

Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: PD Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. Cody B Duncan

Übungsblatt 1

Besprechung: Di. 03.05.2022

Aufgabe 1: Komplexe Zahlen - Einführung Im Folgenden wiederholen wir kurz die Grundlagen von komplexen Zahlen und ihre möglichen Darstellungen.

Eine komplexe Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit Realteil $\operatorname{Re}(z) = x$, Imaginärteil $\operatorname{Im}(z) = y$ und $i^2 = -1$ kann äquivalent in der exponentiellen Schreibweise $z = r \exp(i\phi) = r(\cos \phi + i \sin \phi)$ dargestellt werden. Dabei gelten die Relationen ($r \in \mathbb{R}^+, \phi \in [0, 2\pi)$):

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\arg(z) = \phi = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right) = \begin{cases} \phi' & \text{für } \phi' \geq 0 \\ \phi' + 2\pi & \text{für } \phi' < 0 \end{cases}$$

1. Vervollständigen Sie die Tabelle:

$z = x + iy$	$1 + i$	$3 - 4i$	$-3 + 2i$			$5 - \dots i$	$\dots - i$
$r = z $				2	2	13	
$\phi = \arg(z)$				3π	$-\pi/3$		$5\pi/4$

2. Lösen Sie die nachfolgenden Gleichungen sowohl im Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als auch im Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$:

$$|z_1|^2 = 1,$$

$$z_2^2 - 4z_2 + 5 = 0.$$

3. Zeigen Sie mit Hilfe der Eulerschen Formel $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$ die folgenden Identitäten:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin x \cos y + \cos x \sin y = \sin(x + y)$$

4. Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$A = \left(\frac{5+z}{5-z}\right)^2 \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Es ist die Gleichung $\operatorname{Im}(A) = 0$ zu lösen. Dazu sollte der Nenner durch Erweitern mit dem komplex Konjugierten reell gemacht werden und dann die Polarform für benutzt werden.

Aufgabe 2: Bahnkurven

Bewegung eines Körpers/Teilchens im Raum als Funktion der Zeit t lassen sich durch Bahnkurven $\vec{r}(t)$ darstellen. Die Geschwindigkeit und Beschleunigung lassen sich als Ableitungen nach der Zeit ermitteln. Wir betrachten drei einfache Beispiele.

1. Eine Raumkurve werde durch die Parameterdarstellung:

$$\vec{r}(t) = (a \cos \omega t, b \sin \omega t)$$

mit $a, b > 0$ beschrieben. Skizzieren Sie die Kurve $\vec{r}(t)$.

2. Eine Bahnkurve werde beschrieben durch die Parameterdarstellung:

$$\vec{r}(t) = (a \cos \omega t, a \sin \omega t, ct), \quad \text{mit } a, c > 0$$

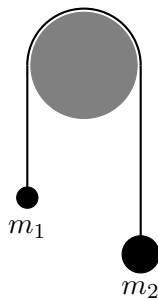
- (a) Skizzieren Sie die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ als Funktion des eindimensionalen Parameters t .
 - (b) Wie groß ist der Abstand $h = z_2 - z_1$ zweier in z -Richtung direkt über einanderliegender Punkte $(a, 0, z_1)$ und $(a, 0, z_2)$, wobei $z_2 > z_1$?
3. Es sei nun der Ortsvektor $\vec{r}(t)$ eines Teilchens auf einer Kreisbahn mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω gegeben durch:

$$\vec{r}(t) = (r \cos \omega t, r \sin \omega t, 0)$$

- (a) Berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$ und den Beschleunigungsvektor $\vec{a} = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$.
- (b) Skizzieren Sie die Kreisbahn des Teilchens und diskutieren Sie, in welche Richtung $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ und $\vec{a}(t)$ relativ zum Bahnverlauf zeigen.
- (c) Nehmen Sie nun an, das Teilchen sei ein Satellit der Masse m_s und umkreise die Erde mit Masse m_E in einer Entfernung r_s . Berechnen Sie dessen Geschwindigkeit $v = |\vec{v}|$, wobei für die Gravitationskraft gilt $\vec{F}(\vec{r}) = -Gm_s m_E \vec{r}/r^3$ und G die Newton'sche Gravitationskonstante bezeichnet. *Hinweis:* Lex secunda.

Aufgabe 3: Bewegungsgleichungen durch Lagrange - Atwood'sche Fallmaschine

Im dreidimensionalen Raum im Schwerfeld der Erde mit Beschleunigung g ist im Ursprung eine frei drehbare Rolle befestigt. Über diese läuft eine Schnur mit fester Länge l , die zwei Massen m_1 an Position z_1 und m_2 an Position z_2 verbindet, die sich in nur z -Richtung frei bewegen können. Somit können Sie die x - und y -Richtung vernachlässigen.



1. Welche Zwangsbedingungen gibt es? Finden Sie passende generalisierte Koordinaten für die verbleibenden Freiheitsgrade.
2. Stellen Sie die Lagrange-Funktion auf, indem Sie zuvor folgende Schritte ausführen:
 - (a) Beginnen Sie mit dem Potential V des Gesamtsystems (beide Massen). Das Potential einer Masse m im Schwerfeld ist gegeben durch $V = -mgz$.
 - (b) Berechnen Sie nun die kinetische Gesamtenergie T des Systems.
3. Bestimmen Sie nun die Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen.