Einführung in Theoretische Teilchenphysik

Vorlesung: Prof. Dr. M.M. Mühlleitner – Übung: Dr. D. López-Val, Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 7

Abgabe: Fr, 09.12.16, 12:00 – Besprechung: Mo, 12.12.16 11:30 Raum 12/1; Mi, 15.12.16 9:45 Raum 10/1

Aufgabe 15: Energie und Impuls des Dirac-Feldes — 15 Punkte

Analog zu Aufgabe 10, wo wir Energie und Impuls des reellen Klein-Gordon-Felds berechnet haben, betrachten wir nun das Dirac-Feld. Die Lagrangedichte ist gegeben durch

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)\,(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\,\psi(x)\,, \tag{1}$$

wobei ψ und $\bar{\psi}$ als unabhängige Variablen betrachtet werden.

(a) 3 P Zeigen Sie, dass damit gilt:

$$\pi(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\psi)} = i\psi^\dagger\,, \quad \bar{\pi}(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\bar{\psi})} = 0\,.$$

Berechnen Sie die Bewegungsgleichungen für ψ und $\bar{\psi}$.

(b) 2 P Wie lautet der zugehörige Energie-Impuls-Tensor? Warum verschwindet dabei der Summand proportional zu $g^{\mu\nu}$?

Für das Dirac-Feld machen wir den Ansatz

$$\psi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E}} \sum_{s=1,2} a_s(\vec{p})u_s(\vec{p})e^{-ipx} + b_s^\dagger(\vec{p})v_s(\vec{p})e^{+ipx}\,.$$

Für die Spinoren gilt dabei

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u_s(\vec{p}) = 0\,, \qquad \bar{u}_s(\vec{p})(\gamma^\mu p_\mu - m) = 0\,,$$
$$(\gamma^\mu p_\mu + m)v_s(\vec{p}) = 0\,, \qquad \bar{v}_s(\vec{p})(\gamma^\mu p_\mu + m) = 0\,,$$
$$u_s^\dagger(\vec{p})u_{s'}(\vec{p}) = v_s^\dagger(\vec{p})v_{s'}(\vec{p}) = 2E\delta_{ss'}\,,$$
$$u_s^\dagger(\vec{p})v_{s'}(-\vec{p}) = v_s^\dagger(\vec{p})u_{s'}(-\vec{p}) = 0\,.$$

(c) $\boxed{5\text{ P}}$ Berechnen Sie damit den 4-Impuls-Vektor

$$P^\mu = \int \mathrm{d}^3x T^{0\mu}$$

und zeigen Sie, dass dies auf die in der Vorlesung angegebene Form

$$:P^\mu: = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} p^\mu \sum_{s=1,2} \left(\tilde{N}_s^a(\vec{p}) + \tilde{N}_s^b(\vec{p}) \right)$$

führt.

(d) $\boxed{1\text{ P}}$ Zeigen Sie, dass der Strom $j^\mu = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ erhalten ist.

(e) $\boxed{4\text{ P}}$ Die zugehörige Ladung ist gegeben durch

$$Q = \int \mathrm{d}^3x j^0(x)\,.$$

Drücken Sie diese durch die a, $a^\dagger$, b und $b^\dagger$ aus.

Aufgabe 16: $2 \to 2$ Phasenraum im allgemeinen Fall $\boxed{\textbf{5 Punkte}}$

Wir betrachten das Phasenraumintegral für einen allgemeinen Prozess mit zwei Teilchen (Impulse p_1, p_2, Massen m_1, m_2) im Endzustand. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} &\int \frac{\mathrm{d}^3p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{\mathrm{d}^3p_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p_1 - p_2) \\ &= \frac{1}{8\pi q^2} \lambda(q^2, m_1^2, m_2^2) \Theta(q_0) \Theta(q^2 - (m_1 + m_2)^2) \end{aligned}$$

mit

$$\lambda(a^2, b^2, c^2) = \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2}$$

und der Heaviside-Stufenfunktion Θ gilt.
Hinweise:

- Verwenden Sie die Beziehung $\frac{1}{2E} = \int \mathrm{d}p_0 \Theta(p_0) \delta(p^2 - m^2)$.
- Arbeiten Sie im Schwerpunktsystem der beiden Endzustandsteilchen.