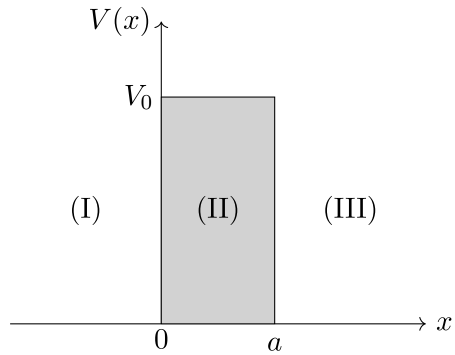
Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: PD Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. Cody B Duncan

Übungsblatt 8

Besprechung: Di. 05.07.2022

Aufgabe 1: Tunneleffekt



Betrachten Sie eine kastenförmige Potentialbarriere der Höhe V_0. Berechnen Sie die stationären Zustände eines Teilchens der Energie $E < V_0$, welches sich auf die Barriere zubewegt und bestimmen Sie dadurch den Transmissionskoeffizienten $t = t(E)$.

Hinweis: Benutzen Sie die folgenden Ansätze für die Wellenfunktion in den drei Bereichen $(I), (II)$ und (III):

$$\begin{aligned}\psi_I(x) &= e^{\mathrm{i}kx} + re^{-\mathrm{i}kx},\\ \psi_{II}(x) &= pe^{\alpha x} + qe^{-\alpha x},\\ \psi_{III}(x) &= te^{\mathrm{i}k(x-a)}\end{aligned}$$

Verwenden Sie für die Randbedingungen zwischen den drei Bereichen nun die Stetigkeit der Wellenfunktion und deren Ableitung, um daraus die Koeffizienten r, p, q, t zu bestimmen. Die Exponenten, mit den reellen Parametern k und κ, der Funktionen $\psi_I(x), \psi_{II}(x)$ und $\psi_{III}(x)$ zu können Sie mit der Schrödingergleichung ermitteln.

Aufgabe 2: Atomare Bindung

Betrachten Sie ein im eindimensionalen Potential

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } x < 0 \\ -V_0 < 0 & \text{für } 0 \leq x \leq b \\ 0 & \text{für } x > b \end{cases}$$

gebundenes Teilcehn der Masse m und Energie $-V_0 < E < 0$. Es bieten sich folgende Abkürzungen an

$$k_0 = \sqrt{2mV_0/\hbar^2}$$
$$\rho = \sqrt{-2mE/\hbar^2}$$
$$K = \sqrt{k_0^2 - \rho^2}$$

1. Geben Sie die allgemeine Form der Lösungen der stationären Schrödingergleichung für die drei Bereiche: $x < 0, 0 \leq x \leq b$ und $x > b$ an.

2. Finden Sie die Anschlussbedingungen bei $x = 0$ und $x = b$. Zeigen Sie, dass durch die Anschlussbedingungen die folgende Gleichung folgt:

$$\tan(Kb) = -\frac{K}{\rho}$$

3. Untersuchen Sie qualitativ die Anzahl der gebundenen Zustände für fester b in Abhängigkeit der Potentialtiefe. Zeigen Sie, dass es bei hinreichend flachem Potential keinen gebundenen Zustand gibt, genauer für

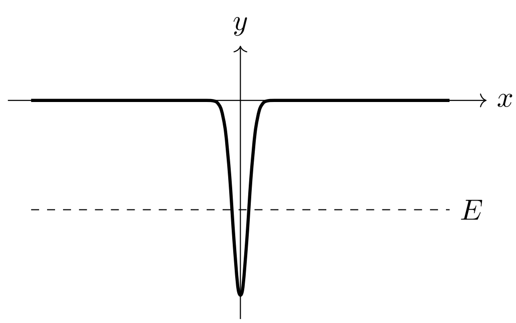
$$V_0 < \frac{\pi^2\hbar^2}{8mb^2}.$$

Hinweis: Lösen Sie es graphisch.

Aufgabe 3: Dirac-Potential

Betrachtet werde die eindimensionale Bewegung eines Teilchens der Masse m in einem δ-Potential:

$$V(x) = -V_0\delta(x); \quad V_0 > 0$$



Berechnen Sie die normierten Eigenfunktionen der gebundenen Zustände. Wie viele gebundene Zustände gibt es in Abhängigkeit von V_0?

Setzen Sie bei der Lösung voraus, dass die gesuchte Wellenfunktion $\phi(x)$ sich trotz des *unphysikalischen* Potentials überall *physikalisch vernünftig* verhält, d.h. zum Beispiel, die wichtige statistiche Interpretation zuläßt.

Hinweis: Sie können die Schrödinger-Gleichung über ein kleines Intervall um den Nullpunkt integrieren ($\eta \to 0^+$):

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}x \partial_x^2\psi(x) + \int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}x V(x)\psi(x) = E\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}x\psi(x)$$