Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: PD Dr. Stefan Gieseke – Übung: Dr. Matthias Kerner

---

Übungsblatt 1

Besprechung: Di.23.04.2024

Es besteht keine Pflicht zur Abgabe der Übungsblätter. Zur Vorbereitung auf die Klausur wird die Bearbeitung der Übungsblätter dringend empfohlen. Die erste Übung findet am Dienstag, den 23.4.24 statt.

Aufgabe 1: Differenzieren

Bestimmen Sie die Ableitungen der Funktionen, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$, nach x:

1. $f(x) = \ln(1 - x^2)$
2. $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$
3. $f(x) = x^x$
4. $f(x) = (5 - 2x + x^2)^{1/3}$

Aufgabe 2: Taylor-Entwicklung

Die Taylor-Entwicklung ist ein sehr hilfreiches Werkzeug, um komplizierte Funktionen in eine einfache Polynomreihe zu entwickeln, die in einer Umgebung um die Entwicklungsstelle x_0 die Funktion approximiert. Dabei lautet die Vorschrift für die *n-te Ordnung* um die Entwicklungsstelle x_0 der Funktion $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left.\frac{\mathrm{d}^k f(x)}{\mathrm{d}x^k}\right|_{x=x_0} \left(x - x_0\right)^k + \mathcal{O}(x^n),$$

wobei $\mathcal{O}(x^n)$ das Restglied der Entwicklung angibt. Bestimmen Sie die Taylorreihen bis zur fünften Ordnung ($k = 5$) um $x_0 = 0$ der folgenden Funktionen:

1. $f(x) = e^x$
2. $f(x) = \sin(x)$
3. $f(x) = \cos(x)$

Zeigen Sie unter Benutzung der Taylorentwicklungen, dass gilt:

$$e^{\mathrm{i}x} = \cos(x) + \mathrm{i} \sin x \ ,$$

wobei i die imaginare Einheit definiert durch $\mathrm{i}^2 = -1$ ist.

Aufgabe 3: Galilei-Transformation

Die Galilei-Transformationen $(x, t) \to (x', t')$ sind in einer Raumdimension definiert durch

$$x' = x + vt \quad \text{und} \quad t' = t \ ,$$

wobei v die relative Geschwindigkeit der beiden Inertialsysteme ist. Zeigen Sie, dass zwei hintereinander angewandte Galilei-Transformationen $(x, t) \xrightarrow{v_1} (x', t') \xrightarrow{v_2} (x'', t'')$ ebenfalls einer Galilei-Transformation mit einer Geschwindigkeit v_{new} entsprechen. Wie hängt v_{new} von v_1 und v_2 ab?

Aufgabe 4: Bahnkurven in zwei und 3 Dimensionen

Die Bewegung eines Körpers/Teilchens im Raum als Funktion der Zeit t lässt sich durch eine Bahnkurve $\vec{r}(t)$ darstellen. Die Geschwindigkeit und Beschleunigung lassen sich als Ableitungen nach der Zeit ermitteln. Wir betrachten drei einfache Beispiele.

1. Eine Raumkurve werde durch die Parameterdarstellung:
$$\vec{r}(t) = \big(a\cos\omega t, b\sin\omega t\big)$$
mit $a, b > 0$ beschrieben. Skizzieren Sie die Kurve $\vec{r}(t)$.

2. Eine Bahnkurve werde beschrieben durch die Parameterdarstellung:
$$\vec{r}(t) = \big(a\cos\omega t, a\sin\omega t, ct\big), \quad \text{mit } a, c > 0$$
   (a) Skizzieren Sie die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ als Funktion des eindimensionalen Parameters t.
   (b) Wie groß ist der Abstand $h = z_2 - z_1$ zweier in $z-$Richtung direkt über einanderliegender Punkte $(a, 0, z_1)$ und $(a, 0, z_2)$, wobei $z_2 > z_1$?

3. Es sei nun der Ortsvektor $\vec{r}(t)$ eines Teilchens auf einer Kreisbahn mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω gegeben durch:
$$\vec{r}(t) = \big(r\cos\omega t, r\sin\omega t, 0\big)$$
   (a) Berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$ und den Beschleunigungsvektor $\vec{a} = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$.
   (b) Skizzieren Sie die Kreisbahn des Teilchens und diskutieren Sie, in welche Richtung $\vec{r}(t), \vec{v}(t)$ und $\vec{a}(t)$ relativ zum Bahnverlauf zeigen.
   (c) Nehmen Sie nun an, das Teilchen sei ein Satellit der Masse m_s und umkreise die Erde mit Masse m_E in einer Entfernung r_s. Berechnen Sie dessen Geschwindigkeit $v = |\vec{v}|$, wobei für die Gravitationskraft gilt $\vec{F}(\vec{r}) = -\gamma m_s M_E \vec{r}/r^3$ und γ die Newton'sche Gravitationskonstante bezeichnet. *Hinweis:* Lex secunda.