Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: PD Dr. Stefan Gieseke – Übung: Dr. Matthias Kerner

---

Übungsblatt 3

Besprechung: Di.14.05.2024

Am Dienstag, den 7.5.24 findet ausnahmsweise keine Übung statt. Die Lösung dieses Übungsblattes wird ab Montag, den 6.5.24 online veröffentlicht und am Dienstag, den 14.5.24 zusammen mit Übungsblatt 4 besprochen.

Aufgabe 1: Wurf eines Balles

Betrachten Sie den Wurf eines Balles mit der Masse m im konstanten Gravitationsfeld, d.h. eine Bewegung beschrieben durch die Bewegungsgleichung

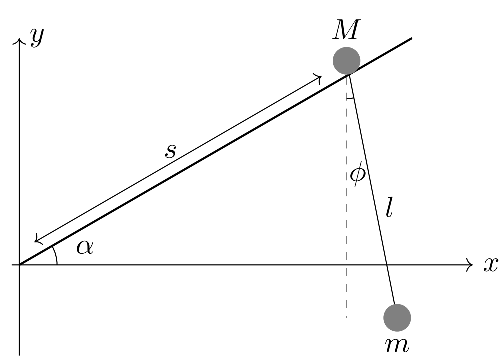
$$m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F} = -mg\vec{e}_z$$

mit den Anfangsbedingungen $\vec{r}(t=0) = (0,0,0)$ und $\vec{v}(t=0) = (v\cos\alpha, 0, v\sin\alpha)$, wobei α den anfänglichen Wurfwinkel bezeichnet und $g \approx 9.81m/s^2$ die Erdbeschleunigung.

1. Bestimmen Sie die Form der Bahnkurve, indem Sie die Bewegungsgleichung unter Benutzung der Anfangsbedingungen integrieren, und berechnen Sie dadurch $\vec{r}(t)$ (am besten Komponentenweise).
   (a) Welche Form haben $x(t)$ und $z(t)$?
   (b) Drücken Sie dann z in Abhängigkeit von x aus. Welcher Form entspricht $z(x)$?
2. Bei welchem anfänglichen Winkel $\alpha_{\max}$ erreicht man die maximale Wurfdistanz $x_{\max}$?
   Hinweis: Hierfür muss zunächst die Zeit t_{fin} berechnet werden, wobei $z(t_{\text{fin}}) = 0$, welche eingesetzt in $x(t)$ eine Gleichung für $x(\alpha)$ ergibt. Für ein bestimmtes $\alpha_{\max}$ erreicht $x(\alpha)$ ein Maximum $x_{\max}$.

Aufgabe 2: Ein gekoppeltes System

Ein Block der Masse M gleite reibungsfrei unter dem Einfluss der Schwerkraft auf einer schiefen Ebene mit Neigungswinkel α gegen die Horizontale. An seinem Schwerpunkt sei die Masse m über einen masselosen Faden der Länge l befestigt.



1. Wie lautet die Lagrange-Funktion $L(\phi, s, \dot{\phi}, \dot{s})$?

2. Zeigen Sie, dass eine Lösung $\phi(t) = \phi_0 = \text{const}$ existiert.

3. Geben Sie eine geschlossene Differentialgleichung für ϕ an. Lösen Sie diese für $M \gg m$ und kleine Winkelausschläge ($\phi \approx \alpha$).

Aufgabe 3: Bewegung im kugelsymmetrischen Potential

Die Bewegung eines Teilchens in einem kugelsymmetrischen Potential V soll mittels Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) beschrieben werden. Diese sind gegeben durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\phi\sin\theta \\ r\sin\phi\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

1. Ermitteln Sie zunächst die kinetische Energie $T = m\dot{\vec{x}}^2$ des Teilchens in Kugelkoordinaten. Hierzu führen Sie die folgende Schritte aus:

   (a) Bestimmen Sie die Richtungsvektoren $\vec{k}_{q_i}$ für die Kugelkoordinaten $q_i = (r, \theta, \phi)$ mittels $\vec{k}_{q_i} = \partial\vec{x}/\partial q_i$ und bilden Sie die zugehörigen normierten Einheitsvektoren $\vec{e}_{q_i} = \vec{k}_{q_i}/|\vec{k}_{q_i}|$.

   (b) Zeigen Sie, dass sie

   $$\dot{\vec{x}} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\vec{x}}{\partial q_i}$$

   mit Hilfe der Einheitsvektoren schreiben können als:

   $$\dot{\vec{x}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\phi}\vec{e}_\phi$$

   (c) Berechnen Sie nun die kinetische Energie T in Kugelkoordinaten. Sie können hierbei die Orthonormalität der Einheitsvektoren nutzen.

2. Bilden Sie die Lagrangefunktion L für ein Teilchen mit Masse m im kugelsymmetrischen Potential $V = V(r, t)$:

   (a) Welche Koordinate $q_i = (r, \theta, \phi)$ ist zyklisch?

   (b) Ermitteln Sie den dazugehörigen zeitlich konstanten verallgemeinerten Impuls $p_\beta = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta}$.