Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: PD Dr. Stefan Gieseke – Übung: Dr. Matthias Kerner

Übungsblatt 5

Besprechung: Di.28.05.2024

Aufgabe 1: Eichtransformationen der Lagrange-Funktion

Unter einer Eichtransformation eines Feldes F versteht man allgemein eine Abbildung $F \to F'$, welche seine Bewegungsgleichungen nicht ändert.

Die Lagrange-Funktion L eines Teilchens werde durch die folgende Eichtransformation modifiziert:

$$L'(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} G(\vec{q}, t).$$

Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen für L' gleich zu denen von L sind, indem Sie sie explizit berechnen.

Aufgabe 2: Variationsrechnung - Kürzester Weg auf Zylindermantel

Wie in der Vorlesung motiviert ist die Lagrange-Mechanik eng verknüpft mit dem Variationsprinzip, welches erlaubt für viele mathematische Problemstellungen extremale Lösungen zu ermitteln. In der Vorlesung war dies z.B. die kürzeste Verbindung zweier Punkte. Wir wiederholen diese Aufgabe auf einem Zylindermantel, um gleichzeitig verschiedene Koordinatensystem kennenzulernen.

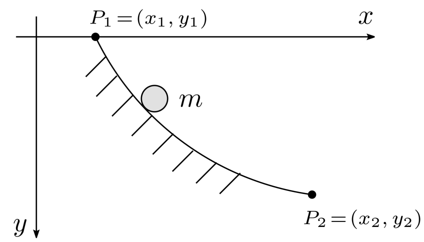
1. Nutzen Sie Zylinderkoordinaten in der Form $\vec{r} = (x, y, z) = (R\cos\phi, R\sin\phi, z)$ und drücken Sie ein Wegelement $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}$ durch Zylinderkoordinaten aus. Zeigen Sie so, dass der Weg zwischen den Punkten A und B gegeben ist durch:

   $$S = \int_A^B \mathrm{d}s = \int_A^B \mathrm{d}z \sqrt{R^2 \phi'(z)^2 + 1}$$

   Hinweis: Sie brauchen Elemente der in der Übung schonmal angesprochenen Jacobi-Matrix. Der Radius R sei konstant. Somit ist $\mathrm{d}R = 0$.

2. Finden Sie den minimalen Weg S. Nutzen Sie für den Integranden die Euler-Lagrange-Gleichungen und zeigen Sie, dass dies auf eine Gerade auf dem (ausgerollten) Zylinder-mantel führt.

Aufgabe 3: Brachistochronen



Eine in Ruhe befindliche Kugel der Masse m rolle in der xy-Ebene reibungsfrei unter dem Einfluss der Schwerkraft entlang einer Strecke s (siehe Bild), welche in analytischer Form durch die Funktion $y(x)$ beschrieben werden soll. Im vorliegenden Fall sei die potentielle Energie im Gravitationspotential mit Bezug auf $y = 0$ gegeben durch $E_{pot} = -mgy$. Die Kugel benötige die Zeit t_{ges} um von einem Punkt $P_1 = (x_1, y_1 = 0)$ zu einem anderen Punkt $P_2 = (x_2, y_2)$ auf der Strecke s zu gelangen. Im folgenden sollen Sie nun die Funktion $y(x)$, welche die benötigte Zeit t_{ges} minimiert, mittels mehrerer Teilfaugaben bestimmen.

1. Gegeben sei die Euler-Lagrange-Gleichung in der Form

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

wobei i.A. $F = F\big(y(x), y'(x), x\big)$. Diese gilt für F und $y(x)$, falls für die Funktion $y(x)$ das folgende Integral stationär wird:

$$I = \int F\big(y(x), y'(x), x\big)\, dx$$

Zeigen Sie zunächst, dass wenn F nicht explizit von x abhängt, also $F = F\big(y(x), y'(x)\big) \neq F\big(y(x), y'(x), x\big)$, nach einmaliger Integration der Euler-Lagrange-Gleichung auch der folgende Zusammenhang gilt:

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = konst.$$

Hinweis: Es genügt zu zeigen, dass $\frac{d}{dx}\big(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\big) = 0$. Verwenden Sie dabei zunächst, dass im vorliegenden Fall die totale Ableitung von F nach x durch $\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{dy'}{dx}$ gegeben ist. Benutzen Sie dann im Weiteren die Euler-Lagrange-Gleichung.

2. Lösen Sie nun das Brachistochronenproblem, indem Sie wie folgt vorgehen:

   (a) Die benötigte Zeit t_{ges} durch folgendes Integral berechnet werden:

$$t_{\text{ges}} = \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{v(s)}$$

   wobei ds ein infinitesimal kleines Stück auf der Strecke s bezeichnet und $v(s)$ die Geschwindigkeit in jedem Punkt von s. Erinnern Sie sich nun daran, dass ds in Abhängigkeit von y' umparametrisiert werden kann zu $ds = \sqrt{1 + y'^2(x)}dx$ (siehe Vorlesung). Verwenden Sie nun noch Energieerhaltung, um die Geschwindigkeit v als Funktion in Abhängigkeit von y auszudrücken, um so letztlich einen Ausdruck für t_{ges} in der Form

$$I = \sqrt{2g}t_{\text{ges}} = \int F\big(y(x), y'(x), x\big)\, dx \tag{1}$$

   zu erhalten. Wie sieht $F\big(y(x), y'(x), x\big)$ aus?

(b) Verwenden Sie nun $F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = konst. = c_1$, wobei c_1 eine Integrationskonstante bezeichnet, um y' in Abhängigkeit von y und c_1 darzustellen.

(c) Durch leichtes Umschreiben (mit der Definition $\frac{1}{c_1^2} = 2r_0$) ergibt sich
$y' = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2r-y}{y}}$ und somit

$$\int \sqrt{\frac{y}{2r-y}}\, dy = \int dx = x - c_2\,,$$

wobei c_2 eine weitere Integrationskonstante bezeichnet, welche kollektiv die Integrationskonstanten der x- als auch y-Integration beinhaltet. Lösen Sie nun das y-Integral durch die Variablensubstitution

$$y \to t : y(t) = 2r_0 \sin^2(\frac{t}{2})\,.$$

Hinweis: Verwenden Sie das Integral

$$\int \sin^2(at)\, dt = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4a}\sin(2at)\,.$$

(d) Welcher Form entspricht die Parameterdarstellung $\vec{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$?
Hinweis: Schreiben Sie $y(t)$ in die Form $y(t) = 2r_0 \sin^2(\frac{t}{2}) = r_0\big(1 - \cos(t)\big)$.

(e) Um die endgültige Lösung zu erhalten, müssen noch die Integrationskonstanen c_1 (bzw. r_0) und c_2 bestimmt werden. Um c_2 zu bestimmen genügt es die Anfangsbedingungen in $P_1 = (x_1, y_1)$ heranzuziehen, wobei man hier der Einfachheit halber $x_1 = x(t_1 = 0) = 0$ wählt.
Hinweis: Um c_1 (bzw. r_0) zu bestimmen schreibt man die entsprechenden Bedingungen im Endpunkt $P_2 = (x_2, y_2) = \big(x(t_2), y(t_2)\big)$ auf, was auf ein Gleichungssystem zweier Gleichungen für die zwei Unbekannten r_0 und t_2 führt. Dieses Gleichungssystem kann analytisch nicht gelöst werden. Die Werte für r_0 und t_2 müssen daher numerisch bestimmt werden, in Abhängigkeit von x_2 und y_2, womit Sie sich hier aber nicht weiter beschäftigen sollen.