

Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: PD Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. Cody B Duncan

Übungsblatt 7

Besprechung: Di. 28.06.2022

Aufgabe 1: Gaußsches Wellenpaket

Gegeben sei ein Wellenpaket für ein freies Teilchen mit der Impulsverteilung

$$g(k) = \frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{1/4}} \exp\left(-\frac{a^2 k^2}{4}\right)$$

Wir betrachten ein Wellenpaket aus ebenen Wellen mit genau dieser Verteilung:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk g(k) e^{i(kx - \omega_k t)}$$

mit der Dispersionrelation $\omega_k = \hbar k^2 / 2m$.

1. Zunächst diskutieren wir den Zeitpunkt $t = 0$. Zeigen Sie, dass $\psi(x, 0)$ auch eine Gauß-Funktion ist und bestimmen Sie die Breite der Wahrscheinlichkeitsdichte, $|\psi|^2$. Wie hängt diese von a ab?
2. Die Standard-Abweichung einer Observablen $\mathcal{O}$ ist definiert durch:

$$\Delta \mathcal{O} := \sqrt{\langle \mathcal{O}^2 \rangle - \langle \mathcal{O} \rangle^2}$$

wobei der Erwartungswert definiert ist durch

$$\langle \mathcal{O} \rangle(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^\dagger(x, t) \mathcal{O} \psi(x, t)$$

Zeigen Sie für $t = 0$, dass $\psi(t = 0)$ ein Zustand minimaler Unschärfe ist, sodass folgendes gilt:

$$\Delta x \Delta p = \hbar / 2$$

3. Bestimmen Sie nun $\psi(x, t)$ für beliebige Zeiten t und diskutieren Sie das Verhalten der Wahrscheinlichkeitsdichte mit der Zeit. Ist es immernoch ein Zustand minimaler Unschärfe?

Aufgabe 2: Wellenfunktion eines freien Teilchens

1. Zeigen Sie, dass der Zustand $|\Psi\rangle = \exp(i\hat{p}a)|\psi\rangle$ dem um die Distanz verschobenen Zustand $|\psi\rangle$ entspricht, d.h.

$$\Psi(x) = \exp(i\hat{p}a)\psi(x) = \psi(x + a)$$

Der skalare Parameter a ist dabei die Distanz und $\hat{p}$ der Impulsoperator. *Hinweis: Nutzen Sie die Ortsdarstellung des Impulsoperators und die Exponentialreihendarstellung.*

2. Die zeitabhängige Wellenfunktion eines freien Teilchens in einer Dimension ist gegeben durch

$$\psi(x, t) = \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}} g(p) e^{ipx/\hbar} e^{-iE(p)t/\hbar}$$

mit der Dispersion $E(p) = p^2/2m$ und

$$g(p) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} \exp\left(-\frac{p^2}{4\sigma^2}\right)$$

Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion die Schrödingergleichung eines freien Teilchens erfüllt.

3. Zeigen Sie, durch Einsetzen der freien Wellenfunktion, dass die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) + \nabla \cdot \mathbf{j}(x, t) = 0$$

mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x, t) = |\psi(x, t)|^2$ und dem Wahrscheinlichkeitsstroms

$$\mathbf{j}(x, t) = \frac{\hbar}{2im} (\psi^*(x, t) \nabla \psi(x, t) - (\nabla \psi^*(x, t)) \psi(x, t))$$

erfüllt ist.

Aufgabe 3: Potentialtopf I (Unendlicher Potentialtopf)

Betrachten Sie ein Teilchen im folgenden eindimensionalen Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-a/2, a/2] \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei a die Breite des Potentialtopfes parametrisiert. Lösen Sie die stationäre Schrödingergleichung für $E > 0$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi(x) = E \psi(x)$$

Eine allgemeine Lösung der Wellengleichung ist gegeben durch

$$\psi(x) = \alpha e^{ikx} + \beta e^{-ikx}$$

wobei die Parameter α, β durch die Randbedingungen bestimmt werden können. Überlegen Sie sich dazu wie die Wellenfunktion außerhalb des Topfes aussehen und welche weitere Eigenschaften die Wellenfunktion erfüllen muss.

- Bestimmen Sie die Energieeigenwerte und die Wellenfunktionen und zeigen Sie dass die Energie *quantisiert* ist.
- Was passiert für Energien $E < 0$?