

Einführung in Theoretische Teilchenphysik

Vorlesung: Prof. Dr. M.M. Mühlleitner – Übung: Dr. D. López-Val, Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 2

Abgabe: Fr, 04.11.16, 12:00 – Besprechung: Mo, 07.11.16 11:30 Raum 12/1
 Mi, 09.11.16 9:45 Raum 10/1

Aufgabe 4: Gekoppelte Oszillatoren

20 P

Gegeben ist eine quantenmechanische Kette aus N Teilchen der Masse m mit Abstand a in der Gleichgewichtslage, die sich jeweils in einem harmonischen Potential befinden. Benachbarte Teilchen sind ebenfalls miteinander harmonisch gekoppelt. Die Auslenkungen aus dem Gleichgewicht bezeichnen wir mit q_i , die zugehörigen Impulse mit p_i . Die Kette sei geschlossen, $q_0 = q_N$, und es werden natürliche Einheiten, $\hbar = 1$, verwendet. Dann lautet der zugehörige Hamilton-Operator:

$$H = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2m} p_n^2 + \frac{m\Omega^2}{2} (q_n - q_{n-1})^2 + \frac{m\Omega_0^2}{2} q_n^2.$$

- (a) **1 P** Die absolute x -Koordinate des n -ten Massenpunktes ist gegeben durch $x_n = a_n + q_n = na + q_n$ mit $[x_n, p_m] = i\delta_{nm}$. Wie lauten also die Kommutatoren

$$[q_n, p_m], \quad [q_n, q_m], \quad [p_n, p_m]?$$

- (b) **4 P** Leiten Sie aus dem Hamilton-Operator die zugehörigen Bewegungsgleichungen in der Heisenberg-Darstellung (zeitabhängige Operatoren) ab und kombinieren Sie sie in eine gemeinsame Differentialgleichung 2. Ordnung.

- (c) **4 P** Zur Diagonalisierung des Hamiltonoperators führen wir sogenannte Normalkoordinaten Q_k und -impulse P_k als Fouriersumme ein

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{1}{\sqrt{mN}} \sum_k e^{ika_n} Q_k, & \Rightarrow Q_k &= \sqrt{\frac{m}{N}} \sum_n e^{-ika_n} q_n, \\ p_n &= \sqrt{\frac{m}{N}} \sum_k e^{-ika_n} P_k, & \Rightarrow P_k &= \frac{1}{\sqrt{mN}} \sum_n e^{ika_n} p_n. \end{aligned}$$

Begründen Sie, dass aufgrund der periodischen Randbedingungen ($e^{ikaN} = 1$) für den Summationsindex gilt: $k = \frac{2\pi\ell}{Na}$ mit ganzzahligem ℓ zwischen $-\frac{N}{2}$ (ausschließlich) und $+\frac{N}{2}$ (einschließlich).

Zeigen Sie, dass für die Fourierkoeffizienten Orthogonalitäts- und Vollständigkeitsrelationen gelten:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{ikan} e^{-ik'an} = \delta_{kk'}, \quad \frac{1}{N} \sum_k e^{ikan} e^{-ikan'} = \delta_{nn'}.$$

- (d) 3 P Zeigen Sie, dass sich der Hamiltonoperator in Normalkoordinaten und -impulsen in der Form $H = \frac{1}{2} \sum_k \left(P_k P_k^\dagger + \omega_k^2 Q_k Q_k^\dagger \right)$ schreiben lässt mit

$$\omega_k^2 = \Omega^2 \left(2 \sin \frac{ka}{2} \right)^2 + \Omega_0^2$$

Aufgrund der Hermitizität von q_n und p_n gilt: $Q_k^\dagger = Q_{-k}$, $P_k^\dagger = P_{-k}$.

- (e) 4 P Als letzten Schritt führen wir Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ein:

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left(\omega_k Q_k + iP_k^\dagger \right), \quad a_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left(\omega_k Q_k^\dagger - iP_k \right).$$

Drücken Sie den Hamiltonoperator nun durch diese aus.

Finden Sie dazu zunächst Q_k und P_k als Funktion von a_k , a_{-k}^\dagger bzw. a_{-k} , a_k^\dagger .

Berechnen Sie dann die Kommutatoren $[a_k, a_{k'}]$, $[a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger]$, $[a_k, a_{k'}^\dagger]$ mittels der entsprechenden Kommutatoren für P_k, Q_k .

- (f) 2 P Nun betrachten Sie den Kontinuumsrenzfall einer schwingenden Saite, $a \rightarrow 0$ und $N \rightarrow \infty$, wobei die Länge der Saite $L = aN$, Dichte $\rho = \frac{m}{a}$ und Steifigkeit $v^2 = (\Omega a)^2$ konstant bleiben. Es sei

$$q(x) = q_n \sqrt{\frac{m}{a}}, \quad p(x) = p_n \sqrt{\frac{1}{ma}}.$$

Schreiben Sie die Bewegungsgleichung mit diesen Ersetzungen um. Überlegen Sie sich zunächst die Bedeutung von $q_{n\pm 1}$.

- (g) 2 P Betrachten Sie schließlich noch die Verallgemeinerung auf drei Raumdimensionen, $x \rightarrow \vec{x}$, wobei die Auslenkungen eindimensional bleiben, und substituieren

$$v \rightarrow c, \quad \frac{\Omega_0^2}{c^2} \rightarrow m^2, \quad (\vec{x}, t) \equiv x, \quad q(\vec{x}, t) \rightarrow \varphi(x).$$

Wie lautet nun die Bewegungsgleichung? Kommt sie Ihnen bekannt vor?