Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: PD Dr. Stefan Gieseke – Übung: Dr. Matthias Kerner

---

Lösung Übungsblatt 3

Besprechung: Di.14.05.2024

Am Dienstag, den 7.5.24 findet ausnahmsweise keine Übung statt. Die Lösung dieses Übungsblattes wird ab Montag, den 6.5.24 online veröffentlicht und am Dienstag, den 14.5.24 zusammen mit Übungsblatt 4 besprochen.

Aufgabe 1: Wurf eines Balles

Betrachten Sie den Wurf eines Balles mit der Masse m im konstanten Gravitationsfeld, d.h. eine Bewegung beschrieben durch die Bewegungsgleichung

$$m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F} = -mg\vec{e}_z$$

mit den Anfangsbedingungen $\vec{r}(t=0) = (0,0,0)$ und $\vec{v}(t=0) = (v\cos\alpha, 0, v\sin\alpha)$, wobei α den anfänglichen Wurfwinkel bezeichnet und $g \approx 9.81m/s^2$ die Erdbeschleunigung.

1. Bestimmen Sie die Form der Bahnkurve, indem Sie die Bewegungsgleichung unter Benutzung der Anfangsbedingungen integrieren, und berechnen Sie dadurch $\vec{r}(t)$ (am besten Komponentenweise).
   (a) Welche Form haben $x(t)$ und $z(t)$?
   (b) Drücken Sie dann z in Abhängigkeit von x aus. Welcher Form entspricht $z(x)$?
2. Bei welchem anfänglichen Winkel $\alpha_{\max}$ erreicht man die maximale Wurfdistanz $x_{\max}$?
   Hinweis: Hierfür muss zunächst die Zeit t_{fin} berechnet werden, wobei $z(t_{\text{fin}}) = 0$, welche eingesetzt in $x(t)$ eine Gleichung für $x(\alpha)$ ergibt. Für ein bestimmtes $\alpha_{\max}$ erreicht $x(\alpha)$ ein Maximum $x_{\max}$.

Lösung

1. Die Bewegungsgleichung des Balles ist gegeben durch

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} = -mg\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}.$$

   Durch einmalige Integration über t erhalten wir

$$m\vec{v} = m\dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} v_{0,x} \\ v_{0,y} \\ v_{0,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} v\cos\alpha \\ 0 \\ v\sin\alpha \end{pmatrix},$$

   wobei im letzten Schritt die Anfangsbedingung für $\vec{v}(t=0)$ eingesetzt wurde. Nochmalige Integration führt auf

$$m\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 + \begin{pmatrix} v\cos\alpha \\ 0 \\ v\sin\alpha \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 + \begin{pmatrix} v\cos\alpha \\ 0 \\ v\sin\alpha \end{pmatrix} t$$

(a) $x(t) = v\cos\alpha\, t \quad \rightarrow \quad$ Lineare Abhängigkeit von t. $\dot{x}$ konstant.
$z(t) = -\frac{1}{2}mgt^2 + v\sin\alpha\, t \quad \rightarrow \quad$ Quadratische Abhängigkeit von t. $\dot{z}$ nimmt mit t ab.

(b)

$$t = \frac{x}{v\cos\alpha}$$
$$\rightarrow \quad z = -\frac{1}{2}g\frac{1}{v^2\cos^a\alpha}x^2 + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}x$$

2.

$$z(t) = 0 = -\frac{1}{2}gt(t - 2\frac{v\sin\alpha}{g})$$
$$\rightarrow t_{fin} = 2\frac{v}{g}\sin\alpha.$$

Damit ist die Wurfweite gegeben durch

$$x_{fin} = x(t_{fin}) = vt_{fin}\cos\alpha = 2\frac{v^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha.$$

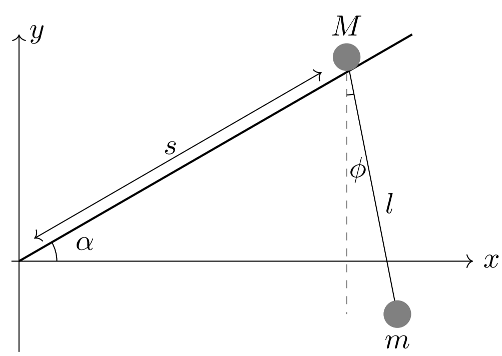
Um die maximale Wurfweite zu bestimmen, leiten wir dies nach α ab und setzen dies gleich 0

$$0 = \frac{\partial x_{fin}}{\partial\alpha} = 2\frac{v^2}{g}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 2\frac{v^2}{g}\cos(2\alpha)$$

Damit erhalten wir die maximale Wurfweite für $\alpha = 45°$.

