Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: PD Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. Cody B Duncan

Übungsblatt 5

Besprechung: Di. 31.05.2022

Aufgabe 1: Integrale der Bewegung

Für jede beliebige mechanische Observable (zB. eine skalare Funktion f) haben wir immer die Bewegungsgleichung

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \{f, H\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Es sei $F = F(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ eine physikalische Größe, die für alle Zeiten denselben Wert hat:

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = 0 \Leftrightarrow F : \text{Integral der Bewegung}$$

Dann ist dies genau dann erfüllt, wenn

$$\{H, F\} \stackrel{!}{=} \frac{\partial F}{\partial t}.$$

1. Die mechanische Observable $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ sei wie die Hamilton-Funktion H ein Integral der Bewegung. Zeigen Sie, dass dann auch $\frac{\partial f}{\partial t}$ ein Integral der Bewegung ist.

2. Betrachten Sie die lineare, kräftefreie Bewegung eines Teilchens der Masse m. Zeigen Sie, dass H ein Integral der Bewegung ist, und verifizieren Sie für die Observable

$$f(q, p, t) = q - \frac{pt}{m}$$

   die Aussage von Teil 1. Zeigen Sie also, dass sowohl f als auch $\frac{\partial f}{\partial t}$ Integrale der Bewegung sind.

Aufgabe 2: Teilchen in einem Zentralfeld

Ein Teilchen der Masse m bewege sich in einem Zentralfeld.

1. Berechnen Sie die Lagrange-Funktion. Welche generalisierten Koordinaten sind günstig?

2. Wie lautet die Hamilton-Funktion?

3. Zeigen Sie mit Hilfe der Poisson-Klammer dass die $z-$Komponente $L_z = xp_y - yp_x$ des Drehimpulses ein Integral der Bewegung ist!

Aufgabe 3: Poisson-Klammern

Erinnern Sie sich, daßdie Poisson-Klammern von ein skalare Funktion f mit einer anderen skalaren Funktion g ist gegeben durch

$$\{f, g\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} := \sum_{j=1}^{S} \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right)$$

Zeigen Sie, dass für die Funktionen:

$$f = f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t); \quad g = g(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t); \quad h = h(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$$

die folgenden Beziehungen gelten:

1. $\frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\}$
2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{f, g\} = \left\{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}, g\right\} + \left\{f, \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\right\}$
3. $\{f, g \cdot h\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h$

Aufgabe 4: Harmonischer Oszillator II

Kontrollieren Sie, ob für den linearen harmonischen Oszillator die mechanische Observable

$$f(q, p, t) = p \sin \omega t - m\omega q \cos \omega t$$

ein Integral der Bewegung ist.

Bestätigen Sie das Ergebnis durch direkte Berechnung von $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$.

End of Mechanics Kontrollfragen:

Here are a list of simple questions (i.e. that only need one to two sentence answers) that should hopefully reinforce the important concepts we've covered so far in the course. We will not cover them all in class, so it is best to try them all and find the ones you do not know the answers to. *Hinweis: The exam contains ten short questions at the beginning that span the entire course which have the same format/style as these, as well as longer calculations afterwards.*

1. Was versteht man unter Zwangsbedingungen, was unter Zwangskräften?
2. Was sind holonome, holonom-skleronome, holonom-rheoneome, nicht-holonome Zwangsbedingungen?
3. Welche Bedingungen müssen generalisierte Koordinaten erfüllen?
4. Formulieren Sie das Prinzip der virtuellen Arbeit.
5. Warum werden Reibungskräfte nicht zu den Zwangskräften gezählt?
6. Was besagt das d'Alembert'sche Prinzip?
7. Unter welchen Bedingungen folgen aus dem d'Alembert'schen Prinzip die Lagrange-Gleichungen 2. Art?
8. Wie sind verallgemeinerte Impulse definiert?
9. Was ist eine zyklische Koordinate?
10. Wie lauten die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen 1. Art?
11. Formulieren Sie das Hamilton'sche Prinzip. Welche Bedingungen müssen die zur Variation zugelassenen Bahnen erfüllen?

12. Was ist ein *Integral der Bewegung*?
13. Warum ist es günstig, in der Lagrange-Formulierung eines physikalischen Problems möglichst viele generalisierte Koordinaten zyklisch zu wählen?
14. Wie ist die Hamilton-Funktion definiert?
15. Unter welchen Bedingungen ist die Hamilton-Funktion mit der Gesamtenergie identitisch?
16. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Impulserhaltung und Symmetrierichtungen?
17. Worin besteht die Zielsetzung der Hamilton-Mechanik?
18. Formulieren Sie die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen.
19. Unter welchen Voraussetzungen ist H mit der Gesamtenergie des Systems identisch?
20. Wie findet man die Hamilton-Funktion eines physikalischen Systems?
21. Wie lautet die Hamilton-Funktion des harmonischen Oszillators?