitigkeit komplizierter.

## 6.2 Die Einsteinschen Postulate

Einstein hielt an der Idee der Gleichberechtigung aller Bezugssysteme fest. Er stellte folgende Postulate auf:

1. *Relativitätsprinzip*: Die Form der physikalischen Gesetze bleibt in jedem Inertialsystem gleich.
2. *Konstanz der Lichtgeschwindigkeit*: Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist in allen Inertialsystemen gleich. (Also unabhängig von der Bewegung der Quellen.)

Diese Postulate bilden die axiomatische Grundlage der SRT. Ihre rigorose Anwendung führt zur Erweiterung der Galilei-Transformation auf die Lorentz-Transformation. Es handelt sich hier um Transformationsformeln insbesondere für Raum und Zeit. Die Lorentztransformation enthält als Grenzfall für  $v \ll c$  die Galilei-Transformation.

## 6.3 Die Lorentztransformation

Wir betrachten zwei Inertialsysteme  $\Sigma$  und  $\Sigma'$ .  $\Sigma'$  bewegt sich in gleichförmig geradliniger Bewegung gegenüber  $\Sigma$  mit der Geschwindigkeit  $v$ . Zum Zeitpunkt  $t = 0$  in  $\Sigma$  seien beide Systeme identisch,  $\Sigma = \Sigma'$ . Wir vergleichen zwei Lichtblitze, die zum Zeitpunkt  $t = 0$  im Ursprung von  $\Sigma$  und  $\Sigma'$  ausgesandt werden. Die sich ausbreitende Kugelwelle genügt der Gleichung

$$c^2 t^2 = r^2 = x^2 + y^2 + z^2 . \quad (6.20)$$

Wegen Konstanz der Lichtgeschwindigkeit gilt aber auch

$$c^2 t'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2 . \quad (6.21)$$

Dies zeigt uns, dass Raum und Zeit verknüpft sind. Wir bezeichnen deshalb als *Ereignis* etwas, das in Raum und Zeit lokalisiert ist. Ein Ereignis können wir mit Hilfe eines *Vierervektors* beschreiben, der Raum- und Zeitkomponenten enthält:

$$\underline{\text{Vierervektor}}: \quad x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \vec{r}) = (ct, x, y, z) . \quad (6.22)$$

### 6.3.1 Einschub: Index Notation

Wir können Gleichungen entweder mit Vektoren oder in Komponenten schreiben:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \leftrightarrow \quad F_i = ma_i \quad (6.23)$$

$$s = \vec{a}\vec{b} \quad \leftrightarrow \quad s = \sum_{i=1}^3 a_i b_i . \quad (6.24)$$

Und mit den Matrizen  $M$  und  $L$

$$\vec{a} = M\vec{b} \quad \leftrightarrow \quad a_i = \sum_j M_{ij} b_j \quad (6.25)$$

$$\vec{a} = LM\vec{b} \quad \leftrightarrow \quad a_i = \sum_{j,k} L_{ij} M_{jk} b_k . \quad (6.26)$$

Wir führen die Einsteinsche Summenkonvention ein. Sie besagt, dass über doppelt auftretende Indizes summiert wird, also

$$a_i = M_{ij} b_j = \text{Summation über } j \quad (6.27)$$

$$a_i = L_{ij} M_{jk} b_k = \text{Summation über } j, \text{ über } k \text{ etc. .} \quad (6.28)$$

Wir bezeichnen die Komponenten von Vierervektoren mit griechischen Indizes, also

$$x^\mu, \quad x_\mu . \quad (6.29)$$

Die  $x^\mu$ ,  $x_\mu$  sind nicht euklidisch, sondern Elemente im Minkowski-Raum. Die beiden Viervektoren in (6.29) unterscheiden sich wegen der Minkowski-Metrik

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (6.30)$$

im Vorzeichen ihrer räumlichen Komponenten. Es gilt

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \quad (6.31)$$

und

$$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu \quad \text{sowie} \quad x^\mu = g^{\mu\nu}x_\nu. \quad (6.32)$$

Mit dem kontravarianten Vierervektor

$$x^\mu = (ct, \vec{x}) \quad (6.33)$$

gilt für den kovarianten Vierervektor

$$x_\mu = (ct, -\vec{x}). \quad (6.34)$$

Beim Skalarprodukt werden immer nur obere und untere Indizes kontrahiert,

$$x_\mu y^\mu = g_{\mu\nu}x^\nu y^\mu = x^\mu y_\mu = g^{\mu\nu}x_\nu y_\mu = x^0 y^0 - \vec{x}\vec{y}. \quad (6.35)$$

Beachte, dass  $x_0 = x^0$ . Die Matrixmultiplikation schreibt sich gemäß

$$\begin{aligned} x'^\mu &= \underbrace{L^\mu_\nu}_{\text{Matrizelemente}} x^\nu \equiv \sum_{\nu=0,1,2,3} L^\mu_\nu x^\nu \\ &= L^\mu_0 x^0 + L^\mu_1 x^1 + L^\mu_2 x^2 + L^\mu_3 x^3. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Mit

$$x^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = c^2 t^2 - \vec{x}^2 \quad (6.37)$$

ist also die gleiche Ausbreitung der Kugelwellen in  $\Sigma$  und  $\Sigma'$  gleichbedeutend mit der Invarianz des Viererimpulsquadrats im Minkowski-Raum,

$$x^2 = x'^2 \quad (6.38)$$

oder

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2. \quad (6.39)$$

Die gesuchte Transformation, die dies gewährleistet, wenn man von  $\Sigma$  nach  $\Sigma'$  übergeht, ist die Lorentz-Transformation.

