Karlsruher Institut für Technologie

Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: PD Dr. Stefan Gieseke – Übung: Dr. Matthias Kerner

---

Übungsblatt 9

Besprechung: Di. 25.6.2024

Aufgabe 1: Interferenz

Wir betrachten zwei interferierende ebene Wellen $E_1 = E_0 e^{i(\vec{k}_1 . \vec{r} - \omega t)}$ bzw. $E_2 = E_0 e^{i(\vec{k}_2 . \vec{r} - \omega t)}$ in einem Doppelspaltexperiment. Nehmen Sie an, der Spalt sei in z–Richtung unendlich lang ausgedehnt, und die beiden Spalte haben in y-Richtung den Abstand a voneinander. Betrachten Sie dann den Strahlengang in der xy–Ebene (wie im Bild dargestellt).

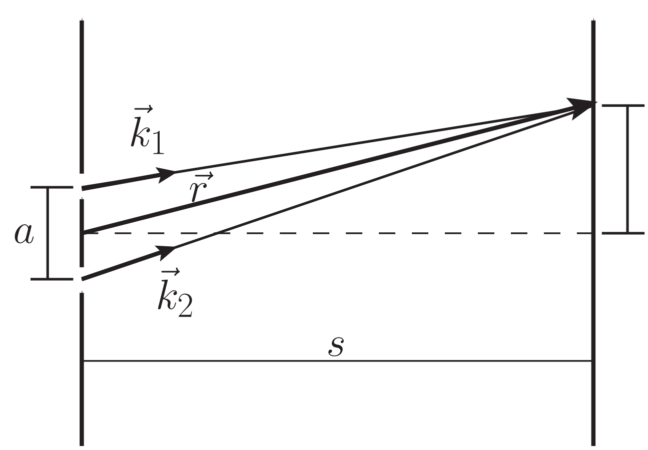
1. Berechnen sie die Intensität der beiden Wellen. Die Intensität ist dabei gegeben als Quadrat der Amplitudensumme,

$$I = \langle |E_1 + E_2|^2 \rangle \quad \text{wobei} \quad \langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t')dt' \ .$$

2. Leiten Sie eine Bedingung für die Maxima und Minima der Intensität her und nehmen Sie kurz Stellung bezüglich der Abhängigkeit in der darin enthaltenen Funktion $\cos^2(...)$.

3. Stellen Sie sich vor, Sie sollen eine Positionsbestimmung eines Teilchens vornehmen, indem Sie den Spaltabstand a immer kleiner wählen, um die räumliche Koordinate beim Durchgang immer genauer festzulegen. Was geschieht mit dem Interferenzmuster?

   Hinweis: Parametrisieren Sie zunächst die Wellenvektoren $\vec{k}_1$ und $\vec{k}_2$ bzw. den Vektor $\vec{r}$ (siehe Bild) durch die Parameter des Experiments. Die Normierung der Vektoren $\vec{k}_1$ und $\vec{k}_2$ ist so zu wählen, dass diese gleich lang sind. Man nimmt dann an, dass die Distanz s zwischen Blende und Schirm viel grösser ist als alle anderen Längen, z.B. a oder y, und dass der Winkel zwischen $\vec{k}_1$ und $\vec{k}_2$ sehr klein ist.



Aufgabe 2: Wellenfunktion eines freien Teilchens

1. Die zeitabhängige Wellenfunktion eines freien Teilchens in einer Dimension ist gegeben durch

$$\psi(x,t) = \int \frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{2\pi\hbar}} g(p) e^{\mathrm{i}px/\hbar} e^{-\mathrm{i}E(p)t/\hbar}$$

mit der Dispersion $E(p) = p^2/2m$ und

$$g(p) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} \exp\Big(-\frac{p^2}{4\sigma^2}\Big)$$

Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion die Schrödingergleichung eines freien Teilchens erfüllt.

2. Zeigen Sie, durch Einsetzen der freien Wellenfunktion, dass die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}(x,t) = 0$$

mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x,t) = |\psi(x,t)|^2$ und dem Wahrscheinlichkeitsstroms

$$\vec{j}(x,t) = \frac{\hbar}{2\mathrm{i}m}\big(\psi^*(x,t)\vec{\nabla}\psi(x,t) - (\vec{\nabla}\psi^*(x,t))\psi(x,t)\big)$$

erfüllt ist.

Aufgabe 3: Operatoren in der Quantenmechanik

1. Der Kommutator für zwei lineare Operatoren A und B ist definiert durch

$$[A,B] \coloneqq AB - BA$$

Zeigen Sie die folgende Eigenschaften des Kommutators, wenn A, B, C lineare Operatoren und $\lambda \in \mathbb{R}$ sind:

- Antisymmetrie: $[A,B] = -[B,A]$
- Linearität: $[\lambda A + B, C] = \lambda[A,C] + [B,C]$
- Prodktregel: $[A, BC] = [A,B]C + B[A,C]$
- Jacobi-Indentität: $\big[A,[B,C]\big] + \big[B,[C,A]\big] + \big[C,[A,B]\big] = 0$

2. In der Quantenmechanik werden die physikalischen Observablen als Operatoren identifiziert. Die Ortskoordinaten und Impulse von Teilchen werden nun durch den Ortsoperator X bzw. Impulseoperator P dargestellt, die auf die Wellenfunktion $\psi(\vec{x},t)$ wirken. Dies ist eine Eigenwertgleichung:

$$X_i\psi(\vec{x},t) = x_i\psi(\vec{x},t)$$
$$P_i\psi(\vec{x},t) = p_i\psi(\vec{x},t)$$

wobei $x_i, p_i \in \mathbb{R}$ den gemessen Orten bzw. Impulsen entspricht. In der *Ortsraumdarstellung* gilt:

$$X_i\psi(\vec{x},t) = x_i\psi(\vec{x},t)$$
$$P_i\psi(\vec{x},t) = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x_i}\psi(\vec{x},t)$$

(a) Zeigen Sie in dieser Darstellung die *kanonischen Vertauschungsrealtionen*[1]

$$\big[X_i, P_j\big]\psi(\vec{x},t) = \mathrm{i}\hbar\delta_{ij}\psi(\vec{x},t)$$

(b) Der Hamilton Operator für ein freies Teilchen lautet $H = \sum_i P_i^2/2m$. Zeigen Sie

$$\big[X_i, H\big]\psi(\vec{x},t) = \frac{\mathrm{i}\hbar}{m}P_k\psi(\vec{x},t)$$

[1]Das Kronecker-Delta ist gegeben durch $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$