Einführung in Theoretische Teilchenphysik

Vorlesung: Prof. Dr. M.M. Mühlleitner – Übung: Dr. D. López-Val, Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 4

Abgabe: Fr, 18.11.16, 12:00 – Besprechung: Mo, 21.11.16 11:30 Raum 12/1; Mi, 23.11.16 9:45 Raum 10/1

Aufgabe 10: Lagrangedichte des Photons $\boxed{\textbf{20 Punkte}}$

Die Lagrangedichte des Photons kann geschrieben werden als

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - J^\mu A_\mu$$

mit $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ und dem Quellterm J^μ.

(a) $\boxed{3\text{ P}}$ Wenden Sie die Eichtransformation $A^\mu(x) \to A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu f(x)$ an und zeigen Sie, dass $\mathcal{L}'$ auf dieselben Bewegungsgleichungen führt.

(b) $\boxed{7\text{ P}}$ Leiten Sie die klassische Form der Maxwell-Gleichungen (Gl. 4.2 im Skript) explizit aus

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu\,, \quad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = 0$$

her.
Zeigen Sie, dass die 4 homogenen Maxwell-Gleichungen auch aus

$$\partial^{[\mu} F^{\nu\rho]} \equiv \partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\nu F^{\rho\mu} + \partial^\rho F^{\mu\nu} = 0$$

folgen. Was passiert mit den restlichen Gleichungen dieser Formulierung?

(c) $\boxed{5\text{ P}}$ Eine spekulative Erweiterung der Elektrodynamik ergänzt den Feldstärketensor durch

$$F'^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} - \partial_\rho \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A'_\sigma$$

mit einem zweiten Potential $A'^\mu = (\varphi', \vec{A}')^T$. Zeigen Sie, dass sich die inhomogenen Maxwell-Gleichungen nicht ändern.
Wir können allerdings einen weiteren Quellenterm J'^μ hinzufügen als

$$\partial_\mu \tilde{F}'^{\mu\nu} = J'^\nu\,.$$

Wie verändern sich die Maxwell-Gleichungen dadurch?

Im folgenden betrachten wir wieder die Standard-Elektrodynamik.

(d) $\boxed{2\text{ P}}$ Zeigen Sie, dass die oben aufgeführte Lagrangedichte inkompatibel ist mit den sogenannten kanonischen Vertauschungsrelationen ($\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t A_\mu)}$)

$$[A^\mu(\vec{x},t), \pi^\nu(\vec{x}',t)] = i g^{\mu\nu} \delta(\vec{x}-\vec{x}')\,,$$
$$[A^\mu(\vec{x},t), A^\nu(\vec{x}',t)] = [\pi^\mu(\vec{x},t), \pi^\nu(\vec{x}',t)] = 0\,.$$

(e) $\boxed{3\text{ P}}$ Eine alternative Lagrangedichte, die auf Fermi zurückgeht, ist stattdessen

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\,(\partial^\mu A^\nu)\,(\partial_\mu A_\nu) - J^\mu A_\mu\,.$$

Berechnen Sie die daraus folgenden Bewegungsgleichungen. Was muss gelten, damit diese äquivalent zu den Maxwell-Gleichungen sind?