### 6.3.2 Herleitung der Lorentz-Transformation

Die Wahl der Koordinatenachsen ist offenbar willkürlich. Die allgemeine Lorentztransformation ist einfach gegeben durch die spezielle Lorentztransformation (bei der  $\vec{v}$  entlang einer Achse gerichtet ist) multipliziert mit einer Drehung. Wir betrachten im folgenden der Einfachheit halber o.B.d.A. eine gleichförmig geradlinige Bewegung entlang der  $z$ -Achse. Die Lorentztransformation wird durch die Matrix  $L_\nu^\mu$  vermittelt. Die Transformation muss eine lineare Beziehung sein, damit die gleichförmige Bewegung in  $\Sigma$  auch in  $\Sigma'$  gleichförmig bleibt<sup>1</sup>, also

$$x'^\mu = L_\nu^\mu x^\nu \left( = \sum_{\nu=0,1,2,3} L_\nu^\mu x^\nu \right). \quad (6.40)$$

Da sich gemäß unserer gewählten Bewegungsrichtung  $x$  und  $y$  nicht verändern, sind diese auch zunächst unabhängig von der Transformation und somit

$$x' = x \quad \text{und} \quad y' = y. \quad (6.41)$$

Die Gestalt der Transformationsmatrix ist also gegeben durch

$$L = \begin{pmatrix} L_{00} & 0 & 0 & L_{03} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ L_{30} & 0 & 0 & L_{33} \end{pmatrix}. \quad (6.42)$$

Es werden also nur die  $z$ - und die  $t$ -Komponenten vermischt. Die Komponenten  $x$  und  $y$  bleiben invariant. Damit wird aus Glg. (6.39) mit

$$x^0 \equiv ct, \quad x^1 \equiv x, \quad x^2 \equiv y, \quad x^3 \equiv z \quad (6.43)$$

schließlich

$$\begin{aligned} (x^0)^2 - (x^3)^2 &= (x^{0'})^2 - (x^{3'})^2 \\ &= (L_{00}x^0 + L_{03}x^3)^2 - (L_{30}x^0 + L_{33}x^3)^2 \\ &= (L_{00}^2 - L_{30}^2)(x^0)^2 + (L_{03}^2 - L_{33}^2)(x^3)^2 + 2(L_{00}L_{03} - L_{30}L_{33})x^0x^3. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$L_{00}^2 - L_{30}^2 = 1 \quad (6.45)$$

$$L_{03}^2 - L_{33}^2 = -1 \quad (6.46)$$

$$L_{00}L_{03} - L_{30}L_{33} = 0. \quad (6.47)$$

Wir haben somit 3 Gleichungen für 4 Unbekannte. Wir haben somit einen freien Parameter. Sei dieser  $y$ . Eine mögliche Lösung ist somit

$$L_{00} = L_{33} = \cosh y \quad (6.48)$$

$$L_{30} = L_{03} = -\sinh y. \quad (6.49)$$

---

<sup>1</sup>Diese Linearität der Transformation reflektiert die Homogenität des Raumes, was bedeutet, dass alle Raumzeitpunkte äquivalent sind. So dürfen z.B. die Resultate der Messung eines Längen- oder Zeitintervalls eines Ereignisses nicht davon abhängen, wo und wann ein solches Intervall in unserem Referenzsystem stattfindet.

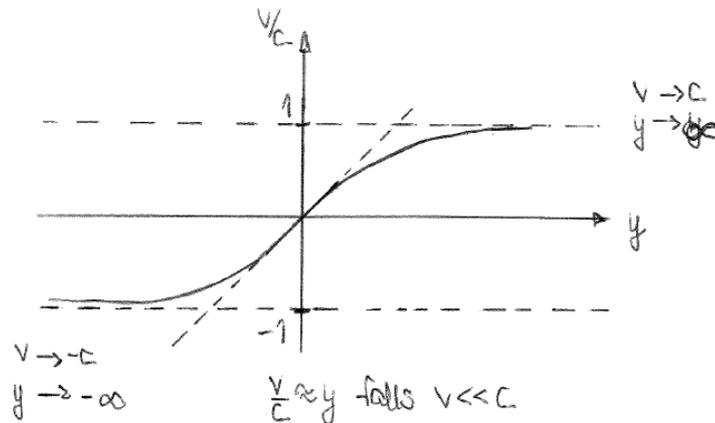


Abbildung 6.4: Die Rapidity  $y$ .

Das Vorzeichen wird ermittelt, indem der Grenzfall zur Galilei-Transformation ( $v \ll c$ ) gebildet wird. Somit erhalten wir also für die Lorentz-Transformationsmatrix

$$L = \begin{pmatrix} \cosh y & 0 & 0 & -\sinh y \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh y & 0 & 0 & \cosh y \end{pmatrix}. \tag{6.50}$$

Wir wollen nun den Zusammenhang zwischen  $y$  und der Geschwindigkeit  $v$  ermitteln. Betrachten wir hierzu die Bewegung des Ursprungs von  $\Sigma'$ . Nach der Zeit  $t$  hat er die Position  $x^3(t)$  im System  $\Sigma$ . Diese ist gegeben durch

$$x^3(t) = vt = \frac{v}{c} ct = \frac{v}{c} x^0. \tag{6.51}$$

Im System  $\Sigma'$  hingegen hat er offensichtlich die Position

$$x^{3'} = 0 = \cosh y x^3 - \sinh y x^0 = \left(\frac{v}{c} \cosh y - \sinh y\right) x^0. \tag{6.52}$$

