Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: PD Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. Cody B Duncan

Übungsblatt 4

Besprechung: Di. 24.05.2022

Aufgabe 1: Hamilton Formalismus

Für ein Punktteilchen mit der kinetischen und der potentiellen Energie T bzw. V sind die Lagrange- und die Hamiltonfunktion gegeben durch

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q}) \quad \text{bzw.} \quad H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = T(\mathbf{p}) + V(\mathbf{q})$$

Durch $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$ und $\mathbf{p}$ sind jeweils die generalisierten Koordinaten, Geschwindigkeiten bzw. Impulse des Punktteilchens definiert. Die potentielle Energie sei beliebig ungleich Null. Die kinetische Energie ist wie üblich gegeben durch $T(\mathbf{q}) = m\dot{\mathbf{q}}^2/2$. Die Hamiltonfunktion folgt aus der Lagrangefunktion durch die Legendre-Transformation

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \dot{\mathbf{q}}\mathbf{p} - L = \sum_i \dot{q}_i p_i - L$$

wobei die generalisierten Impulse gegeben sind durch $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$.

- Die Euler-Lagrange-Gleichungen, welche Sie bereits kennen, lauten:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_i} = 0$$

  und stellen für $i = 1, 2, 3$ je eine Differentialgleichung zweiter Ordnung dar.

- Die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen lauten

$$\frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \qquad \frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

  mit $i = 1, 2, 3$ und stellen ein System von dreimal zwei gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung dar.

Jetzt die Fragen:

1. Gegeben sind kartesiche Koordinaten, d.h. $\mathbf{q} = \mathbf{x}$. Bestimmen Sie zunächst die generalisierten Impulse in Abhängigkeit der generalisierten Geschwindigkeiten.

2. Dreht man diese Abhängigkeit um, so kann man die kinetische Energie in Abhängigkeit der generalisierten Impulse ausdrücken. Wie sieht die kinetische Energie $T(\mathbf{p})$, in Abhängigkeit der generalisierten Impulse $\mathbf{p}$, aus?

3. Stellen Sie nun die Hamiltonfunktion auf und leiten Sie die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen daraus ab. Überlegen Sie sich, daßdiese äquivalent zu den Newton'schen Bewegungsgleichungen für ein Punktteilchen der Masse m im Potential $V(\mathbf{x})$ sind.

Aufgabe 2: Teilchen im Geiger-Müller Zählrohr

Ein Geiger-Müller Zählrohr ist aus einer zylinderförmigen Kathode und einem Anodendraht in der Mitte aufgebaut. Die potentielle Energie eines Teilchens der Masse m im Gieger-Müller Zählrohr ist gegeben durch

$$V(\rho) = V_0 \ln \frac{\rho}{\rho_0}$$

wobei V_0 und ρ_0 Konstanten sind. Dabei werden Zylinderkoordinaten (ρ, ϕ, z) verwendet, wobei der Anodendraht mit der $z-$Achse übereinstimmt. Der Radius der Kathode ist gegeben durch ρ_0.

1. Drücken Sie einen beliebigen Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}$ in Zylinderkoordinaten aus.

2. Finden Sie die Lagrange-Funktion $L(\rho, \phi, z)$.

3. Stellen Sie die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen auf.

4. Wie lautet die Hamilton-Funktion?

5. Stellen Sie die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen auf.

6. Finden Sie alle Erhaltungssätze des Systems.

Aufgabe 3: Ein einfacher harmonischer Oszillator

Wir denken an eine Feder mit der Federkonstanten k, die dem Hooke'schen Gesetz $F = -kx$ folgt, wenn x die Auslenkung aus der Ruhelage darstellt.

1. Was sind die Zwangsbedingungen dieses System? Was ist dann die generalisierte Koordinate?

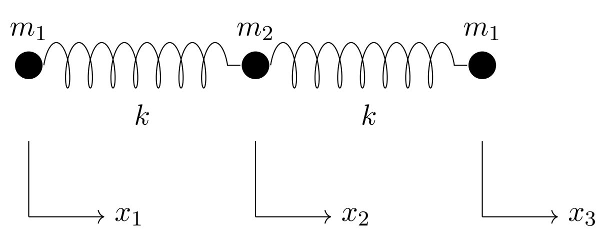
2. Finden Sie die Lagrange-Funktion.

3. Mit der generalisierten Koordinate q finden Sie den generalisierten Impuls und dadurch die Hamilton-Funktion.

4. Beschreiben Sie die Bahn des Systems im $(q, p)-$Phasenraum. Finden Sie die kanonischen Gleichungen, damit Sie die Schwingungsgleichung finden können.

Aufgabe 4: Ein dreiatomiges Molekül

Gegeben sei ein dreiatomiges Molekül. Dieses führe eindimensionale Schwingungen mit gleicher *Federkonstanten* k aus. x_1, x_2, x_3 seien die Auslenkungen aus der Ruhelage. Die beiden Außenatome haben dieselbe Masse m_1.



1. Finden Sie die Lagrange-Funktion, die die eindimensionale Atomschwingung beschreibt.

2. Bestimmen Sie die kanonischen Impulse und die Hamilton Funktion.

3. Wie lauten die kanonischen Bewegungsgleichungen eines dreiatomigen Moleküls?

4. Bestimmen Sie die verschiedenen Schwingungsmoden des Moleküls. *Hinweis: Lösen Sie die Bewegungsgleichungen.*