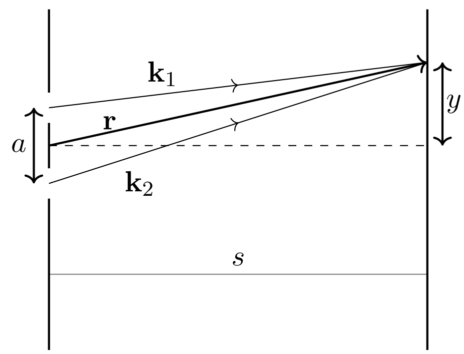
Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: PD Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. Cody B Duncan

Übungsblatt 6

Besprechung: Di. 14.06.2022

Aufgabe 1: Interferenz



Berechnen Sie die Intensität zweier interferierender ebener Wellen

$$E_1 = E_0 \exp\big(\mathrm{i}(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t)\big)$$
$$E_2 = E_0 \exp\big(\mathrm{i}(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega t)\big)$$

in einem Doppelspaltexperiment. Nehmen Sie an, der Spalt sei in der $z-$Richtung unendlich lang ausgedehnt und betrachten Sie dann den Strahlengang in der $xy-$Ebene.

1. Leiten Sie eine Bedingung für Maxima und Minima der Intensität her. Die Intensität ist dabei gegeben als Quadrat der Amplitudensumme:

$$I = \langle |E_1 + E_2|^2 \rangle \quad \text{wobei} \quad \langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \mathrm{d}t' f(t')$$

2. Stellen Sie sich vor, Sie sollen eine Positionsbestimmung eines Teilchens vornehmen, indem Sie den Spaltabstand a immer kleiner wählen, um die räumliche Koordinate beim Durchgang immer genauer festzulegen. Was geschieht mit dem Interferenzmuster?

Hinweis: Parametrisieren Sie zunächst die Wellenvektoren $\mathbf{k}_1$ und $\mathbf{k}_2$ bzw. den Vektor $\mathbf{r}$ (siehe Bild) durch die Parameter des Experiments. Die Normierung der Vektoren $\mathbf{k}_1$ und $\mathbf{k}_2$ ist so zu wählen, dass diese gleich lang sind. Man nimmt dann an, dass die Distanz s zwischen Blende und Schirm viel grösser ist als alle anderen Längen, z.B. a oder y, und dass der Winkel zwischen $\mathbf{k}_1$ und $\mathbf{k}_2$ sehr klein ist.

Aufgabe 2: Photoeffekt

1. Schätzen Sie die klassisch zu erwartende Zeitverzögerung beim Photoeffekt ab. Die Intensität der einfallenden Strahlung betrage $0,01 \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$. Die "Querschnittsfläche" des Atoms sei 0.1 nm^2.

2. Wie lange dauert es, bis die der Austrittsarbeit entsprechende Energie von 2 eV auf das Atom gefallen ist?

Aufgabe 3: Wärmestrahlung

1. Schreiben Sie die spektrale Energiedichte der Wärmestrahlung als Funktion der Wellenlänge sowohl für die Planck- als auch für die Wien- Formel.

2. Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden Formeln für kleine λ und leiten Sie daraus die empirischen Konstanten a und b der Wien-Formel

$$g\left(\frac{v}{T}\right) = a \exp\left(-b\frac{v}{T}\right) \tag{1}$$

   ab.

3. Vergleichen Sie die Planck-Formel für große λ mit der von Rayleigh

$$\omega_\lambda \mathrm{d}\lambda = \frac{8\pi k_B T}{\lambda^4} \mathrm{d}\lambda \tag{2}$$

Aufgabe 4: Operatoren in der Quantenmechanik

1. Der Kommutator für zwei lineare Operatoren A und B ist definiert durch

$$[A, B] \coloneqq AB - BA$$

   Zeigen Sie die folgende Eigenschaften des Kommutators, wenn A, B, C lineare Operatoren und $\lambda \in \mathbb{R}$ sind:

   - Antisymmetrie: $[A, B] = -[B, A]$
   - Linearität: $[\lambda A + B, C] = \lambda[A, C] + [B, C]$
   - Prodktregel: $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$
   - Jacobi-Indentität:

$$\big[A, [B, C]\big] + \big[B, [C, A]\big] + \big[C, [A, B]\big] = 0$$

2. In der Quantenmechanik werden die physikalischen Observablen als Operatoren identifiziert. Die Ortskoordinaten und Impulse von Teilchen werden nun durch den Ortsoperator X bzw. Impulseoperator P dargestellt, die auf die Wellenfunktion $\psi(\mathbf{x}, t)$ wirken. Dies ist eine Eigenwertgleichung:

$$X_i \psi(\mathbf{x}, t) = x_i \psi(\mathbf{x}, t)$$
$$P_i \psi(\mathbf{x}, t) = p_i \psi(\mathbf{x}, t)$$

   wobei $x_i, p_i \in \mathbb{R}$ den gemessen Orten bzw. Impulsen entspricht. In der *Ortsraumdarstellung* gilt:

$$X_i \psi(\mathbf{x}, t) = x_i \psi(\mathbf{x}, t)$$
$$P_i \psi(\mathbf{x}, t) = -\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial x_i} \psi(\mathbf{x}, t)$$

   (a) Zeigen Sie in dieser Darstellung die *kanonischen Vertauschungsrealtionen*

$$\big[X_i, P_i\big] \psi(\mathbf{x}, t) = \mathrm{i}\hbar \delta_{ij} \psi(\mathbf{x}, t)$$

(b) Der Hamilton Operator für ein freies Teilchen lautet $H = \sum_i P_i^2/2m$. Zeigen Sie

$$\big[X_i, H\big]\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathrm{i}\hbar}{m} P_k \psi(\mathbf{x}, t)$$

Extra Aufgabe: Temperatur der Sonnenoberfläche

Die Sonne emittiert Licht verschiedener Wellenlängen, wobei das Maximum des Spektrums im sichtbaren Bereich liegt. Benutzen Sie diese Information, um die Temperatur auf der Oberfläche der Sonne abzuschätzen.