

# Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: PD Dr. Stefan Gieseke – Übung: Dr. Matthias Kerner

---

## Übungsblatt 2

Besprechung: Di.30.04.2024

---

### Aufgabe 1: Newton Mechanik - Raketenstart

Im Folgenden möchten wir einen Raketenstart bzw. die Trajektorie einer startenden Rakete beschreiben. Dabei soll die Rakete senkrecht nach oben starten ( $z(t=0) = 0 = \dot{z}(t=0) = 0$ ), und das Gravitationsfeld der Erde als homogen betrachtet werden. Die Rakete nutzt einen Rückstoßantrieb aus, bei dem kleine Teilchen mit einer konstanten Geschwindigkeit  $v_g > 0$  relativ zur Rakete nach hinten ausgestoßen werden, um damit Schub zu erzeugen.

1. Leiten Sie die Bewegungsgleichung der Rakete mit Hilfe der Impulserhaltung und den Newtonschen Axiomen her. Betrachten Sie dazu den Impuls der Rakete (Masse  $M(t)$ ) bevor, und den Impuls des Systems nachdem ein Teilchen der Masse  $m_t = -\Delta m > 0$  ausgestoßen wurde. Zeigen Sie, dass die resultierende Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{z}(t) = -v_g \frac{\dot{m}(t)}{M(t)} - g,$$

wobei  $\dot{m} = dm/dt$  die Rate der Massenabnahme der Rakete beschreibt.

2. Die Masse der Rakete  $M(t) = M_0 + m(t)$  setzt sich aus dem konstanten Teil  $M_0$  und der Treibstoffmenge  $m(t)$  zusammen. Nehmen Sie an, die Rate der Massenabnahme sei konstant  $\dot{m} = -m_0/\tau$ , wobei  $m_0$  die anfängliche Treibstoffmenge beschreibt und  $\tau$  den Brennschluss. Bestimmen Sie  $m(t)$  und den Zeitpunkt an dem aller Treibstoff verbrannt ist. Zeigen Sie nun, dass die Bewegungsgleichung der Rakete folgende Form besitzt,

$$\ddot{z}(t) = \frac{v_g}{\mu\tau - t} - g$$

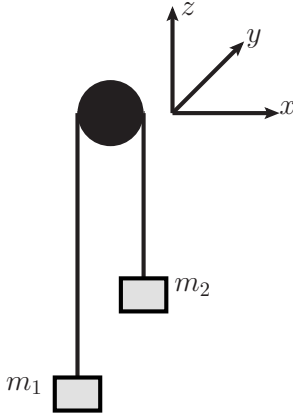
3. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit und die Trajektorie der Rakete als Funktion der Zeit.
4. Finden Sie eine Bedingung für einen erfolgreichen Start der Rakete. *Hinweis: Entwickeln Sie die Geschwindigkeit für kleine Zeiten  $t \ll \tau$ .*

### Aufgabe 2: Atwood'sche Fallmaschine

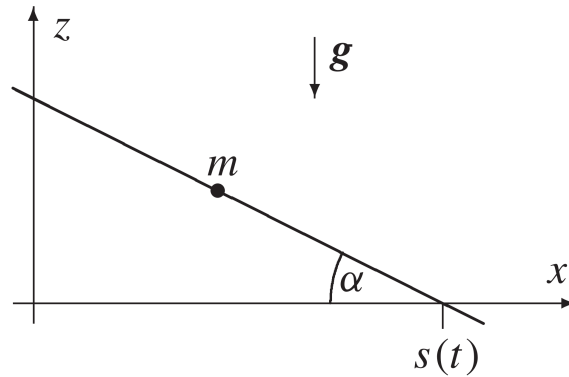
Im dreidimensionalen Raum im Schwerfeld der Erde mit Beschleunigung  $g$  ist im Ursprung eine frei drehbare Rolle befestigt. Über diese läuft eine Schnur mit fester Länge  $l$ , die zwei Massen  $m_1$  an Position  $z_1$  und  $m_2$  an Position  $z_2$  verbindet, die sich in nur  $z$ -Richtung frei bewegen können. Somit können Sie die  $x$ - und  $y$ -Richtung vernachlässigen.

1. Welche Zwangsbedingungen gibt es? Finden Sie passende generalisierte Koordinaten für die verbleibenden Freiheitsgrade.
2. Stellen Sie die Lagrange-Funktion auf, indem Sie zuvor folgende Schritte ausführen:

- (a) Beginnen Sie mit dem Potential  $V$  des Gesamtsystems (beide Massen). Das Potential einer Masse  $m$  im Schwerfeld ist gegeben durch  $V = -mgz$ .
- (b) Berechnen Sie nun die kinetische Gesamtenergie  $T$  des Systems.
3. Bestimmen Sie nun die Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen.



Atwood'sche Fallmaschine



Massepunkt auf schiefer Ebene

### Aufgabe 3: Beschleunigte schiefe Ebene

Ein Massepunkt mit den Koordinaten  $(x, z)$  gleitet reibungsfrei auf einer schiefen Ebene, die in  $x$ -Richtung mit der konstanten Beschleunigung  $a$  beschleunigt wird,  $s(t) = at^2/2$  (siehe Grafik oben rechts). Die Neigung  $\alpha$  der schiefen Ebene ist konstant.

1. Stellen sie die Zwangsbedingung  $A(x, z, t) = 0$  auf indem Sie die  $x$ -Koordinate und die  $z$ -Koordinate des Massepunktes in Relation setzen. Nutzen Sie hierfür das rechtwinklige Dreieck, deren Hypotenuse die Strecke zwischen Massepunkt und  $s(t)$  ist.
2. Berechnen Sie nun die Zwangskraft  $Z_i(x, z, t)$  komponentenweise ( $i = x, z$ ) mittels

$$Z_i(x, z, t) = \lambda \cdot \frac{\partial A(x, z, t)}{\partial x_i}.$$

Stellen Sie nun die Lagrangegleichungen 1. Art für den Massepunkt auf. Nehmen Sie dabei an, dass die Schwerkraft  $F = -mg$  in  $z$ -Richtung auf die Masse wirkt.

3. Um  $\lambda$  zu bestimmen, differenzieren Sie die Zwangsbedingung  $A(x, z, t)$  zweimal nach der Zeit und setzen Sie diese dann in die vorher bestimmte Bewegungsgleichung ein.
4. Lösen Sie nun die Bewegungsgleichungen. Beginnen Sie mit  $x(t)$  ( $\dot{x}(t=0) = v_0$ ,  $x(t=0) = x_0$ ) und verwenden Sie dann die Zwangsbedingung um  $z(t)$  zu bestimmen.