

Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: PD Dr. Stefan Gieseke – Übung: Dr. Matthias Kerner

Übungsblatt 7

Besprechung: Di. 11.6.2024

Aufgabe 1: Gekoppelter harmonischer Oszillator als Eigenwertproblem

Die Bewegungsgleichung eines gekoppelten harmonischen Oszillators, welcher Ihnen auf Blatt 4 in Form zweier gekoppelter Pendel begegnet ist, ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\ddot{\phi}_1 + \frac{g}{l}\phi_1 + \frac{k}{m}(\phi_1 - \phi_2) &= 0, \\ \ddot{\phi}_2 + \frac{g}{l}\phi_2 + \frac{k}{m}(\phi_2 - \phi_1) &= 0.\end{aligned}$$

Dieser Satz zweier gekoppelter linearer Differentialgleichungen kann, durch entsprechende Normalkoordinaten entkoppelt und gelöst werden. Sollten jedoch die Normalkoordinaten nicht so einfach ersichtlich sein, kann die DGL gegebenenfalls durch Lösen des Eigenwertproblems entkoppelt werden.

1. Schreiben Sie dazu das obige System gekoppelter Gleichungen in einer Matrixdarstellung der Form

$$\ddot{\vec{\phi}} = \mathbf{M}\vec{\phi} \quad \text{mit} \quad \vec{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix},$$

wobei $\mathbf{M}$ eine 2×2 -Matrix darstellt. Wie sieht $\mathbf{M}$ explizit aus?

2. Führen Sie dies nun durch den Ansatz $\vec{\phi} = \vec{v} \cos(\omega t + \beta)$, wobei $\vec{v}$ die konstanten Komponenten v_1 und v_2 besitzt, in eine Eigenwertgleichung für $\mathbf{M}$ über und bestimmen Sie die Eigenwerte ω_1 und ω_2 bzw. die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{v}^{(1)}$ und $\vec{v}^{(2)}$.
3. Bestimmen Sie nun die allgemeine Lösung für $\vec{\phi}$.

Hinweis: Bedenken Sie, dass jede Eigenschwingung mit Eigenwert ω_i allgemein mit einer unabhängigen Phase β_i und Amplitude A_i beschrieben werden kann.

Aufgabe 2: Symmetrien und Erhaltungsgrößen am Beispiel des harmonischen Oszillators

Eine Transformation $T : (x, \dot{x}, t) \rightarrow (x', \dot{x}', t; \alpha)$, wobei α einen reellen Parameter der Transformation bezeichnet, ist eine Symmetrietransformation, wenn sie die Lagrangefunktion invariant lässt, bis auf einen Term der eine totale zeitliche Ableitung darstellt:

$$\mathcal{L}'(x', \dot{x}', t; \alpha) = \mathcal{L}(x', \dot{x}', t) + \frac{d}{dt}F(x', t; \alpha)$$

1. Zeigen Sie, dass die Transformation

$$T : (x, \dot{x}, t) \rightarrow (x' - \alpha \cos(\omega t), \dot{x}' + \alpha \omega \sin(\omega t), t; \alpha),$$

mit $\omega^2 = k/m$, eine Symmetrietransformation des harmonischen Oszillators ist. Dabei kann die Eichfunktion $F(x', t; \alpha)$ auf die Form

$$F(x', t; \alpha) = \alpha m \omega x' \sin(\omega t) + \alpha^2 f(t)$$

gebracht werden.

Hinweis 1: Die Lagrangefunktion des harmonischen Oszillators in $(x, \dot{x}, t)$ lautet $\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$.

Hinweis 2: $\frac{d}{dt} \sin(2\omega t) = 2\omega \cos(2\omega t) = 2\omega(\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t))$.

2. $\mathcal{L}$ heißt in diesem Fall symmetrisch unter der Transformation T , und nach dem Noether-Theorem (womit wir uns hier nicht weiter beschäftigen wollen) stellt die folgende Größe J dann eine Erhaltungsgröße dar:

$$J = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \frac{\partial x(x', t; \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} - \frac{\partial F}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}$$

Wie sieht die Erhaltungsgröße J für den obigen Fall aus?

In der Vorlesung wurde die Poisson-Klammer zweier Observablen F und G vorgestellt, welche für einen beliebigen Satz von s generalisierten Koordinaten bzw. Impulsen folgendermaßen definiert ist:

$$\{F, G\} = [F, G] = \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right)$$

Weiter wurde gezeigt, dass sich die totale zeitliche Ableitung einer Observablen f mittels der Poisson-Klammer in einfacher Form schreiben lässt als

$$\frac{d}{dt} f = [f, H] + \frac{\partial}{\partial t} f$$

wobei H die Hamiltonfunktion des Systems darstellt. Für die generalisierten Koordinaten und Impulse selbst führt dies auf

$$\dot{q}_j = [q_j, H] \quad \text{und} \quad \dot{p}_j = [p_j, H]$$

und i.A. gilt, dass eine Größe A erhalten ist, falls:

$$[A, H] = 0 \quad \text{falls} \quad \frac{\partial A}{\partial t} = 0$$

oder allgemeiner, wenn gilt:

$$[A, H] + \frac{\partial A}{\partial t} = 0$$

3. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen des harmonischen Oszillators mittels der Poisson-Klammern der generalisierten Koordinaten und Impulse mit dessen Hamiltonoperator auf.
4. Zeigen Sie, dass die Größe $A = -m(\dot{x} \cos(\omega t) + \omega x \sin(\omega t))$ eine Erhaltungsgröße ist. Schreiben Sie dazu A zunächst in Abhängigkeit von p und x um, anstelle von $\dot{x}$ und x .

Aufgabe 3: Teilchen in einem Zentralfeld

Ein Teilchen der Masse m bewege sich in einem Zentralfeld.

1. Berechnen Sie die Lagrange-Funktion. Welche generalisierten Koordinaten sind günstig?
2. Wie lautet die Hamilton-Funktion?
3. Zeigen Sie mit Hilfe der Poisson-Klammer dass die z -Komponente $L_z = xp_y - yp_x$ des Drehimpulses ein Integral der Bewegung ist!