Aufgabe 2: Ein gekoppeltes System

Ein Block der Masse M gleite reibungsfrei unter dem Einfluss der Schwerkraft auf einer schiefen Ebene mit Neigungswinkel α gegen die Horizontale. An seinem Schwerpunkt sei die Masse m über einen masselosen Faden der Länge l befestigt.



1. Wie lautet die Lagrange-Funktion $L(\phi, s, \dot{\phi}, \dot{s})$?

2. Zeigen Sie, dass eine Lösung $\phi(t) = \phi_0 = \text{const}$ existiert.

3. Geben Sie eine geschlossene Differentialgleichung für ϕ an. Lösen Sie diese für $M \gg m$ und kleine Winkelausschläge ($\phi \approx \alpha$).

Lösung:

1. Die kartesischen Koordinaten der Massen M und m sind

$$
\begin{aligned}
X &= s\cos\alpha & x &= X + l\sin\phi \\
Y &= s\sin\alpha & y &= Y - l\cos\phi.
\end{aligned}
$$

Die kinetische Energie des Systems ist dann gegeben durch

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{M}{2}\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2\right) + \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) \\
&= \frac{M}{2}\left(\dot{s}^2\cos^2\alpha + \dot{s}^2\sin^2\alpha\right) + \frac{m}{2}\Big(\dot{s}^2\cos^2\alpha + 2l\dot{s}\dot{\phi}\cos\alpha\cos\phi + l^2\dot{\phi}^2\cos^2\phi \\
&\qquad + \dot{s}^2\sin^2\alpha + 2l\dot{s}\dot{\phi}\sin\alpha\sin\phi + l^2\dot{\phi}^2\sin^2\phi\Big)
\end{aligned}
$$

Mit der Identität $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ lässt sich dies schreiben als

$$
T = \frac{M+m}{2}\dot{s}^2 + \frac{m}{2}l^2\dot{\phi}^2 + ml\dot{s}\dot{\phi}\cos(\alpha - \phi).
$$

Die potentielle Energie ist gegeben durch

$$
V = Mgs\sin\alpha + mg(s\sin\alpha - l\cos\phi)
$$

und damit erhalten wir die Lagrangefunktion

$$
\begin{aligned}
L &= T - V \\
&= \frac{M+m}{2}\dot{s}^2 + \frac{m}{2}l^2\dot{\phi}^2 + ml\dot{s}\dot{\phi}\cos(\alpha - \phi) - (M+m)gs\sin\alpha + mgl\cos\phi
\end{aligned}
$$

2. Die Bewegungsgleichung für s lautet

$$
\begin{aligned}
0 &= (M+m)\ddot{s} + ml\Big(\ddot{\phi}\cos(\alpha-\phi) + \dot{\phi}^2\sin(\alpha-\phi)\Big) + (M+m)g\sin\alpha \\
\Rightarrow \ddot{s} &= -g\sin\alpha + \frac{ml}{M+m}\Big(\ddot{\phi}\cos(\alpha-\phi) + \dot{\phi}^2\sin(\alpha-\phi)\Big)
\end{aligned}
$$

Für ϕ:

$$
\begin{aligned}
0 &= ml^2\ddot{\phi} + ml\dot{s}\dot{\phi}\sin(\alpha-\phi) + ml\ddot{s}\cos(\alpha-\phi) - ml\dot{s}\dot{\phi}\sin(\alpha-\phi) + mgl\sin\phi \\
\Rightarrow \ddot{\phi} &= -\frac{\ddot{s}}{l}\cos(\alpha-\phi) - \frac{g}{l}\sin\phi
\end{aligned}
$$

Für $\phi =$const erhalten wird dann:

$$
\begin{aligned}
\phi &= \phi_0 = \text{const} \\
\Rightarrow \ddot{s} &= -g\sin\alpha = -g\frac{\sin\phi_0}{\cos(\alpha-\phi_0)} \\
\Rightarrow s(t) &= s_0 + v_0 t - \frac{g}{2}t^2\sin\alpha \\
\phi(t) &= \alpha
\end{aligned}
$$

wobei s_0 und v_0 durch die Anfangsbedingung gegeben sind.