Dies ist erfüllt für

$$\frac{\sinh y}{\cosh y} = \tanh y = \frac{v}{c}. \tag{6.53}$$

Man nennt  $y$  die *Rapidity* bzw. verallgemeinerte Geschwindigkeit. Die Rapidity ist in Fig. 6.4 dargestellt. Die Rapidity verhält sich folgendermaßen

$$y \rightarrow \infty \quad \text{für} \quad v \rightarrow c \tag{6.54}$$

$$y \rightarrow -\infty \quad \text{für} \quad v \rightarrow -c \tag{6.55}$$

$$y \approx \frac{v}{c} \quad \text{für} \quad v \ll c. \tag{6.56}$$

Weiterhin gilt mit

$$\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1 \Leftrightarrow \cosh^2 y (1 - \tanh^2 y) = 1 \Rightarrow \tag{6.57}$$

$$\cosh y = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{6.58}$$

sowie

$$\sinh y = \cosh y \tanh y = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \quad (6.59)$$

Gängige Abkürzungen sind

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \quad (6.60)$$

Damit haben wir also

$$\cosh y = \gamma \quad \text{und} \quad \sinh y = \gamma\beta . \quad (6.61)$$

Für  $L$  bekommen wir

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} . \quad (6.62)$$

Es ist, wie man sich leicht überzeugt,

$$L(-v)L(v) = \mathbf{1}_4 , \quad \text{also} \quad L(-v) = L^{-1}(v) . \quad (6.63)$$

Ferner ist

$$\det L = \gamma^2 - \gamma^2\beta^2 = \cosh^2 y - \sinh^2 y = 1 . \quad (6.64)$$

Bei der Lorentztransformation  $L$  handelt es sich um eine verallgemeinerte Drehung. Die Lorentz-Transformationsformeln sind für unseren betrachteten Fall gegeben durch:

$$x' = x \quad (6.65)$$

$$y' = y \quad (6.66)$$

$$z' = \gamma(z - \beta ct) \quad (6.67)$$

$$ct' = \gamma(ct - \beta z) . \quad (6.68)$$

### Bemerkungen:

1. Im Grenzfall  $v \ll c$  ergibt sich die Galilei-Transformation.
2. Die mögliche Maximalgeschwindigkeit ist  $c$ . Ansonsten wird die Wurzel imaginär.
3. Die inverse Lorentz-Transformation ist durch  $L^{-1} = L(v \rightarrow -v)$  gegeben. Dies ist klar, denn  $\Sigma$  bewegt sich von  $\Sigma'$  aus gesehen mit  $-v$  entlang der  $z$ -Achse.
4. Neben  $x^2 = (x^0)^2 - \vec{x}^2$  sind alle Quadrate von Minkowski-4er-Vektoren *invariant* unter Lorentz-Transformationen. Ebenso alle Skalarprodukte

$$x_\mu y^\mu = x \cdot y = x^0 y^0 - \vec{x} \vec{y} \quad \text{'Lorentz-Skalare'} . \quad (6.69)$$

5. Zur Notation: Griechische Indizes laufen über die Raum- und Zeitkomponenten, lateinische nur über die Raumkomponenten, also  $\mu = 0, 1, 2, 3$  und  $i = 1, 2, 3$ . Ferner bezeichnen  $i$  räumliche Komponenten, 0 zeitliche Komponenten.

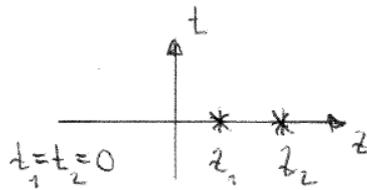


Abbildung 6.5: Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse.

### 6.4 Folgerungen aus der Lorentz-Transformation

Gleichzeitigkeit: Seien  $\Sigma$  und  $\Sigma'$  zwei Bezugssysteme, die sich relativ mit der Geschwindigkeit  $v$  in  $z$ -Richtung zueinander bewegen. Damit erhalten wir in  $\Sigma'$

$$z' = \gamma(z - \beta ct) \tag{6.70}$$

$$ct' = \gamma(ct - \beta z) . \tag{6.71}$$

In zwei verschiedenen Bezugssystemen  $\Sigma$  und  $\Sigma'$  vergeht die Zeit also unterschiedlich schnell. Was bedeutet dann Gleichzeitigkeit? Betrachten wir das System  $\Sigma$ , so bedeutet die Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse bei  $z_1$  und  $z_2$ , siehe Fig. 6.5, dass

$$t_1 = t_2 , \quad \text{also} \quad \Delta t = t_2 - t_1 = 0 . \tag{6.72}$$

In  $\Sigma'$  hingegen haben wir

$$ct'_1 = \gamma(ct_1 - \beta z_1) \quad \text{und} \quad ct'_2 = \gamma(ct_2 - \beta z_2) , \tag{6.73}$$

und damit ( $t_2 = t_1$ )

$$c\Delta t' = c(t'_2 - t'_1) = \gamma\beta(z_1 - z_2) \neq 0 . \tag{6.74}$$

Das Vorzeichen von  $\Delta t'$  hängt nur vom Vorzeichen von  $(z_1 - z_2)$  ab. Damit ist die Reihenfolge der Ereignisse variabel, siehe Fig. 6.6, und es stellt sich die Frage: Kann Ursache und Wirkung vertauscht werden? Kann die Kausalität verletzt werden? Betrachten wir zwei Ereignisse in  $\Sigma$ , für die gelten soll

$$t_2 > t_1 . \tag{6.75}$$

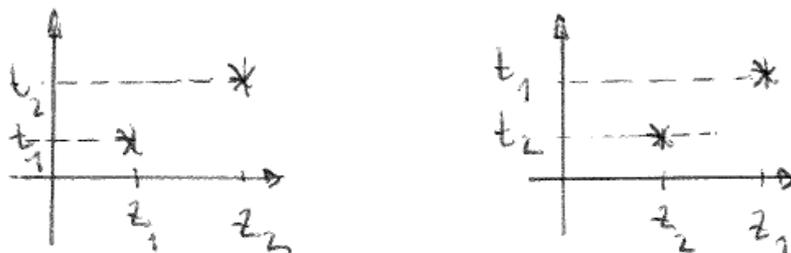


Abbildung 6.6: Zwei Ereignisse.

