Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: PD Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. Cody B Duncan

Übungsblatt 0

Besprechung: Di. 26.04.2022

Bearbeitung der Übungsblätter

Zur Vorbereitung auf die Klausur wird die Bearbeitung der Übungsblätter dringend empfohlen, auch wenn die Sonne scheint, die Temperaturen steigen und die Corona-Maßnahmen gelockert werden können.

Dieses Blatt 0 soll Ihnen mathematisch notwendige Begrifflichkeiten wieder nahe bringen. Die moderne Physik benötigt Differentiation und Integration, Reihenentwicklungen, Differentialgleichungen, komplexe Zahlen, lineare Algebra und mehr. Um die zugrunde liegende Physik zu verstehen, ist es sehr hilfreich, wenn Sie das mathematische Handwerkzeug präsent haben.

Aufgabe 1: Differenzieren

Bestimmen Sie die Ableitungen der Funktionen, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$, nach x:

1. $f(x) = \tan(x^a) + \sin(bx + c)$
2. $f(x) = \ln(1 - x^2)$
3. $f(x) = x^x$
4. $f(x) = (5 - 2x + x^2)^{1/3}$

Aufgabe 2: Integrieren

1. Bestimmen Sie die Stammfunktion (das unbestimmte Integral) $F(x)$ zu folgender Funktion;

$$f(x) = \frac{x^4 + 2x^3 + 1}{x}$$

2. Bestimmen Sie außerdem die folgenden bestimmten Integrale:
   (a) $F = \int_1^2 \mathrm{d}x \ln(x) \int_{\ln(x)}^{\infty} \mathrm{d}y e^{-y}$,
   (b) $F(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x x e^{-ax^2}$ für $a > 0$,
   (c) $F(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x x^2 e^{-ax^2}$ für $a > 0$,
   Hinweis: Verwenden Sie das Gauß'sche Integral $F(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x e^{-ax^2} = \sqrt{\pi/a}$ für $a > 0$

Aufgabe 3: Kurvendiskussion

Berechnen Sie die lokalen Extrema (Minimum und Maximum) der Funktion $g(x)$:

$$g(x) = 4x^3 - x^2 + 2$$

Aufgabe 4: Taylor-Entwicklung

Die Taylor-Entwicklung ist ein sehr hilfreiches Werkzeug, um komplizierte Funktionen in eine einfache Polynomreihe zu entwickeln. Dabei lautet die Vorschrift für die *n-te Ordnung* um die Entwicklungsstelle x_0 der Funktion $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left. \frac{\mathrm{d}^k f(x)}{\mathrm{d}x^k} \right|_{x=x_0} \big(x - x_0\big)^k + \mathcal{O}(x^n),$$

wobei $\mathcal{O}(x^n)$ das Restglied der Entwicklung angibt. Bestimmen Sie die Taylorreihen bis zur dritten Ordnung ($k = 2$) um $x_0 = 0$ der folgenden Funktionen:

1. $f(x) = e^{-x}$
2. Taylor expand the acceleration of a body with mass m close to the surface of the earth: $F(r) = -GmM_E\frac{1}{r^2}$

Aufgabe 5: Eigenwerte und Eigenvektoren

Die Eigenwertgleichung einer quadratischen $n \times n$-Matrix $\mathbf{M}$ lautet $\mathbf{M}\vec{x} = \lambda\vec{x}$, wobei der n-Vektor $\vec{x}$ einen möglichen Eigenvektor und der Skalar λ einen zugehörigen Eigenwert bezeichnen. Die Lösungen für λ ergeben sich durch das Nullsetzen des charakteristischen Polynoms:

$$\det\big(\mathbf{M} - \lambda\mathbb{1}\big) = 0,$$

wobei $\mathbb{1}$ die n-dimensionale Einheitsmatrix ist. Bestimmen Sie die Eigenwerte, und falls möglich die Eigenvektoren, zu folgender 3×3-Matrix $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6: Drehungen

Eine Drehung um den Winkel ϕ in der Ebene im $\mathbb{R}^2$ ist gegeben durch eine Matrix:

$$\mathbf{R}_2(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}, \qquad \phi \in [0, 2\pi).$$

Zeigen Sie, dass:

1. die Drehmatrizen kommutieren, $\mathbf{R}_2(\phi_1)\mathbf{R}_2(\phi_2) = \mathbf{R}_2(\phi_2)\mathbf{R}_2(\phi_1)$,
2. das Produkt $\mathbf{R}_2(\phi_1)\mathbf{R}_2(\phi_2)$ wieder zu einer Drehmatrix $\mathbf{R}_2(\phi_1 + \phi_2)$ führt,
3. $\det(\mathbf{R}_2(\phi)) = 1$.