

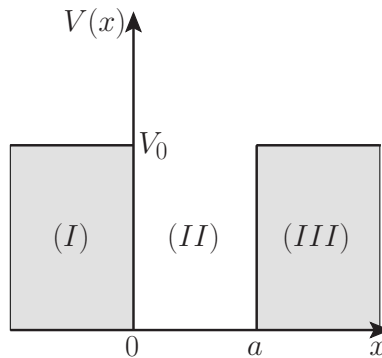
Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: PD Dr. Stefan Gieseke – Übung: Dr. Matthias Kerner

Übungsblatt 11

Besprechung: Di. 9.7.2024

Aufgabe 1: Potentialtopf



Betrachten Sie ein Elektron in einem Kastenpotential, welches für $x < 0$ und $x > a$ die Höhe $V_0 > 0$ besitzt und dazwischen für $0 \leq x \leq a$ die Höhe $V_0 = 0$ (siehe Bild).

1. Lassen Sie uns zunächst den Fall eines Kastenpotentials endlicher Tiefe betrachten, also $V_0 \neq \infty$. Lösen Sie die stationäre Schrödingergleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V(x) \psi(x) = E \psi(x)$$

mit einer Strategie analog zum Problem der kastenförmigen Potentialbarriere auf dem vorherigen Übungsblatt. Beschränken Sie sich dabei zunächst auf Energien $E < V_0$ und benutzen Sie den Ansatz

$$\begin{aligned} \psi_I(x) &= r e^{\kappa x}, \\ \psi_{II}(x) &= p e^{ikx} + q e^{-ikx}, \\ \psi_{III}(x) &= t e^{-\kappa x}, \end{aligned}$$

um die Normierbarkeit der Wellenfunktion zu gewährleisten. Die Lösung dieses Problems nach den diskreten Energiewerten wird Sie letztlich auf die transzendente Gleichung $\tan(ka) = 2k\kappa/(k^2 - \kappa^2)$ führen. Die Lösung dieser Gleichung erfolgt in der Regel grafisch. Sie sollen an dieser Stelle jedoch abbrechen.

2. Betrachten Sie uns nun den Fall eines Kastenpotentials unendlicher Tiefe, also $V_0 \rightarrow \infty$.
 - (a) Überlegen Sie sich auch für den Fall $V_0 \rightarrow \infty$ einen sinnvollen Ansatz für die stationäre Wellenfunktion $\psi(x)$ in den drei Bereichen. Finden Sie letztlich die stationäre Wellenfunktion $\psi_n(x)$, welche die Schrödingergleichung in diesem Fall löst, und die zugehörigen Energieeigenwerte E_n .

Hinweis: Die Darstellung der Differenz von komplexen Exponentialfunktionen als Sinusfunktion kann hier nützlich sein, um eine periodische Abhängigkeit der Koeffizienten von einem ganzzahligen Parameter n abzuleiten. Um den korrekten Vorfaktor zu bestimmen, nutzen Sie die Normierung der Funktion aus.

Lösung:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right).$$

- (b) Vergleichen Sie Ihren Ansatz und Ihre Lösung zu den Resultaten aus Teilaufgabe 1), indem Sie in den Ansätzen der Wellenfunktion und der resultierenden transzendentalen Gleichung aus Teilaufgabe 1) den Grenzfall $V_0 \rightarrow \infty$ betrachten.
- (c) Berechnen Sie nun Ortsmittelwert und -unschärfe, $\langle x \rangle$ bzw. Δx , sowie Impulsmittelwert und -unschärfe, $\langle p \rangle$ bzw. Δp .
- (d) Entscheiden Sie anhand des Ergebnisses für Δp , ob sich das Elektron in einem Zustand mit scharf definiertem Impuls befinden kann.
- (e) Nehmen Sie eine zeitabhängige Wellenfunktion $\psi(x, t)$ für das Elektron im Kastenpotential an, welche bei $t = 0$ eine Überlagerung von zwei Lösungen mit kleinster Energie ist:

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{n=1}(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{n=2}(x).$$

Die Zeitabhängigkeit einer Einzellösung mittels $\psi_i(x, t) = \psi_i(x)\phi_i(t)$ abfaktorisiert werden kann. Somit ergibt sich für die zeithabhängige Wellenfunktion die Lösung

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{n=1}(x)e^{-iE_1t/\hbar} + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{n=2}(x)e^{-iE_2t/\hbar}.$$

Berechnen Sie erneut den Ortsmittelwert $\langle x \rangle$ und den Impulsmittelwert $\langle p \rangle$, diesmal mithilfe der genannten zeitabhängigen Wellenfunktion. Bestätigen Sie für dieses Beispiel, dass

$$m \frac{d\langle x \rangle}{dt} = \langle p \rangle$$

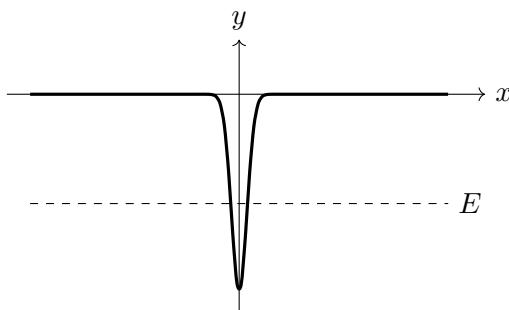
Hinweis: Folgende Integrale dürfen Sie verwenden:

$$\begin{aligned} \int dx \sin(lx) \sin(mx) &= \frac{\sin([l-m]x)}{2(l-m)} - \frac{\sin([l+m]x)}{2(l+m)}, \\ \int dx \sin(lx) \cos(mx) &= -\frac{\cos([l-m]x)}{2(l-m)} - \frac{\cos([l+m]x)}{2(l+m)}, \\ \int dx \cos(lx) \cos(mx) &= \frac{\sin([l-m]x)}{2(l-m)} + \frac{\sin([l+m]x)}{2(l+m)}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Dirac-Potential

Betrachtet werde die eindimensionale Bewegung eines Teilchens der Masse m in einem δ -Potential:

$$V(x) = -V_0\delta(x); \quad V_0 > 0$$



Berechnen Sie die normierten Eigenfunktionen der gebundenen Zustände. Wie viele gebundene Zustände gibt es in Abhängigkeit von V_0 ?

Setzen Sie bei der Lösung voraus, dass die gesuchte Wellenfunktion $\phi(x)$ sich trotz des *unphysikalischen* Potentials überall *physikalisch vernünftig* verhält, d.h. zum Beispiel, die wichtige statistische Interpretation zulässt.

Hinweis: Sie können die Schrödinger-Gleichung über ein kleines Intervall um den Nullpunkt integrieren ($\eta \rightarrow 0^+$):

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\eta}^{\eta} dx \partial_x^2 \psi(x) + \int_{-\eta}^{\eta} dx V(x) \psi(x) = E \int_{-\eta}^{\eta} dx \psi(x)$$