Damit haben wir in  $\Sigma'$  dann

$$c(t'_2 - t'_1) = \gamma(c(t_2 - t_1) - \beta(z_2 - z_1)) . \quad (6.76)$$

Wir haben  $(t'_2 - t'_1) > 0$  und damit einen kausalen Zusammenhang, wenn

$$\gamma(c(t_2 - t_1) - \beta(z_2 - z_1)) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (6.77)$$

$$c(t_2 - t_1) > \beta(z_2 - z_1) . \quad (6.78)$$

Da  $\beta \leq 1$ , gilt in jedem Fall

$$c(t_2 - t_1) \geq z_2 - z_1 , \quad (6.79)$$

falls  $t_2 \geq t_1$ , also Kausalität vorausgesetzt wird. Da wir

$$c\Delta t \geq \Delta z \quad (6.80)$$

haben, kann also ein Lichtsignal Informationen zwischen  $z_1$  und  $z_2$  übertragen, und die Kausalität bleibt erhalten ( $t'_2 > t'_1$ ). Falls aber

$$c\Delta t < \Delta z , \quad (6.81)$$

dann ist keine Informationsübertragung möglich. Die Punkte  $z_1$  und  $z_2$  liegen zu weit auseinander. Die Abfolge der Ereignisse kann umgekehrt werden, allerdings nur dann, wenn sie nicht kausal miteinander verknüpft sind. Die Form der Lorentz-Transformationen erzwingt also die Kausalität. Die Bezeichnung der verschiedenen Situationen für 4er-Vektoren  $x = (ct, \vec{x})$  ist

$$c^2t^2 > \vec{x}^2 \quad \text{“zeitartig”} \quad \text{und } x^2 > 0 \quad (6.82)$$

$$c^2t^2 < \vec{x}^2 \quad \text{“raumartig”} \quad \text{und } x^2 < 0 \quad (6.83)$$

$$c^2t^2 = \vec{x}^2 \quad \text{“lichtartig”} \quad \text{und } x^2 = 0 . \quad (6.84)$$

Betrachten wir die Frage möglicherweise kausaler Ereignisse nochmals anhand von Fig. 6.7. Im Zentrum steht ein Ereignis, welches sich im Ursprung des Raum-Zeit-Diagramms befindet. Die Gesamtheit der Ereignisse, die für dieses Ereignis Ursache hätten sein können, die sich also in der absoluten Vergangenheit befinden, sind auf einen *Vergangenheits-Lichtkegel* beschränkt. Dessen Einhüllende wird durch die Lichtgeschwindigkeit gebildet. Ein Ereignis *auf* der Oberfläche des Vergangenheits-Lichtkegels, in der Entfernung  $\Delta x = c\Delta t$ , kann nur dann eine Ursache sein, wenn Information mit Lichtgeschwindigkeit von dort zum Ursprung übertragen wurde. Ereignisse in der Vergangenheit, die sich *außerhalb* des Vergangenheits-Lichtkegels befinden, sind zu weit voneinander entfernt, um kausal miteinander verknüpft zu sein. Diese Region wird als Bereich *raumartiger Ereignisse* bezeichnet. Zum Zeitpunkt null verengt sich der Lichtkegel auf einen einzigen Punkt. Dies liegt daran, dass sich kein Ereignis, das irgendwo anders stattfindet, instantan auf ein Ereignis im Ursprung der Raumzeit auswirken kann. Innerhalb des *Zukunfts-Lichtkegels* liegen alle Ereignisse, die nicht zu weit entfernt sind, um durch Ereignisse am Ursprung der Raumzeit beeinflusst zu werden. Je weiter die Zeit voranschreitet, desto mehr weitet sich dieser Bereich natürlich aus.

Zeitdilatation: Wir betrachten im Inertialsystem  $\Sigma$  zwei Ereignisse, z.B. zwei Lichtblitze, die *am selben Ort*  $z$  aber zu unterschiedlichen Zeiten  $t_1$  und  $t_2$  stattfinden. Wir haben also

$$\Delta t = t_2 - t_1 \neq 0 . \quad (6.85)$$

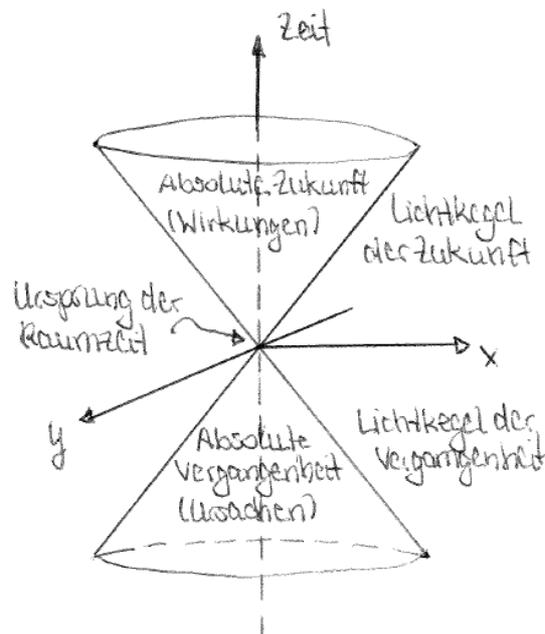


Abbildung 6.7: Lichtkegel der Zukunft und der Vergangenheit.

