Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: PD Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. Cody B Duncan

Übungsblatt 3

Besprechung: Di. 17.05.2022

Aufgabe 1: Bewegung im kugelsymmetrischen Potential

Die Bewegung eines Teilchens in einem kugelsymmetrischen Potential V soll mittels Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) beschrieben werden. Diese sind gegeben durch

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\phi\sin\theta \\ r\sin\phi\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

1. Ermitteln Sie zunächst die kinetische Energie $T = m\dot{\mathbf{x}}^2$ des Teilchens in Kugelkoordinaten. Hierzu führen Sie die folgende Schritte aus:

   (a) Bestimmen Sie die Richtungsvektoren $\mathbf{k}_{q_i}$ für die Kugelkoordinaten $q_i = (r, \theta, \phi)$ mittels $\mathbf{k}_{q_i} = \partial\mathbf{x}/\partial q_i$ und bilden Sie die zugehörigen normierten Einheitsvektoren $\mathbf{e}_{q_i} = \mathbf{k}_{q_i}/|\mathbf{k}_{q_i}|$.

   (b) Zeigen Sie, dass sie

   $$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial q_i}$$

   mit Hilfe der Einheitsvektoren schreiben können als:

   $$\dot{\mathbf{x}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi$$

   (c) Berechnen Sie nun die kinetische Energie T in Kugelkoordinaten. Sie können hierbei die Orthonormalität der Einheitsvektoren nutzen.

2. Bilden Sie die Lagrangefunktion L für ein Teilchen mit Masse m im kugelsymmetrischen Potential $V = V(r, t)$:

   (a) Welche Koordinate $q_i = (r, \theta, \phi)$ ist zyklisch?

   (b) Ermitteln Sie den dazugehörigen zeitlich konstanten verallgemeinerten Impuls $p_\beta = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta}$

Aufgabe 2: Variationsrechnung - Kürzester Weg auf Zylindermantel

Wie in der Vorlesung motiviert ist die Lagrange-Mechanik eng verknüpft mit dem Variationsprinzip, welches erlaubt für viele mathematische Problemstellungen extremale Lösungen zu ermitteln. In der Vorlesung war dies z.B. die kürzeste Verbindung zweier Punkte. Wir wiederholen diese Aufgabe auf einem Zylindermantel, um gleichzeitig verschiedene Koordinatensystem kennenzulernen.

1. Nutzen Sie Zylinderkoordinaten in der Form $\mathbf{r} = (x, y, z) = (R\cos\phi, R\sin\phi, z)$ und drücken Sie ein Wegelement $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}$ durch Zylinderkoordinaten aus. Zeigen Sie so, dass der Weg zwischen den Punkten A und B gegeben ist durch:

$$S = \int_A^B \mathrm{d}s = \int_A^B \mathrm{d}z \sqrt{R^2\phi'(z)^2 + 1}$$

   Hinweis: Sie brauchen Elemente der in der Übung schonmal angesprochenen Jacobi-Matrix. Der Radius R sei konstant. Somit ist $\mathrm{d}R = 0$.

2. Finden Sie den minimalen Weg S. Nutzen Sie für den Integranden die Euler-Lagrange-Gleichungen und zeigen Sie, dass dies auf eine Gerade auf dem (ausgerollten) Zylinder-mantel führt.

Aufgabe 3: Funktional-Extrema und ein Hochspannungskabel

1. Gesucht sei die Funktion $y(x)$, für die das Funktional

$$J\{y(x)\} = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x f(x, y, y')$$

   extremal wird. Zeigen Sie, dass für den Fall, dass f nicht explizit von x abhängt ($f = f(y, y')$), die Lösung

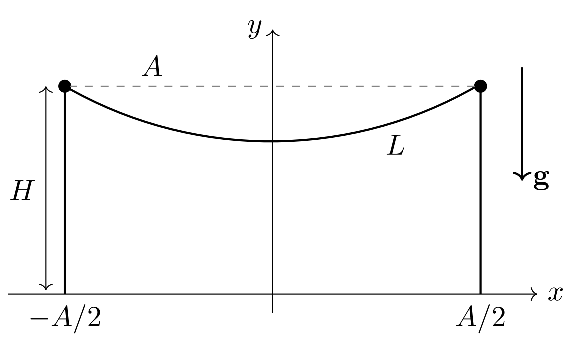
$$f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} = \text{const.}$$

   befolgt.

2. Ein Hochspannungskabel hänge zwischen zwei Masten der Höhe H im Abstand A und besitze eine konstante Massendichte

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}s} = \alpha = \text{const.}$$

   wobei $\mathrm{d}s$ den Linienelement des Kabels ist. Aufgrund der Schwerkraft ($\propto \mathbf{g}$) tendiert das Kabel dazu durchzuhängen. Wäre die Kabellänge L gerade gleich dem Mastenabstand A, so würden starke Seitenspannungen auf die beiden Masten wirken, wodurch das System gegenüber weiteren Belastungen, z.B. durch äußere Witterungsbedingungen, instabil würde. Man wird also vorneherein $L > A$ zu wählen haben.

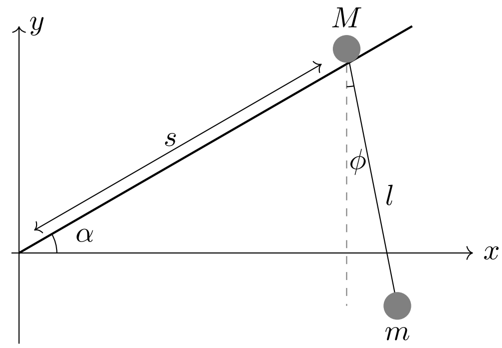


   (a) Welche Kurvenform $y(x)$ wird das Kabel bei gegebenem $L > A$ einnehmen, wenn man davon ausgeht, dass diese minimaler potentieller Energie entspricht?

   (b) Wie bestimmt sich die optimale Kabellänge?

Aufgabe 4: Ein gekoppeltes System

Ein Block der Masse M gleite reibungsfrei unter dem Einfluss der Schwerkraft auf einer schiefen Ebene mit Neigungswinkel α gegen die Horizontale. An seinem Schwerpunkt sei die Masse m über einen masselosen Faden der Länge l befestigt.



1. Wie lautet die Lagrange-Funktion $L(\phi, s, \dot{\phi}, \dot{s})$?

2. Zeigen Sie, dass eine Lösung $\phi(t) = \phi_0 = \text{const}$ existiert.

3. Geben Sie eine geschlossene Differentialgleichung für ϕ an. Lösen Sie diese für $M \gg m$ und kleine Winkelausschläge ($\phi \approx \alpha$).