Karlsruher Institut für Technologie

WiSe 2016/17

Einführung in Theoretische Teilchenphysik

Vorlesung: Prof. Dr. M.M. Mühlleitner – Übung: Dr. D. López-Val, Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 8

Abgabe: Fr, 16.12.16, 12:00 – Besprechung: Mo, 19.12.16 11:30 Raum 12/1; Mi, 21.12.16 9:45 Raum 10/1

Aufgabe 17: Eigenschaften von Dirac-Spinoren $\boxed{6\text{ P}}$

Die Dirac-Spinoren erfüllen Orthogonalitäts-

$$\bar{u}_s(\vec{p})u_{s'}(\vec{p}) = -\bar{v}_s(\vec{p})v_{s'}(\vec{p}) = 2m\delta_{ss'}\,,$$
$$\bar{u}_s(\vec{p})v_{s'}(\vec{p}) = \bar{v}_s(\vec{p})u_{s'}(\vec{p}) = 0\,,$$

und Vollständigkeitsrelationen

$$\sum_s \left(u_s(\vec{p})\bar{u}_s(\vec{p}) - v_s(\vec{p})\bar{v}_s(\vec{p})\right) = 2m\,.$$

(a) $\boxed{2\text{ P}}$ Überprüfen Sie die Vollständigkeitsrelation, indem Sie zeigen, dass Sie angewandt auf die Basiszustände $u_{s'}(\vec{p})$, $v_{s'}(\vec{p})$, $\bar{u}_{s'}(\vec{p})$ und $\bar{v}_{s'}(\vec{p})$ das richtige Ergebnis liefert.

Nun definieren wir Projektionsoperatoren $\Lambda^{\pm}(\vec{p}) = \frac{\pm\not{p}+m}{2m}$, die die Zustände positiver bzw. negativer Energie aus einem beliebigen Zustand $f(\vec{p}) = \sum_s \alpha_s u_s(\vec{p}) + \beta_s v_s(\vec{p})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, projizieren.

(b) $\boxed{2\text{ P}}$ Zeigen Sie, dass $\Lambda^{\pm}(\vec{p})$ tatsächlich Projektoren sind:

$$\left(\Lambda^{\pm}(\vec{p})\right)^2 = \Lambda^{\pm}(\vec{p})\,, \qquad \Lambda^{+}(\vec{p})f(\vec{p}) = \sum_s \alpha_s u_s(\vec{p})\,,$$
$$\Lambda^{+}(\vec{p}) + \Lambda^{-}(\vec{p}) = 1\,, \qquad \Lambda^{-}(\vec{p})f(\vec{p}) = \sum_s \beta_s v_s(\vec{p})\,.$$

(c) $\boxed{2\text{ P}}$ Zeigen Sie damit schließlich

$$\sum_s u_s(\vec{p})\bar{u}_s(\vec{p}) = \not{p} + m\,, \qquad \sum_s v_s(\vec{p})\bar{v}_s(\vec{p}) = \not{p} - m\,. \tag{1}$$

Aufgabe 18: Compton-Streuung $\boxed{\textbf{14 P}}$

Die Compton-Streuung ist ein wichtiger Ionisationsprozess und der dominierende Wechselwirkungsprozess energiereicher Strahlung mit Materie für Photonenenergien zwischen etwa 100 keV und 10 MeV. Betrachten Sie den inelastichen Elektron-Photon Stoßprozess

$$e^-(p) + \gamma(k) \to e^-(p') + \gamma(k')\,.$$

(a) $\boxed{1\text{ P}}$ Zeichnen Sie die (zwei) Feynmandiagramme, die diesen Prozess auf Tree-Level in der QED beschreiben.

(b) $\boxed{5\text{ P}}$ Bestimmen Sie die entsprechende Streuamplitude mit Hilfe der Feynmanregeln der QED und bringen Sie diese mit geeigneten Vereinfachungen auf die Form:

$$i\mathcal{M}(e^-\gamma \to e^-\gamma) = -ie^2\,\epsilon^*_\mu(k')\epsilon_\nu(k)\bar{u}(p')\,\left[\frac{\gamma^\mu \not{k}\gamma^\nu + 2\gamma^\mu p^\nu}{2p\cdot k} + \frac{-\gamma^\nu \not{k}'\gamma^\mu + 2\gamma^\nu p^\mu}{-2p\cdot k'}\right]u(p)\,. \tag{1}$$

Kommentieren Sie dabei wie diese Regeln angewendet werden.

Hinweis: Nutzen Sie die On-shell Beziehungen $p^2 = m_e^2, k^2 = 0$, sowie die Dirac Gleichung $\left(\not{p} - m\right)\,u(p) = 0$, und die Eigenschaften der γ-Algebra. Es ist nützlich die Beziehung $(\not{p} + m)\gamma^\nu\,u(p) = 2p^\nu u(p)$ in einer Nebenrechnung herzuleiten.

(c) $\boxed{5\text{ P}}$ Bringen Sie das Spin-gemittelte Betragsquadrat der Streuamplitude auf folgende Form

$$\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}|^2 = 4\pi^2\,\alpha^2_{\text{em}}\,\left[\frac{T_1}{(2p\cdot k)^2} + \frac{T_2}{(2p\cdot k)\,(2p\cdot k')} + \frac{T_3}{(2p\cdot k')^2}\right]\,,$$

wobei T_i die Spuren der mit 4-Vektoren kontrahierten γ-Matrizen darstellen.

Hinweis: Benutzen Sie (ohne Prüfung) die Identität $\sum_{p=+,-}\,\epsilon_p^{\mu\,*}\,\epsilon_p^\nu = -g^{\mu\nu}$, um die Summe über Polarisierungen bzw. Helizitäten zu berechnen.

(d) $\boxed{3\text{ P}}$ Leiten Sie repräsentativ die folgende Relation für eine der auftretenden Spuren her:

$$T = \text{Tr}[\not{p}'\,\gamma^\mu\,\not{k}\gamma^\nu\not{p}\gamma_\nu\not{k}\gamma_\mu] = 32(p\cdot k)(p'\cdot k)\,.$$