Im relativ dazu bewegten Inertialsystem  $\Sigma'$  erhalten wir mit der Lorentz-Transformation

$$ct'_1 = \gamma(ct_1 - \beta z) \quad \text{und} \quad ct'_2 = \gamma(ct_2 - \beta z), \quad \text{so dass} \quad (6.86)$$

$$t'_2 - t'_1 = \Delta t' = \gamma \Delta t = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Delta t. \quad (6.87)$$

Da  $\gamma > 1$  ist also die Zeit in  $\Sigma'$  gedehnt. Wir sprechen von *Zeitdilatation*. Dies wirkt zunächst paradox, ist es aber nicht, da sich auch  $z_1$  und  $z_2$  transformieren. So erhalten wir

$$z'_1 = \gamma(z - \beta ct_1) \quad \text{und} \quad z'_2 = \gamma(z - \beta ct_2), \quad \text{so dass} \quad (6.88)$$

$$z'_2 - z'_1 = \Delta z' = -\gamma \beta c \Delta t = -c \beta \Delta t' \neq 0. \quad (6.89)$$

In  $\Sigma$  findet das Ereignis an einem Ort statt und wird dort mit einer Uhr gemessen. In  $\Sigma'$  hingegen findet das Ereignis an zwei verschiedenen Orten statt. Es sind zwei Uhren notwendig, eine bei  $z'_1$  und eine andere bei  $z'_2$ , die miteinander synchronisiert werden müssen. Es findet also ein ganz anderer Messprozess statt. Wir nennen die Zeit, die in dem Bezugssystem verstreicht, in dem alle Ereignisse am selben Ort stattfinden, die *Eigenzeit*  $\Delta\tau$ . Also

$$\Delta t' = \gamma \Delta\tau. \quad (6.90)$$

Ein eindrucksvolles Beispiel für die Zeitdilatation ist der  $\mu$ -Zerfall. Myonen zerfallen in der Erdatmosphäre gemäß

$$\mu^\pm \rightarrow e^\pm + \nu_1 + \nu_2 \quad (6.91)$$

in Elektronen und Neutrinos. Ihre mittlere Lebensdauer beträgt  $2.2 \mu s$ . Damit sollten sie eigentlich nicht bis zur Erdoberfläche gelangen. Jedoch ist für den irdischen Beobachter die Zeit von der oberen Atmosphäre bis zur Erdoberfläche gleich der dilatierten Eigenzeit des

Myons.

Längenkontraktion: Wir betrachten im System  $\Sigma$  einen Stab der Länge  $l$  in Ruhe. Die Messung der Länge ergibt damit offenbar

$$l = z_2 - z_1 . \quad (6.92)$$

In  $\Sigma'$  haben wir

$$z'_1 = \gamma(z_1 - \beta ct_1) \quad \text{und} \quad z'_2 = \gamma(z_2 - \beta ct_2) . \quad (6.93)$$

In  $\Sigma'$  wird die Länge  $l'$  zu gleichen Zeiten  $t'_1$  und  $t'_2$  gemessen. Also

$$l' = z'_2 - z'_1 = \gamma(z_2 - z_1) - \gamma\beta c(t_2 - t_1) \quad (6.94)$$

und mit

$$ct'_1 = \gamma(ct_1 - \beta z_1) = ct'_2 = \gamma(ct_2 - \beta z_2) \quad (6.95)$$

haben wir ( $t'_1 = t'_2$ )

$$ct_1 - \beta z_1 = ct_2 - \beta z_2 \quad \Leftrightarrow \quad c(t_2 - t_1) = \beta(z_2 - z_1) . \quad (6.96)$$

Damit ist

$$l' = \gamma(z_2 - z_1) - \gamma\beta^2(z_2 - z_1) = \gamma(1 - \beta^2)(z_2 - z_1) = \frac{l}{\gamma} . \quad (6.97)$$

Wir finden somit

$$l' = \frac{l}{\gamma} < l . \quad (6.98)$$

Die im bewegten System gemessene Länge ist kürzer als die im Ruhesystem. Die Länge eines Objekts in einem Bezugssystem, in dem es sich in Ruhe befindet, wird Eigenlänge  $l_0$  genannt.

Die Messvorschrift 'Gleichzeitigkeit' hat Folgendes zur Konsequenz: Der ruhende Beobachter misst die Länge des Stabes, indem er gleichzeitig die beiden Enden  $z_1$  und  $z_2$  betrachtet. Die Information hierüber gelangt bei ihm gleichzeitig an. Wenn sich nun aber für den bewegten Beobachter der Stab relativ zu ihm bewegt, würde bei ihm wegen der Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit die Information über  $z'_1$  und  $z'_2$  nicht mehr gleichzeitig ankommen. Damit dies auch weiterhin der Fall ist, muss in  $\Sigma$  das Signal von dem Ende, das sich von ihm fortbewegt, früher ausgesandt werden, damit die Messung gleichzeitig stattfinden kann. Es kommt somit zur Verkürzung des Stabes, zur Längenkontraktion.

Das Paradoxon der Längenkontraktion entsteht, wenn die wechselseitige Längenkontraktion ohne Berücksichtigung der Relativität der Gleichzeitigkeit betrachtet wird. Zwei Ereignisse, die in einem Bezugssystem zwar an unterschiedlichen Orten, aber gleichzeitig eintreten, sind in einem zweiten, dazu bewegten Bezugssystem nicht mehr gleichzeitig.

