Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: PD Dr. Stefan Gieseke – Übung: Dr. Matthias Kerner

---

Übungsblatt 12

Besprechung: Di. 16.7.2024

Aufgabe 1: Vektoren im Hilbertraum

Die Vektoren $|v_1\rangle, |v_2\rangle$ bilden ein vollständiges Orthonormalsystem (VONS) in einem zweidimensionalen Hilbertraum $\mathcal{H}$, d.h. $\langle v_i|v_j\rangle = \delta_{ij}$. In Abhängigkeit dieser zwei Basisvektoren definieren wir die zwei Vektoren $|\phi\rangle, |\chi\rangle \in \mathcal{H}$ durch

$$|\phi\rangle = (3-i)\,|v_1\rangle + (1+2i)\,|v_2\rangle$$
$$|\chi\rangle = (1+i)\,|v_1\rangle + (1-i)\,|v_2\rangle$$

1. Berechnen Sie das Skalarprodukt $\langle\chi|\phi\rangle$. Zeigen Sie dann, dass die Vektoren

   $$|u_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|v_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}\,|v_2\rangle$$
   $$|u_2\rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}}\,|v_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|v_2\rangle$$

   ebenfalls ein VONS bilden und bestimmen Sie die Komponenten von $|\phi\rangle$ und $|\chi\rangle$ bezüglich dieser neuen Basisvektoren.

   Hinweis: Für einen Vektor $|A\rangle = \alpha\,|a\rangle$ gilt außerdem $\langle A| = (\alpha\,|a\rangle)^\dagger = \alpha^*\,\langle a|$.

2. Projektoren P_i auf Unterräume $\mathcal{H}_i$ haben die Eigenschaften $P_i^2 = P_i$ (Idempotenz) und $\sum_i P_i = 1$ (Vollständigkeit), falls die $\mathcal{H}_i$ den gesamten Raum $\mathcal{H}$ aufspannen. Betrachten Sie nun die Projektoren $P_{u_1} = |u_1\rangle\langle u_1|$ und $P_{v_1} = |v_1\rangle\langle v_1|$.

   Welche mathematischen Objekte sind durch P_{u_1} bzw. P_{v_1} beschrieben? Bestimmen Sie die Komponenten $\langle v_j|P_{u_1}|v_k\rangle$ von P_{u_1} bezüglich der $|v_i\rangle$ und die Komponenten $\langle u_j|P_{v_1}|u_k\rangle$ von P_{v_1} bezüglich der $|u_i\rangle$. Schreiben Sie schließlich P_{u_1} in der Basis $|v_i\rangle$.

Aufgabe 2: Zwei-Zustands-System

Ein physikalisches Zwei-Zustands-System sei gegeben durch die Basis $B = \{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$. Der Hamiltonoperator ist

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \epsilon & -\Delta \\ -\Delta & \epsilon \end{pmatrix} = \epsilon\mathbb{1} - \Delta\sigma_x\ ,$$

wobei $\mathbb{1}$ die 2×2 Einheitsmatrix ist, und $\sigma_{x,y,z}$ sind die Pauli-Matrizen definiert durch

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\ .$$

Diagonalisieren Sie den Hamiltonoperator, d.h. finden Sie eine unitäre Matrix $\hat{U}$, sodass $\hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger = \mathrm{diag}(E_1, E_2)$. Sie können dabei verwenden, dass $\hat{U} = \exp(i\alpha\sigma_y)$. Bestimment Sie α, die Energieeigenwerte E_1 und E_2 und schreiben Sie die Eigenzustände $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ als Linearkombination von $|u_1\rangle$ und $|u_2\rangle$.

Hinweis 1: $\exp\left(i\alpha\sigma_y\right) = \mathbb{1}\cos\alpha + i\sigma_y \sin\alpha$

Hinweis 2: $[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z$

Aufgabe 3: Auf- und Absteigeoperatoren des Harmonischer Oszillators

Man betrachte einen harmonischen Oszillator (mit Ladung e) in einem konstanten elektrischen Feld E, der durch den Hamiltonoperator

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2 + eEX$$

beschrieben wird.

1. Zeigen Sie, dass H durch die Auf- und Absteigeoperatoren

$$b^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}X - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\hbar m\omega}}P \quad \text{und} \quad b = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}X + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\hbar m\omega}}P$$

   in die Form

$$H = \hbar\omega\left[b^\dagger b + \frac{eE}{\sqrt{2\hbar m\omega\omega}}\left(b^\dagger + b\right) + \frac{1}{2}\right]$$

   gebracht werden kann.

   Hinweis: Berechnen Sie zunächst den Kommutator $[b, b^\dagger]$.

2. Drücken Sie H durch $a^\dagger = b^\dagger + c$ und $a = b + c$ aus und wählen Sie $c \in \mathbb{R}$ so, dass keine in $a^\dagger$ und a lineare Terme in H auftreten. Geben Sie die Energieeigenwerte von H an und begründen Sie ihre Antwort.

3. Berechnen Sie die Ortsunschärfe $\Delta X^2 = \langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2$ des Oszillators.

   Hinweis: Für die Eigenzustände $|n\rangle$ von H gilt:

$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \quad \text{und} \quad a\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$$