Karlsruher Institut für Technologie

Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: PD Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. Cody B Duncan

Übungsblatt 9

Besprechung: Di. 12.07.2022

Aufgabe 1: Vektoren im Hilbertraum

Die Vektoren $|v_1\rangle, |v_2\rangle$ bilden ein vollständiges Orthonormalsystem (VONS) in einem zweidimensionalen Hilbertraum $\mathcal{H}$, d.h. $\langle v_i|v_j\rangle = \delta_{ij}$. In Abhängigkeit dieser zwei Basisvektoren definieren wir die zwei Vektoren $|\phi\rangle, |\chi\rangle \in \mathcal{H}$ durch

$$|\phi\rangle = (3-i)|v_1\rangle + (1+2i)|v_2\rangle$$
$$|\chi\rangle = (1+i)|v_1\rangle + (1-i)|v_2\rangle$$

1. Berechnen Sie das Skalarprodukt $\langle\chi|\phi\rangle$. Zeigen Sie dann, dass die Vektoren

   $$|u_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|v_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|v_2\rangle$$
   $$|u_2\rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}}|v_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|v_2\rangle$$

   ebenfalls ein VONS bilden und bestimmen Sie die Komponenten von $|\phi\rangle$ und $|\chi\rangle$ bezüglich dieser neuen Basisvektoren.

   Hinweis: For a vector $|A\rangle = \alpha|a\rangle$, we have $\langle A| = (\alpha|a\rangle)^\dagger = \alpha^*\langle a|$.

2. Projektoren P_i auf Unterräume $\mathcal{H}_i$ haben die Eigenschaften $P_i^2 = P_i$ (Idempotenz) und $\sum_i P_i = 1$ (Vollständigkeit), falls die $\mathcal{H}_i$ den gesamten Raum $\mathcal{H}$ aufspannen. Betrachten Sie nun die Projektoren $P_{u_1} = |u_1\rangle\langle u_1|$ und $P_{v_1} = |v_1\rangle\langle v_1|$.

   Welche mathematischen Objekte sind durch P_{u_1} bzw. P_{v_1} beschrieben? Bestimmen Sie die Komponenten $\langle v_j| P_{u_1}|v_k\rangle$ von $P_{u_!}$ bezüglich der $|v_i\rangle$ und die Komponenten $\langle u_j| P_{v_1}|u_k\rangle$ von P_{v_1} bezüglich der $|u_i\rangle$. Schreiben Sie schließlich P_{u_1} in der Basis $|v_i\rangle$.

Aufgabe 2: Zwei-Zustands-System

Ein physikalisches Zwei-Zustands-System sei gegeben durch die Basis $B = \{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$. Der Hamiltonoperator ist

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \epsilon & -\Delta \\ -\Delta & \epsilon \end{pmatrix} = \epsilon\mathbb{1} - \Delta\sigma_x$$

mit $\mathbb{1}$ als 2×2 Einheitsmatrix und σ_i als die Pauli-Matrizen:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Zeigen Sie, dass
$$\exp\left(i\alpha\sigma_y\right) = \cos\alpha + i\sigma_y \sin\alpha$$

2. Diagonalisieren Sie den Hamiltonoperator, d.h. finden Sie eine unitäre Matrix $\hat{U}$, sodass $\hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger = \mathrm{diag}(E_1, E_2)$. Sie können dabei verwenden, dass $\hat{U} = \exp(i\alpha\sigma_y)$. Bestimment Sie α, die Energieeigenwerte E_1 und E_2 und schreiben Sie die Eigenzustände $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ als Linearkombination von $|u_1\rangle$ und $|u_2\rangle$.

Aufgabe 3: Geladener Harmonischer Oszillator

Betrachten Sie einen harmonischen Oszillator mit der Ladung e in einem konstanten elektrischen Feld E, der durch den Hamiltonoperator
$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{P}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{X}^2 + eE\hat{X}$$
beschrieben wird.

1. Zeigen Sie, dass $\hat{H}$ durch die Auf- und Absteigeoperatoren
$$\begin{aligned} \hat{b}^\dagger &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{X} - \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\hat{P} \\ \text{und} \quad \hat{b} &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{X} + \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\hat{P} \end{aligned}$$
in die Form
$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{b}^\dagger\hat{b} + \frac{1}{2} + \Delta\right)$$
gebracht werden kann. Der Störterm ist dabei gegeben durch
$$\Delta = \frac{eE}{\omega\sqrt{2\hbar\omega}}\left(\hat{b}^\dagger + \hat{b}\right)$$

2. Bringen Sie den gestörten harmonischen Oszillator in *Diagonalform.* Nutzen Sie dabei einen Shift der Auf- und Absteigeoperatoren
$$\hat{a}^{(\dagger)} = \hat{b}^{(\dagger)} + c$$
mit $c \in \mathbb{R}$ und bestimmen Sie c so, dass der Hamiltonoperator in kanonischer Form vorliegt
$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + d\right)$$
Wie sieht das Energiespektrum des gestörten harmonischen Oszillators aus?

3. Berechnen Sie die Ortsunschärfe ΔX des harmonischen Oszillators. *Tipp:* Für die Eigenzustände $|n\rangle$ von $\hat{H}$ gilt:
$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \\ \text{und} \quad a\,|n\rangle &= \sqrt{n}\,|n-1\rangle \end{aligned}$$