Addition von Geschwindigkeiten: Wir stellen uns die Frage, welche Geschwindigkeit  $v_3$  sich ergibt, wenn eine Geschwindigkeit  $v_1$  um  $v_2$  geboostet wird. Um sie zu beantworten, vergleiche

chen wir zwei hintereinander ausgeführte boosts mit einem boost. Also

$$\begin{aligned}
 L(\beta_3) &= L(\beta_2) L(\beta_1) & (6.99) \\
 \begin{pmatrix} \gamma_3 & 0 & 0 & -\beta_3\gamma_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta_3\gamma_3 & 0 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma_2 & 0 & 0 & -\beta_2\gamma_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta_2\gamma_2 & 0 & 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & -\beta_1\gamma_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta_1\gamma_1 & 0 & 0 & \gamma_1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2(1 + \beta_1\beta_2) & 0 & 0 & -\gamma_1\gamma_2(\beta_1 + \beta_2) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma_1\gamma_2(\beta_1 + \beta_2) & 0 & 0 & \gamma_1\gamma_2(1 + \beta_1\beta_2) \end{pmatrix}. & (6.100)
 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$\gamma_3 = \gamma_1\gamma_2(1 + \beta_1\beta_2) \quad (6.101)$$

$$\beta_3\gamma_3 = \gamma_1\gamma_2(\beta_1 + \beta_2). \quad (6.102)$$

Und damit

$$\beta_3 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2}. \quad (6.103)$$

Wir erhalten z.B. für  $v_1 = v_2 = c/2$ , also  $\beta_1 = \beta_2 = 1/2$

$$\beta_3 = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4}{5}. \quad (6.104)$$

Wir betrachten den Extremfall der Lichtgeschwindigkeit, also  $\beta_1 = 1$ . Damit erhalten wir

$$\beta_3 = \frac{1 + \beta_2}{1 + \beta_2} = 1. \quad (6.105)$$

Und zwar unabhängig davon, wie sich das System 2 bewegt. Selbst für  $\beta_2 = -1$  erhalten wir  $\beta_3 = 1$ !

Betrachten wir die Rapiditäten. Wir haben

$$\gamma_3 = \cosh \eta_3 \quad (6.106)$$

$$\beta_3\gamma_3 = \sinh \eta_3 \quad (6.107)$$

und damit

$$\begin{aligned}
 \gamma_3 &= \cosh \eta_3 = \gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\beta_1\gamma_2\beta_2 = \cosh \eta_1 \cosh \eta_2 + \sinh \eta_1 \sinh \eta_2 \\
 &= \frac{1}{4}(e^{\eta_1} + e^{-\eta_1})(e^{\eta_2} + e^{-\eta_2}) + \frac{1}{4}(e^{\eta_1} - e^{-\eta_1})(e^{\eta_2} - e^{-\eta_2}) \\
 &= \frac{1}{4}(e^{\eta_1}e^{\eta_2} + e^{-\eta_1}e^{-\eta_2} + e^{\eta_1}e^{-\eta_2} + e^{-\eta_1}e^{\eta_2}) \\
 &\quad + \frac{1}{4}(e^{\eta_1}e^{\eta_2} + e^{-\eta_1}e^{-\eta_2} - e^{\eta_1}e^{-\eta_2} - e^{-\eta_1}e^{\eta_2}) \\
 &= \frac{1}{2}(e^{\eta_1}e^{\eta_2} + e^{-\eta_1}e^{-\eta_2}) \\
 &= \frac{1}{2}(e^{\eta_1+\eta_2} + e^{-(\eta_1+\eta_2)}) \\
 &= \cosh(\eta_1 + \eta_2). & (6.108)
 \end{aligned}$$

Analog findet man

$$\sinh \eta_3 = \sinh(\eta_1 + \eta_2) . \quad (6.109)$$

Die Rapditäten ( $\eta$ ) werden also einfach addiert. Dies liefert umso mehr einen Grund, die Rapditäten als verallgemeinerte Geschwindigkeiten zu sehen.

## 6.5 Relativistische Mechanik

Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit und die Lorentz-Invarianz der SRT ist nicht auf die Elektrodynamik beschränkt, sondern hat allgemeine Gültigkeit in der Physik. In diesem Abschnitt wollen wir uns damit beschäftigen, wie die Gesetze der Mechanik verändert werden müssen, um sie konsistent mit der Lorentz-Transformation zu machen.

### 6.5.1 Relativistische Geschwindigkeit

Zur Bestimmung der relativistischen Geschwindigkeit eines Teilchens betrachten wir das 'differentielle Ereignis'  $dx$ ,

$$dx = (cdt, dx^1, dx^2, dx^3) . \quad (6.110)$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned} (dx)^2 \equiv ds^2 &= c^2 dt^2 - (d\vec{x})^2 = c^2 dt^2 - \left( \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} \right) dt^2 \\ &= c^2 dt^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) . \end{aligned} \quad (6.111)$$

Wir erinnern uns, dass die *Eigenzeit* die Zeit ist, die in dem Bezugssystem verstreicht, in dem alle Ereignisse am selben Ort stattfinden. Dementsprechend definieren wir das *Eigenzeit-Intervall*  $d\tau$  als das Zeitintervall, das im Ruhesystem des Teilchens verstreicht, d.h.

$$d\tau = \frac{1}{c} ds . \quad (6.112)$$

Andererseits ist wegen Glg. (6.111)

$$d\tau = \frac{1}{\gamma} dt . \quad (6.113)$$

Damit ist also

$$t = \gamma \tau . \quad (6.114)$$

Wir definieren die relativistische 4er-Geschwindigkeit nun über die Eigenzeit  $d\tau$  des Teilchens. Dies macht Sinn, da die Eigenzeit ein Lorentz-Skalar ist. (Aus (6.112) folgt  $c^2 d\tau^2 = ds^2 \Leftrightarrow c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2$ .) Also ist die so definierte 4er-Geschwindigkeit ein kontravarianter 4er-Vektor,

$$\begin{aligned} u^\mu &\equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt} \\ &= \gamma \frac{d}{dt} (cdt, dx, dy, dz) = \gamma (c, \vec{v}) . \end{aligned} \quad (6.115)$$

Und das 4er-Geschwindigkeits-Produkt ist ein Lorentzskalar,

$$u^2 = u_\mu u^\mu = \gamma^2 (c^2 - \vec{v}^2) = \gamma^2 c^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = c^2 . \quad (6.116)$$

