Einführung in Theoretische Teilchenphysik

Vorlesung: Prof. Dr. M.M. Mühlleitner – Übung: Dr. D. López-Val, Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 6

Abgabe: Fr, 02.12.16, 12:00 – Besprechung: Mo, 05.12.16 11:30 Raum 12/1; Mi, 07.12.16 9:45 Raum 10/1

Aufgabe 13: Gamma-Algebra 1 — 4 Punkte

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Gamma-Matrizen in D Dimensionen

$$\begin{aligned}\gamma_\mu\gamma^\mu &= D\,\mathbb{1}_4\,,\\ \gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma^\mu &= (2-D)\,\gamma^\alpha\,,\\ \gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu &= 4g^{\alpha\beta}\,\mathbb{1}_4+(D-4)\,\gamma^\alpha\,\gamma^\beta,\\ \mathrm{Tr}[\gamma^\alpha\gamma^\beta] &= 4g^{\alpha\beta}\end{aligned}$$

mit Hilfe der Antikommutatorrelation $\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=2g^{\mu\nu}\,\mathbb{1}_4$ und $g^\mu_{\ \mu}=D$.

Aufgabe 14: Gamma-Algebra 2 — 16 Punkte

In dieser Aufgaben sollen Sie weitere Eigenschaften der γ-Matrizen herleiten. Dafür benötigen Sie nur die Clifford-Algebra

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=2g^{\mu\nu}\cdot\mathbb{1}_4$$

und keine explizite Darstellung der γ-Matrizen.
Die hermitesche Konjugation der γ-Matrizen ist wie folgt definiert:

$$(\gamma^0)^\dagger=\gamma^0,\qquad (\gamma^i)^\dagger=-\gamma^i\,.$$

(a) $\boxed{3\text{ P}}$ Zeigen Sie, dass sich damit die hermitesche Konjugation allgemein wie folgt gegeben ist: $(\gamma^\mu)^\dagger=\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$.

Neben den 4 üblichen γ-Matrizen führt man eine Fünfte ein, die wie folgt definiert ist:

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \,.$$

(b) $\boxed{3\text{ P}}$ Zeigen Sie, dass dies äquivalent ist zu

$$\gamma^5 = -\frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma \,.$$

(c) $\boxed{3\text{ P}}$ Zeigen Sie, dass für γ^5 gilt:

(i) $(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$,

(ii) $(\gamma^5)^2 = \mathbb{1}_4$,

(iii) $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$.

(d) $\boxed{7\text{ P}}$ Zeigen Sie die folgenden Identitäten von Spuren von γ-Matrizen:

(i) $\mathrm{Tr}[\gamma^\mu] = 0$,

(ii) $\mathrm{Tr}[\gamma^{\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_n}] = 0$, falls n ungerade ist,

(iii) $\mathrm{Tr}[\gamma^{\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_n}] = \mathrm{Tr}[\gamma^{\mu_n}\cdots\gamma^{\mu_1}]$,

(iv) $\mathrm{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma] = 4\,(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho})$,

(v) $\mathrm{Tr}[\gamma^5] = 0$,

(vi) $\mathrm{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5] = 0$,

(vii) $\mathrm{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5] = -4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$.