Moderne Physik für Informatiker

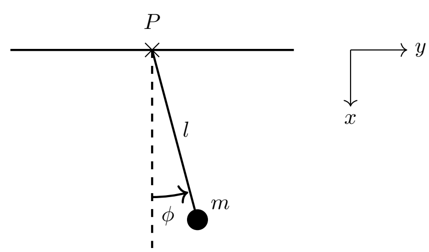
Vorlesung: PD Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. Cody B Duncan

Übungsblatt 2

Besprechung: Di. 10.05.2022

Aufgabe 1: Fadenpandel

Betrachten Sie ein ebenes Fadenpendel der Fadenlänge l im homogenen Schwerefeld. Es sollen nur *kleine Ausschläge* des Pendels diskutiert werden.



1. Stellen Sie die Lagrange-Funktion und ihre Bewegungsgleichung auf. Wählen Sie die Anfangsbedingungen so, dass zur Zeit $t = 0$ das Pendel durch seine Ruhelage schwingt. Wie großist die Frequenz ω_0 der Pendelschwingung?

   Hinweis: Die allgemeine Lösung für die folgende Gleichung:

   $$\ddot{f}(t) + \omega^2 f(t) = 0$$

   ist:

   $$f(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$

2. Berechnen Sie die Fadenspannung.

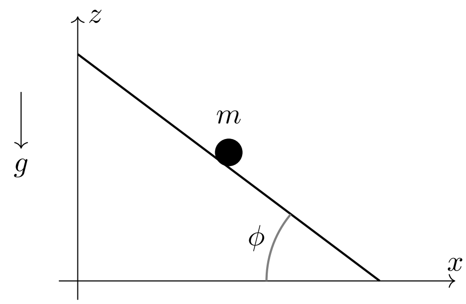
Aufgabe 2: Beschleunigte schiefe Ebene

Ein Massepunkt mit den Koordinaten (x, z) gleitet reibungsfrei auf einer schiefen Ebene. Die Neigung α der schiefen Ebene sei konstant.

1. Finden Sie die Zwangsbedingung $A(x, z, t) = 0$. Ist diese Zwangsbedingung holonom, skleronom, oder rhenom?

2. Berechnen Sie nun die Zwangskraft komponentenweise ($i = x, z$) mittels:

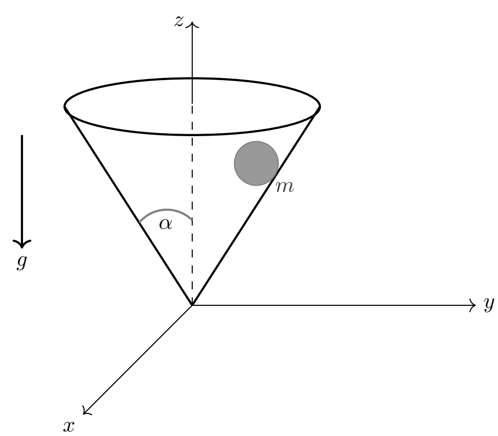
   $$Z_i(x, z, t) = \lambda \frac{\partial A(x, z, t)}{\partial x_i}$$



3. Stellen Sie nun die Lagrangegleichungen 1. Art für den Massepunkt auf. Nehmen Sie dabei an, dass die Schwerkraft $F = -mg$ in $z-$Richtung auf die Masse wikrt.
   - Um die λ zu bestimmen, differenzieren Sie die Zwangsbedingung $A(x, z, t)$ zweimal nach der Zeit und setzen Sie diese dann in die vorher bestimmte Bewegungsgleichung ein.
4. Lösen Sie nun die Bewegungsgleichungen. Beginnen Sie mit $x(t)$ (mit Randbedingungen: $\dot{x}(t = 0) = v_0$, und $x(t = 0) = x_0$) und verwenden Sie dann die Zwangsbedingung, um $z(t)$ zu bestimmen.

Aufgabe 3: Punktmasse im Kreiskegel

Eine Punktmasse m rollt reibungsfrei auf der Innenseite eines Kreiskegels (Öffnungswinkel α) im Schwerefeld der Erde.



1. Formulieren Sie die Zwangsbedingung und wählen Sie passende generalisierte Koordinaten.
2. Geben Sie die Lagrange-Funktion an und stellen Sie die Bewegungsgleichungen (2. Art) auf.
3. Welche Koordinate ist zyklisch? Geben Sie den zugehörigen Erhaltungssatz an!

Aufgabe 4: Newton Mechanik - Raketenstart

Im Folgenden möchten wir einen Raketenstart bzw. die Trajektorie einer startenden Rakete beschreiben. Dabei soll die Rakete senkrecht nach oben starten ($z(t = 0) = 0 = \dot{z}(t = 0) = 0$), und das Gravitationsfeld der Erde als homogen betrachtet werden. Die Rakete nutzt einen Rückstoßantrieb aus, bei dem kleine Teilchen mit einer konstaten Geschwindigkeit $v_g > 0$ relativ zur Rakete nach hinten ausgestoßen werden, um damit Schub zu erzeugen.

1. Leiten Sie die Bewegungsgleichung der Rakete mit Hilfe der Impulserhaltung und den Newtonschen Axiomen her. Betrachten Sie dazu den Impuls der Rakete (Masse $M(t)$) bevor, und den Impuls des Systems nachdem ein Teilchen der Masse $m_t = -\Delta m > 0$ ausgestoßen wurde. Zeigen Sie, dass die resultierende Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{z}(t) = -v_g \frac{\dot{m}(t)}{M(t)} - g,$$

wobei $\dot{m} = \mathrm{d}m/\mathrm{d}t$ die Rate der Massenabnahme der Rakete beschreibt.

2. Die Masse der Rakete $M(t) = M_0 + m(t)$ setzt sich aus dem konstanten Teil M_0 und der Treibstoffmenge $m(t)$ zusammen. Nehmen Sie an, die Rate der Massenabnahme sei konstant $\dot{m} = -m_0/\tau$, wobei m_0 die anfängliche Treibstoffmenge beschreibt und τ den Brennschluss. Bestimmen Sie $m(t)$ und den Zeitpunkt an dem aller Treibstoff verbrannt ist. Zeigen Sie nun, dass die Bewegungsgleichung der Rakete folgende Form besitzt,

$$\ddot{z}(t) = \frac{v_g}{\mu\tau - t} - g$$

3. Bestimmen Sie die Geschwingkeit und die Trajektorie der Rakete als Funktion der Zeit.

4. Finden Sie eine Bedingung für einen erfolgreichen Start der Rakete. *Hinweis: Entwicklen Sie die Geschwindigkeit für kleine Zeiten $t \ll \tau$.*