### 6.5.2 Verallgemeinerte Kraftgleichung

Für die verallgemeinerte Kraftgleichung machen wir folgenden Ansatz,

$$K^\mu = m \frac{du^\mu}{d\tau} . \quad (6.117)$$

Damit haben wir für die Raumkomponenten

$$\begin{aligned} K^i &= m \frac{d}{d\tau} u^i = m\gamma \frac{d}{dt} \gamma v^i = \gamma \frac{d}{dt} (m\gamma v^i) \\ &= \gamma \frac{d}{dt} p^i . \end{aligned} \quad (6.118)$$

Wir definieren hierüber also den relativistischen Impuls  $p^i$ . Damit haben wir also verallgemeinert (nicht-relativistisch  $\equiv$  n.r.)

$$p^i = \gamma m v^i \xrightarrow{\text{n.r.}} m v^i \quad (6.119)$$

$$K^i = \gamma F^i \xrightarrow{\text{n.r.}} F_{\text{n.r.}}^i . \quad (6.120)$$

Die Frage ist, was  $K_0$  bedeutet. Wir betrachten hierzu

$$\begin{aligned} K^\mu u_\mu &= K^0 u^0 - \vec{K} \vec{u} = \left( m \frac{d}{d\tau} u^0 \right) u^0 - \left( m \frac{d}{d\tau} \vec{u} \right) \vec{u} \\ &= \frac{1}{2} m \frac{d}{d\tau} (u^0 u^0 - \vec{u} \vec{u}) = \frac{1}{2} m \frac{d}{d\tau} u^2 = \frac{1}{2} m \frac{d}{d\tau} c^2 = 0 . \end{aligned} \quad (6.121)$$

Daraus folgt

$$K^0 u^0 = \vec{K} \vec{u} \Leftrightarrow K^0 \gamma c = \gamma^2 \vec{F} \vec{v} \Rightarrow K^0 = \gamma \frac{\vec{F} \vec{v}}{c} . \quad (6.122)$$

Wir haben also somit für die verallgemeinerte 4er-Kraft

$$K^\mu = \gamma \left( \frac{\vec{F} \vec{v}}{c}, \vec{F} \right) . \quad (6.123)$$

Betrachten wir die Nullkomponente der Minkowski-Kraft genauer:

$$\gamma \frac{\vec{F} \vec{v}}{c} = m \frac{d}{d\tau} u^0 = m\gamma \frac{d}{dt} \gamma c \Rightarrow \vec{F} \vec{v} = \frac{d}{dt} \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} . \quad (6.124)$$

Bei  $|\vec{F} \vec{v}|$  handelt es sich um die Arbeit pro Zeit. Also

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt} T_r , \quad (6.125)$$

wobei wir mit  $T_r$  die relativistische kinetische Energie bezeichnen. Also ist

$$T_r = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m c^2 . \quad (6.126)$$

Mit

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \stackrel{v \ll c}{\approx} 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \quad (6.127)$$

erhalten wir für  $v \ll c$

$$T_r \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots \quad (6.128)$$

Beim 2. Term handelt es sich um die bekannte kinetische Energie. Der erste Term hingegen bezeichnet die Ruheenergie des Teilchens. Man beachte, dass die Energie ohnehin nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist. Dies ist hier die Ruheenergie des Teilchens mit der Ruhemasse  $m$ ,

$$E_0 = mc^2 . \quad (6.129)$$

### 6.5.3 Der Vierer-Impuls

Wir definieren den Viererimpuls über die Vierer-Geschwindigkeit und die Ruhemasse,

$$p^\mu = mu^\mu = m\gamma(c, \vec{v}) = (\gamma mc, \gamma m\vec{v}) = (\text{kin. Energie}/c, \text{Impuls}) = (E/c, \vec{p}) . \quad (6.130)$$

D.h. genauso wie wir eine Zeit-Raum Beziehung haben, haben wir hier eine Energie-Impuls Beziehung. Und für den Lorentz-Skalar finden wir

$$\begin{aligned} p^\mu p_\mu &= p^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \\ &= m^2 u^2 = m^2 c^2 = \text{konstant} . \end{aligned} \quad (6.131)$$

Da nun  $p^2$  ein Lorentz-Skalar ist und auch  $c^2$ , folgt daraus, dass auch die Masse  $m$  ein Lorentz-Skalar ist. Wir haben also den relativistischen Energiesatz

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2} . \quad (6.132)$$

Für kleine Geschwindigkeiten haben wir

$$\begin{aligned} E &= mc^2 \sqrt{1 + \frac{\vec{p}^2}{m^2 c^2}} \approx mc^2 \left( 1 + \frac{m^2 \vec{v}^2}{2m^2 c^2} + \dots \right) \\ &= \underbrace{mc^2}_{\text{Ruheenergie}} + \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{kinetische Energie}} + \dots \end{aligned} \quad (6.133)$$

Wir finden also wiederum für die Ruheenergie eines Teilchens

$$E_0 = mc^2 , \quad (6.134)$$

mit der Ruhemasse  $m$ . Das heißt, dass die Masse eine Form von Energie ist! Diese kann beträchtlich sein. Siehe z.B. die bei einer Kernspaltung frei werdende Energie! Beachte, dass die Energie  $E$  in Glg. (6.133) für  $m > 0$  im Fall  $v \rightarrow c$  gegen unendlich geht. D.h., dass Teilchen mit nicht-verschwindender Ruhemasse sich langsamer als das Licht bewegen.

## 6.6 Zusammenfassung einiger wichtiger Relationen

Vierervektor: Ein Vierervektor ist ein 4-komponentiger Vektor  $x^\mu$  oder  $x_\mu$ , der sich unter einer Lorentzstransformation  $L^\mu_\nu$  ( $= 4 \times 4$  Matrix) transformiert gemäß

$$x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu . \quad (6.135)$$

Er besteht aus einer Zeitkomponente (Index 0) und drei Raumkomponenten (Indizes 1,2,3).

