Einführung in Theoretische Teilchenphysik

Vorlesung: Prof. Dr. M.M. Mühlleitner – Übung: Dr. D. López-Val, Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 3

Abgabe: Fr, 11.11.16, 12:00 – Besprechung: Mo, 14.11.16 11:30 Raum 12/1; Mi, 16.11.16 9:45 Raum 10/1

Aufgabe 5: Lagrangedichte eines Skalarfelds I: Invarianz $\boxed{4\text{ P}}$

Betrachten Sie die folgende Transformation der Lagrangedichte $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_i(x), \partial_\mu \varphi_i(x))$:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \partial_\mu \Lambda^\mu \,,$$

wobei die Λ^μ beliebige Funktionen der Felder $\varphi_i(x)$ sind. Zeigen Sie, dass diese Transformation die Bewegungsgleichungen unverändert lässt.

Aufgabe 6: Lagrangedichte eines Skalarfelds II: Noether-Theorem $\boxed{6\text{ P}}$

(a) $\boxed{3\text{ P}}$ Zeigen Sie, dass die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left((\partial_\mu \varphi_1)^2 + (\partial_\mu \varphi_2)^2\right) - \frac{m^2}{2}\left(\varphi_1^2 + \varphi_2^2\right) - \frac{\lambda}{4}\left(\varphi_1^2 + \varphi_2^2\right)^2$$

invariant unter der Transformation ($\vartheta \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} \varphi_1 &\to \varphi_1' = \varphi_1 \cos\vartheta - \varphi_2 \sin\vartheta & \qquad x_\mu &\to x_\mu' = x_\mu \\ \varphi_2 &\to \varphi_2' = \varphi_1 \sin\vartheta + \varphi_2 \cos\vartheta \end{aligned}$$

ist.

(b) $\boxed{3\text{ P}}$ Berechnen Sie den zugehörigen Noether-Strom

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)} \delta\varphi_i - T^{\mu\nu} \delta x_\nu$$

mit

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)} (\partial^\nu \varphi_i) - \mathcal{L} g^{\mu\nu}$$

und die Noether-Ladung

$$Q = \int \mathrm{d}^3 x J^0 \,.$$

Aufgabe 7: Lagrangedichte eines Fermionfelds $\boxed{\textbf{6 P}}$

Gegeben sei die Lagrangedichte eines freien Spin-1/2 Feldes,

$$\mathcal{L} = \psi^\dagger \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial_t} - c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} - \beta\, mc^2 \right] \psi \,,$$

sowie die sogenannte *Weyl Darstellung* für $\vec{\alpha}, \beta$,

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}; \qquad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix},$$

und die durch die Clifford Algebra $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}$ definierten γ-Matrizen,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \qquad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) $\boxed{\text{2 P}}$ Zeigen Sie, dass die Lagrangedichte $\mathcal{L}$ mit Hilfe der γ-Matrizen folgendermaßen umgeschrieben werden kann:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \left[i\hbar c \gamma^\mu \partial_\mu - mc^2 \right] \psi \qquad \text{mit} \qquad \bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0 \,.$$

(b) $\boxed{\text{2 P}}$ Leiten Sie ausgehend von der soeben hergeleiteten Lagrangedichte die kovariante Darstellung der Dirac Gleichung her:

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m)\, \psi(x) = 0 \,.$$

(c) $\boxed{\text{2 P}}$ Die allgemeine Form des Energie-Impuls-Tensors in der Feldtheorie lautet

$$T^\mu_\nu = \frac{\delta\, \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \psi)} (\partial_\nu\, \psi) + \frac{\delta\, \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \bar{\psi})} (\partial_\nu\, \bar{\psi}) - \mathcal{L}\, \delta^\mu_\nu \,.$$

Überprüfen Sie damit den Energie-Impuls-Tensor eines freuen Dirac-Feldes:

$$T^\mu_\nu = i\hbar c \bar{\psi}\, (\gamma^\mu \partial_\nu - \delta^\mu_\nu \gamma^\sigma \partial_\sigma) \psi + \delta^\mu_\nu mc^2 \bar{\psi} \psi \,.$$

Aufgabe 8: Lagrangedichte eines Vektorfelds $\boxed{\textbf{4 P}}$

Zeigen Sie, dass die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}[\partial_\mu \varphi_\nu(x)][\partial^\mu \varphi^\nu(x)] + \frac{1}{2}[\partial_\mu \varphi^\mu(x)][\partial_\nu \varphi^\nu(x)] + \frac{m^2}{2}\varphi_\mu(x)\varphi^\mu(x)$$

für das reelle Vektorfeld $\varphi^\mu(x)$ auf die Feldgleichungen

$$[g_{\mu\nu}(\Box + m^2) - \partial_\mu \partial_\nu]\varphi^\nu(x) = 0$$

führt und das Feld $\varphi^\mu(x)$ die Lorentzbedingung $\partial_\mu \varphi^\mu(x) = 0$ erfüllt.