3. Die Differentialgleichung für $\ddot{s}$ können wir in die Gleichung für $\ddot{\phi}$ einsetzen:

$$\begin{aligned}\ddot{\phi} &= \frac{g}{l}(\sin\alpha\cos(\alpha-\phi) - \sin\phi) + \frac{m}{M+m}\big(\ddot{\phi}\cos(\alpha-\phi) + \dot{\phi}^2\sin(\alpha-\phi)\big)\cos(\alpha-\phi) \\ &= \frac{g}{l}(\cos\alpha\sin(\alpha-\phi) + \frac{m}{M+m}\big(\ddot{\phi}\cos(\alpha-\phi) + \dot{\phi}^2\sin(\alpha-\phi)\big)\cos(\alpha-\phi)\end{aligned}$$

Im Grenzfall $M \gg m$ gilt:

$$\begin{aligned}\frac{m}{M+m} &\to 0 \\ \Rightarrow \ddot{\phi} &\to -\frac{g}{l}\cos\alpha\sin(\phi-\alpha)\end{aligned}$$

Mit der Abkürzung

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}\cos\alpha}$$

und der Approximation für kleine Winkel $\sin(\phi-\alpha) \approx \phi - \alpha$, erhalten wir:

$$\begin{aligned}\ddot{\phi} &= -\omega^2(\phi-\alpha) \\ \Rightarrow \phi(t) &= \alpha + \hat{\phi}\sin(\omega t + \delta)\end{aligned}$$

wobei $\hat{\phi}$ und δ durch die Anfangsbedingungen gegeben sind

Aufgabe 3: Bewegung im kugelsymmetrischen Potential

Die Bewegung eines Teilchens in einem kugelsymmetrischen Potential V soll mittels Kugelkoordinaten $(r,\, \theta,\, \varphi)$ beschrieben werden. Diese sind gegeben durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ r\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

1. Ermitteln Sie zunächst die kinetische Energie $T = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2$ des Teilchens in Kugelkoordinaten. Hierzu führen Sie die folgende Schritte aus:

a) Bestimmen Sie die Richtungsvektoren $\vec{k}_{q_i}$ für die Kugelkoordinaten $q_i = (r, \theta, \varphi)$ mittels $\vec{k}_{q_i} = \frac{\partial\vec{x}}{\partial q_i}$ und bilden Sie die zugehörigen normierten Einheitsvektoren $\vec{e}_{q_i} = \frac{\vec{k}_{q_i}}{|\vec{k}_{q_i}|}$.

Lösung:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{k}_r = \frac{\partial\vec{x}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{k}_\theta = \frac{\partial\vec{x}}{\partial\theta} = r\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{k}_\varphi = \frac{\partial\vec{x}}{\partial\varphi} = r\sin\theta\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{k}_r| = \sqrt{\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta} = 1$$

$$|\vec{k}_\theta| = r\sqrt{\cos^2\theta\cos^2\varphi + \cos^2\theta\sin^2\varphi + \sin^2\theta} = r$$

$$|\vec{k}_\theta| = r\sin\theta\sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi} = r\sin\theta$$

$$\Rightarrow \vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Zeigen Sie, dass sie

$$\dot{\vec{x}} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \sum_{i=1}^{3} \frac{dq_i}{dt}\frac{\partial\vec{x}}{\partial q_i}$$

mit Hilfe der Einheitsvektoren schreiben können als

$$\dot{\vec{x}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin(\theta)\,\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi\,.$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= \sum_{i=1}^{3} \frac{dq_i}{dt}\frac{\partial\vec{x}}{\partial q_i} \\ &= \frac{dr}{dt}\vec{k}_r + \frac{d\theta}{dt}\vec{k}_\theta + \frac{d\varphi}{dt}\vec{k}_\varphi \\ &= \dot{r}\vec{e}_r + \dot{\theta}r\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}r\sin\theta\vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

c) Berechnen Sie nun die kinetische Energie T in Kugelkoordinaten. Sie können hierbei die Orthonormalität der Einheitsvektoren nutzen.

Lösung:

$$T = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)$$

2. Bilden Sie die Langrangefunktion $\mathcal{L}$ für ein Teilchen mit der Masse m im kugelsymmetrischen Potential $V = V(r,t)$.

   Lösung:

$$L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\dot{\varphi}^2) - V(r,t)$$

3. Welche Koordinate $q_i = (r, \theta, \varphi)$ ist zyklisch?

   Lösung:
   L ist unabhängig von φ und damit $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$. φ ist also eine zyklische Korrdinate.

4. Ermitteln Sie den dazugehörigen zeitlich konstanten verallgemeinerten Impuls $p_\beta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\beta}$.

   Lösung:

$$p_\varphi = mr^2 \sin^2\theta\dot{\varphi}$$