Notation: griechische Indizes  $\mu = 0, 1, 2, 3$ ; lateinische Indizes nur Raumkomponenten, also  $i = 1, 2, 3$ . Mit

$$x^\mu \begin{pmatrix} ct \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (6.136)$$

ist also  $x^0 = ct$ , und die Raumkomponenten sind die  $x^i$ . Sie bilden den 3-er Vektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} . \quad (6.137)$$

Damit ist also

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} . \quad (6.138)$$

Der kontravariante Vierervektor ist definiert als

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} . \quad (6.139)$$

Der kovariante Vierervektor ist definiert als

$$x_\mu = \begin{pmatrix} ct \\ -\vec{x} \end{pmatrix} . \quad (6.140)$$

Mit Hilfe des metrischen Tensors

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (6.141)$$

können Indizes nach oben und nach unten gezogen werden. So ist z.B. (über doppelt auftretende Indizes wird summiert - Einsteinsche Summenregel)

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu , \quad x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu . \quad (6.142)$$

Die Anwendung des metrischen Tensors ändert das Vorzeichen in den Raumkomponenten. Also z.B.

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_\nu = g_{\nu\mu} x^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} . \quad (6.143)$$

Analog

$$x_\mu = \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \text{ und } x^\nu = g^{\nu\mu} x_\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (6.144)$$

Beachte, dass

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}. \quad (6.145)$$

Das Vierervektor-Produkt ist definiert als das Produkt zwischen einem kontra- und einem kovarianten Vektor. Also z.B.

$$x^2 \equiv x_\mu x^\mu = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (6.146)$$

da

$$\begin{aligned} x_\mu x^\mu &= x^\mu x_\mu = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = (ct)^2 - \vec{x}^2. \end{aligned} \quad (6.147)$$

Ebenso

$$\begin{aligned} x_\mu y^\mu &= x^\mu y_\mu = x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} \\ &= x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 = x^0 y^0 - \vec{x} \vec{y}. \end{aligned} \quad (6.148)$$

Für einen boost in  $z$ -Richtung ist die Lorentz-Transformation gegeben durch

$$L^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}. \quad (6.149)$$

Also ist

$$x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma ct - \beta\gamma z \\ x \\ y \\ -\gamma\beta ct + \gamma z \end{pmatrix}. \quad (6.150)$$

Also

$$ct' = \gamma(ct - \beta z), \quad x' = x, \quad y' = y, \quad z' = \gamma(z - \beta ct). \quad (6.151)$$

Folgerungen aus der Lorentz-Transformation:

Zeitdilatation:

$$\Delta t' = \gamma \Delta \tau . \quad (6.152)$$

$\Delta \tau$  ist die Eigenzeit. Dies ist die Zeit, die in einem Bezugssystem verstreicht, in dem alle Ereignisse am selben Ort stattfinden.

Längenkontraktion:

$$l' = \frac{l_0}{\gamma} . \quad (6.153)$$

Es ist  $l_0$  die Eigenlänge. Dies ist die Länge eines Objekts in einem Bezugssystem, in dem es sich in Ruhe befindet.

Die Eigenzeit  $\tau = t/\gamma$  ist ein Lorentz-Skalar (= invariant unter Lorentz-Transformation).

Relativistische Geschwindigkeitsaddition:

$$\beta_3 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2} \quad (6.154)$$

oder

$$\cosh \eta_3 = \cosh(\eta_1 + \eta_2) . \quad (6.155)$$

Relativistische Mechanik:

Relativistische Geschwindigkeit:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma(c, \vec{v}) . \quad (6.156)$$

Dies ist ein Vierervektor. Wir haben

$$u^2 \equiv u_\mu u^\mu = \gamma^2(c^2 - v^2) = c^2 . \quad (6.157)$$

Das Produkt zweier Vierer-Geschwindigkeitsvektoren ist ein Lorentz-Skalar, wie es sein soll.

Relativistischer Impuls:

$$p^\mu = mu^\mu = (\gamma mc, \gamma m \vec{v}) = (E/c, \gamma m \vec{v}) . \quad (6.158)$$

Bei  $E$  handelt es sich um die Gesamtenergie des Teilchens. Bei  $m$  handelt es sich um die Ruhemasse. Sie wird oft auch  $m_0$  genannt. Die Gesamtenergie eines Teilchens ist

$$E = \gamma m c^2 \stackrel{v/c \ll 1}{\approx} m c^2 + \frac{1}{2} m v^2 . \quad (6.159)$$

Bei dem ersten Term auf der rechten Seite handelt es sich um die Ruheenergie des Teilchens. Beim zweiten Term handelt es sich um die kinetische Energie des Teilchens. Wir haben

$$p^2 = p_\mu p^\mu = m^2 u_\mu u^\mu = m^2 c^2 . \quad (6.160)$$

Ebenso ist aber auch

$$p^2 = p^0 p^0 - \vec{p} \vec{p} = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 . \quad (6.161)$$

Gleichsetzen von Glg. (6.160) und (6.161) liefert dann

$$\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2 \quad (6.162)$$

und damit also

$$E^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2 \quad \text{bzw.} \quad E = \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2} . \quad (6.163)$$

Relativistische Kraft:

$$K^\mu = m \frac{du^\mu}{d\tau} = \gamma \begin{pmatrix} \frac{\vec{F}\vec{v}}{c} \\ \vec{F} \end{pmatrix} , \quad (6.164)$$

wobei  $\vec{F}$  die relativistische Kraft ist,

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\gamma\vec{v}) = \frac{d}{dt}\vec{p} . \quad (6.165)$$

Bei  $\vec{p} = m\gamma\vec{v}$  handelt es sich um den relativistischen Impuls. Es ist

$$\vec{F}\vec{v} = \frac{d}{dt}(\gamma mc^2) = \frac{d}{dt}E . \quad (6.166)$$