

Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: PD Dr. Stefan Gieseke – Übung: Dr. Matthias Kerner

Übungsblatt 10

Besprechung: Di. 2.7.2024

Aufgabe 1: Gauß'sches Wellenpaket

Ein freies Teilchen werde beschrieben durch eine Materiewelle der Form

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{\hbar} \tilde{\psi}(p) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (px - \varepsilon(p) t) \right\}.$$

Dies ist äquivalent mit der in der Vorlesung hergeleiteten Gleichung durch die Relationen $p = \frac{\hbar k}{\hbar}$ und $\varepsilon(p) = \omega(k)$. Nehmen Sie nun an, dass $\varepsilon(p) = p^2/2m$ und weiter dass $\tilde{\psi}(p)$ ein Gauß'sches Wellenpaket sei, beschrieben durch

$$\tilde{\psi}(p) = \tilde{\psi}_0 e^{-b^2(p-p_0)^2/\hbar^2}.$$

1. Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion gegeben ist durch

$$\psi(x, t) = \tilde{\psi}_0 \sqrt{\frac{\pi}{b^2 + i\hbar/2m}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (p_0 x - \frac{p_0^2}{2m} t) \right\} \exp \left\{ -\frac{(x - tp_0/m)^2}{4(b^2 + i\hbar/2m)} \right\}.$$

2. Bestimmen Sie nun die Normierungskonstante $\tilde{\psi}_0$, so dass die Wellenfunktion $\psi(x, t)$ folgenderweise normiert ist:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x, t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x, t) \psi(x, t).$$

3. Bestimmen Sie die Erwartungswerte $\langle X \rangle$, $\langle P \rangle$.

Hinweis: Der Erwartungswert eines Operators $\langle A \rangle$ wird im Ortsraum bestimmt durch

$$\langle A \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x, t) A \psi(x, t).$$

4. Berechnen Sie nun die Orts- und Impulsunschärfe ΔX bzw. ΔP . Was erhalten Sie für das Produkt $\Delta X \Delta P$?

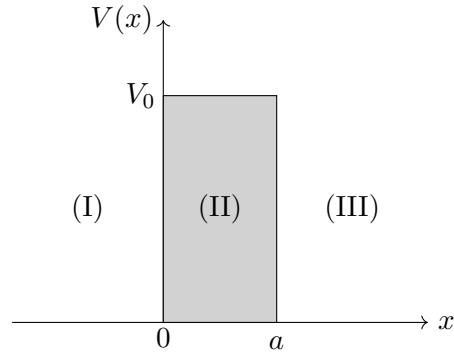
Hinweis: Die Unschärfe eines Operators ΔA kann wie folgt berechnet werden:

$$(\Delta A)^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2.$$

Hinweis: Verwenden Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \text{bzw.} \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \frac{(2n)!}{(4a)^n n!}.$$

Aufgabe 2: Tunneleffekt



Betrachten Sie eine kastenförmige Potentialbarriere der Höhe V_0 . Berechnen Sie die stationären Zustände eines Teilchens der Energie $E < V_0$, welches sich auf die Barriere zubewegt und bestimmen Sie dadurch den Transmissionskoeffizienten $t = t(E)$.

Hinweis: Benutzen Sie die folgenden Ansätze für die Wellenfunktion in den drei Bereichen I, II und III:

$$\begin{aligned}\psi_{\text{I}}(x) &= e^{ikx} + re^{-ikx}, \\ \psi_{\text{II}}(x) &= pe^{\alpha x} + qe^{-\alpha x}, \\ \psi_{\text{III}}(x) &= te^{ik(x-a)}\end{aligned}$$

Verwenden Sie für die Randbedingungen zwischen den drei Bereichen nun die Stetigkeit der Wellenfunktion und deren Ableitung, um daraus die Koeffizienten r, p, q, t zu bestimmen. Die Exponenten, mit den reellen Parametern k und κ , der Funktionen $\psi_{\text{I}}(x)$, $\psi_{\text{II}}(x)$ und $\psi_{\text{III}}(x)$ können Sie mit der Schrödingergleichung ermitteln.