

Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: PD Dr. Stefan Gieseke – Übung: Dr. Matthias Kerner

Übungsblatt 6

Besprechung: Di. 4.6.2024

Aufgabe 1: Hamilton Formalismus

Für ein Punktteilchen mit der kinetischen und der potentiellen Energie T bzw. V sind die Lagrange- und die Hamiltonfunktion gegeben durch

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = T(\dot{\vec{q}}) - V(\vec{q}) \quad \text{bzw.} \quad H(\vec{q}, \vec{p}) = T(\vec{p}) + V(\vec{q})$$

Durch $\vec{q}$, $\dot{\vec{q}}$ und $\vec{p}$ sind jeweils die generalisierten Koordinaten, Geschwindigkeiten bzw. Impulse des Punktteilchens definiert. Die potentielle Energie sei beliebig ungleich Null. Die kinetische Energie ist wie üblich gegeben durch $T(\dot{\vec{q}}) = m\dot{\vec{q}}^2/2$. Die Hamiltonfunktion folgt aus der Lagrangefunktion durch die Legendre-Transformation

$$H(\vec{q}, \vec{p}) = \dot{\vec{q}}\vec{p} - L = \sum_i \dot{q}_i p_i - L$$

wobei die generalisierten Impulse gegeben sind durch $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$.

- Die Euler-Lagrange-Gleichungen, welche Sie bereits kennen, lauten:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(\vec{q}, \dot{\vec{q}})}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L(\vec{q}, \dot{\vec{q}})}{\partial q_i} = 0$$

und stellen für $i = 1, 2, 3$ je eine Differentialgleichung zweiter Ordnung dar.

- Die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen lauten

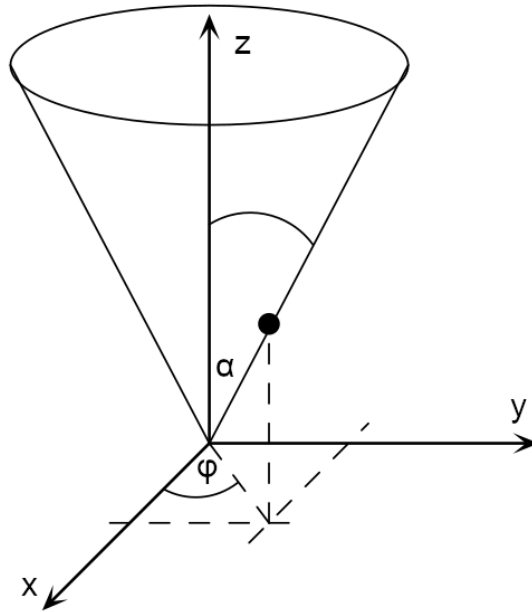
$$\frac{\partial H(\vec{q}, \vec{p})}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \frac{\partial H(\vec{q}, \vec{p})}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

mit $i = 1, 2, 3$ und stellen ein System von dreimal zwei gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung dar.

1. Gegeben sind kartesische Koordinaten, d.h. $\vec{q} = \vec{x}$. Bestimmen Sie zunächst die generalisierten Impulse in Abhängigkeit der generalisierten Geschwindigkeiten.
2. Dreht man diese Abhängigkeit um, so kann man die kinetische Energie in Abhängigkeit der generalisierten Impulse ausdrücken. Wie sieht die kinetische Energie $T(\vec{p})$, in Abhängigkeit der generalisierten Impulse $\vec{p}$, aus?
3. Stellen Sie nun die Hamiltonfunktion auf und leiten Sie die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen daraus ab. Überlegen Sie sich, daß diese äquivalent zu den Newton'schen Bewegungsgleichungen für ein Punktteilchen der Masse m im Potential $V(\vec{x})$ sind.

Aufgabe 2: Hamilton vs. Lagrange

Ein Punktteilchen der Masse m gleitet reibungsfrei auf der Innenseite eines Kreiskegels, wobei die Achse des Kegels parallel zur z -Achse orientiert ist. Die Gravitationskraft wirke in die negative z -Richtung und der Winkel α zwischen der z -Achse und der Kegeloberfläche sei konstant.



Die unabhängigen Koordinaten seien z und φ , wobei φ der Winkel zwischen der x -Achse und der Projektion des Ortsvektors des Teilchens in der x - y -Ebene ist.

1. Wie lautet die Zwangsbedingung?
2. Stellen Sie die Lagrangefunktion auf und benutzen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen um die folgenden Bewegungsgleichungen herzuleiten:

$$\begin{aligned} 2\dot{z}\dot{\varphi} + z\ddot{\varphi} &= 0 \\ \ddot{z}(1 + \tan^2 \alpha) - z\dot{\varphi}^2 \tan^2 \alpha + g &= 0 \end{aligned}$$

3. Setzen Sie die Rechnung nun im Hamilton-Formalismus fort.
 - a) Wie lauten die generalisierten Impulse für das Teilchen auf dem Kegel?
 - b) Schreiben Sie die Hamiltonfunktion auf und leiten Sie die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen her.
 - c) Zeigen Sie dann, dass diese zu den bereits in Aufgabenteil a) hergeleiteten Bewegungsgleichungen äquivalent sind.
4. Lösen Sie die in Aufgabenteil a) angegebenen Bewegungsgleichungen für den Fall $z = \text{konst}$ und bestimmen Sie den Ausdruck für die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$.

Aufgabe 3: Teilchen im Geiger-Müller Zählrohr

Ein Geiger-Müller Zählrohr ist aus einer zylinderförmigen Kathode und einem Anodendraht in der Mitte aufgebaut. Die potentielle Energie eines Teilchens der Masse m im Geiger-Müller Zählrohr ist gegeben durch

$$V(\rho) = V_0 \ln \frac{\rho}{\rho_0}$$

wobei V_0 und ρ_0 Konstanten sind. Dabei werden Zylinderkoordinaten (ρ, ϕ, z) verwendet, wobei der Anodendraht mit der z -Achse übereinstimmt. Der Radius der Kathode ist gegeben durch ρ_0 .

1. Drücken Sie einen beliebigen Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ in Zylinderkoordinaten aus.
2. Finden Sie die Lagrange-Funktion $L(\rho, \phi, z)$.
3. Stellen Sie die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen auf.
4. Wie lautet die Hamilton-Funktion?
5. Stellen Sie die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen auf.
6. Finden Sie alle Erhaltungssätze des Systems.