Karlsruher Institut für Technologie

WiSe 2016/17

Einführung in Theoretische Teilchenphysik

Vorlesung: Prof. Dr. M.M. Mühlleitner – Übung: Dr. D. López-Val, Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 5

Abgabe: Fr, 25.11.16, 12:00 – Besprechung: Mo, 28.11.16 11:30 Raum 12/1; Mi, 30.11.16 9:45 Raum 10/1

Aufgabe 11: Energie und Impuls des reellen Feldes — 15 Punkte

Ein reelles Skalarfeld wird mit der auf die Klein-Gordon-Gleichung führenden Lagrangedichte $\mathcal{L}_{\mathrm{KG}} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi(x))(\partial^\mu \varphi(x)) - \frac{m^2}{2}\varphi(x)^2$ beschrieben. Die Fourier-Zerlegung des quantisierten Feldes ist durch

$$\varphi(\vec{x},t) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}\left[a(\vec{p})e^{-ipx} + a^\dagger(\vec{p})e^{+ipx}\right]$$

gegeben. Außerdem gilt die Orthogonalitätsrelation

$$\int \mathrm{d}^3 x e^{-ipx} e^{ip'x} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}\,')$$

(aufgrund der Energie-Impulsbeziehung $E_p = \sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2}$ folgt daraus auch $p_0' = p_0$).

(a) $\boxed{2\text{ P}}$ Zeigen Sie, dass sich der Vernichtungsoperator schreiben lässt als

$$a(\vec{p}) = \int \mathrm{d}^3 x\, e^{ipx}\left(i\dot{\varphi}(x) + E_p \varphi(x)\right) .$$

(b) $\boxed{4\text{ P}}$ Für das Feld gelten die Kommutatorrelationen

$$[\varphi(\vec{x},t), \varphi(\vec{x}\,',t)] = [\dot{\varphi}(\vec{x},t), \dot{\varphi}(\vec{x}\,',t)] = 0\,, \quad [\varphi(\vec{x},t), \dot{\varphi}(\vec{x}\,',t)] = i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}\,')\,.$$

Berechnen Sie daraus die entsprechenden Relationen für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

$$[a(\vec{p}), a(\vec{p}\,')] = [a^\dagger(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}\,')] = 0\,, \quad [a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}\,')] = (2\pi)^3 2E_p \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}\,')\,.$$

(c) $\boxed{1\ \mathrm{P}}$ Berechnen Sie den zugehörigen Energie-Impuls-Tensor $T^{\mu}{}_{\nu}$ des Feldes.

(d) $\boxed{5\ \mathrm{P}}$ Die Energie des Feldes bestimmt sich aus $H = \int \mathrm{d}^3x \mathcal{H} = \int \mathrm{d}^3x T^0_0$. Verwenden Sie die Fourier-Zerlegung des Feldes sowie die Kommutatorregeln der Erzeuger- und Vernichteroperatoren, um zu zeigen, dass die Energie, d.h. der Hamilton-Operator, durch

$$H = \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} E_p \left[2\tilde{N}(\vec{p}) + C \right]$$

gegeben ist. Hier ist

$$N = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} a^\dagger(\vec{p}) a(\vec{p}) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \tilde{N}(\vec{p})$$

der Teilchenzahloperator und C eine, etwas ungewöhnliche, Konstante.

(e) $\boxed{3\ \mathrm{P}}$ Der Impuls des Feldes lässt sich aus $P_i = \int \mathrm{d}^3x T^0{}_i$ berechnen. Zeigen Sie, dass dies für das reelle Skalarfeld

$$\vec{P} = \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \vec{p} \left[2\tilde{N}(\vec{p}) + C \right]$$

ergibt.

Aufgabe 12: Die Zweipunkt-Korrelationsfunktion $\boxed{\textbf{5 Punkte}}$

Betrachten Sie die Zweipunkt-Korrelationsfunktion eines Klein-Gordon Feldes

$$\Delta_+ \equiv \langle \varphi(x)\varphi(y) \rangle = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2E_p} e^{-\mathrm{i}p(x-y)}$$

(a) $\boxed{\text{2 P}}$ Zeigen Sie, dass sich für gleiche Zeiten $x^0 = y^0$ die Korrelationsfunktion wie folgt ausdrücken lässt

$$\Delta_+(0,\vec{r}) \equiv \Delta_+(0,\vec{x}-\vec{y}) = -\frac{1}{8\pi^2 r}\frac{d}{dr}\int_{-\infty}^{\infty} dp\, \frac{e^{\mathrm{i}pr}}{\sqrt{(\vec{p})^2+m^2}} \quad \text{mit} \quad r \equiv |\vec{r}|, p = |\vec{p}|.$$

(b) $\boxed{\text{1 P}}$ Zeigen Sie, dass sich die Korrelationsfunktion mit Hilfe der hyperbolischen Parametrisierung weiter vereinfachen lässt zu

$$\Delta_+(0,\vec{r}) = -\frac{m}{8\pi r} H_1^{(1)}(\mathrm{i}mr)\,,$$

mit der Hankel-Funktion erster Art $H_1^{(1)}$ (siehe Hinweis).

(c) $\boxed{\text{2 P}}$ Analysieren Sie mit Hilfe der asymptotischen Erweiterung der Hankel-Funktionen das Verhalten von $\Delta_+(0,\vec{r})$ in den Grenzfällen $r \to \infty$ und $r \to 0$ Funktion. Zeigen Sie, dass diese gegeben sind durch

$$\lim_{r\to\infty} \Delta_+(0,\vec{r}) \simeq \frac{m}{8\pi r}\sqrt{\frac{2}{\pi m r}}e^{-mr} \qquad \lim_{r\to 0} \Delta_+(0,\vec{r}) \simeq \frac{1}{4\pi r^2}.$$

Interpretieren Sie jeden dieser Grenzfälle aus Sicht der Mikrokausalität.

Hinweis: Eigenschaften der Hankel-Funktion

$$H_0(\mathrm{i}y) \equiv \frac{1}{\mathrm{i}\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\vartheta\, e^{\mathrm{i}y\sinh\vartheta} \qquad \frac{d}{dr}\left[H_0^{(1)}(\mathrm{i}ay)\right] = -iaH_1^{(1)}(\mathrm{i}ay)$$

$$\lim_{y\to\infty} H_1^{(1)}(\mathrm{i}ay) = -\sqrt{\frac{2}{\pi a y}}\, e^{-ay} \qquad \lim_{y\to 0} H_1^{(1)}(\mathrm{i}ay) = -\frac{2}{ay}$$