Einführung in Theoretische Teilchenphysik

Vorlesung: Prof. Dr. M.M. Mühlleitner – Übung: Dr. D. López-Val, Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 9

Abgabe: Mi, 11.01.17, 12:00 –	Besprechung:	Mo, 16.01.17	11:30	Raum 12/1
		Mi, 18.01.17	9:45	Raum 10/1

Aufgabe 19: Mandelstam-Variablen $\boxed{\text{5 Punkte}}$

Betrachten Sie einen allgemeinen Streuungprozess $A + B \to C + D$. Die Kinematik dieses Prozesses läßt sich durch drei Lorentz-invräriante Größen, den Mandelstam-Variablen (nach S. Mandelstam benannten, der diese im 1958 einführte), beschreiben:

$$s = (p_A + p_B)^2\,; \qquad t = (p_A - p_C)^2\,; \qquad u = (p_A - p_D)^2\,.$$

wobei p_i der 4er-Impuls der jeweiligen Teilchen ist.

(a) $\boxed{\text{1 P}}$ Beweisen Sie die Identität

$$s + t + u = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2\,,$$

mit den entsprechenden Teilchenmassen m_i.

(b) $\boxed{\text{1 P}}$ Leiten Sie folgende Relation der Mandelstam-Variablen im Schwerpunktssystem für den Fall identischer Teilchenmassen ($m_a = m_b = m_c = m_d \equiv m$) her:

$$s = 4(|\vec{p}_A|^2 + m^2)\,; \qquad t = -4|\vec{p}_A|^2 \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\,; \qquad u = -4|\vec{p}_A|^2 \cos^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\,,$$

mit dem 3er-Impuls $\vec{p}_i$ der jeweiligen Teilchen und dem Streuwinkel ϑ zwischen A und C.

Betrachten Sie nun die Compton-Streuuung

$$e^-(p) + \gamma(k) \to e^-(p') + \gamma(k')\,.$$

(c) $\boxed{2\text{ P}}$ Bestimmen Sie die Mandelstam-Variable für diesen Prozess in das Laborsystem, in Abhängigkeit von der Elektronmasse und der Frequenz des einlaufenden Photons.

(d) $\boxed{1\text{ P}}$ Bestimmen Sie die kinematisch erlaubten Bereiche in der $s - t$ und $t - u$ Ebene (Ein solches Diagramm nennt man *Dalitz Plot*. Dieser wird häufig benutzt, um z.B $1 \to 3$ Zerfälle zu analysieren.).

Aufgabe 20: Unitarität in der $\nu\bar{\nu} \to W_L^+ + W_L^-$ Streuung $\boxed{\textbf{15 Punkte}}$

Betrachten Sie die Produktion von longitudinal polarisierten W Bosonen durch $\nu\bar{\nu}$-Streuung

$$\nu_e(p_1) + \bar{\nu}_e(p_2) \to W_L^+(q_1) + W_L^-(q_2)$$

(a) $\boxed{1\text{ P}}$ Zeichnen Sie die (zwei) Feynmandiagramme, die diesen Prozess auf Tree-Level im Standardmodell beschreiben.

(b) $\boxed{6\text{ P}}$ Bestimmen Sie die entsprechende Streuamplitude mit Hilfe der unten angegebenen Feynmanregeln des SM, und bringen Sie diese mit geeigneten Vereinfachungen auf die Form:

$$\mathcal{M}_t = \frac{-\,e^2}{4\sin^2\vartheta_w}\frac{1}{t}\left[\bar{v}(p_2)\,\gamma^\nu\,(1-\gamma_5)\,(\not{p}_1 - \not{q}_1)\,\gamma^\mu\,u(p_1)\right]\,\epsilon^*_\mu(q_1)\,\epsilon^*_\nu(q_2)$$
$$\mathcal{M}_s = \frac{e^2}{4\sin^2\vartheta_w}\frac{1}{s-m_Z^2}\left[\bar{v}(p_2)\,\gamma_\alpha\,(1-\gamma_5)\,\Gamma^{\mu\nu\alpha}(q_1,q_2,s)\,u(p_1)\,\right]\,\epsilon^*_\mu(q_1)\,\epsilon^*_\nu(q_2)\,,$$

wobei s, t die Mandelstam-Variablen bezeichnen, und das Elektron wird als masseloses Teilchen angenommen. Berechnen Sie den expliziten Ausdruck des Form-Faktors $\Gamma^{\mu\nu\alpha}(q_1, q_2, s)$ als lineare Kombination von 4er-Impulsen und metrischen Tensoren.

Die longitudinale Polarisierung eines on-shell Eichbosons mit Masse m ist wie folgt definiert

$$\epsilon^\mu_L(k) = \gamma\left(|\vec{\beta}|, \hat{\vec{\beta}}\right)\,,$$

mit

$$\vec{\beta} \equiv \frac{\vec{k}}{k^0} \qquad \gamma \equiv (1-\beta^2)^{-1/2} \qquad \hat{\vec{\beta}} \equiv \frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}.$$

(c) $\boxed{3\text{ P}}$ Zeigen Sie, dass im Schwerpunktsystem die longitudinal polarisierten W-Bosonen durch

$$\epsilon_L^\mu(q_1) = \frac{\sqrt{s}}{2m_W}\left(\sqrt{1-\frac{4m_W^2}{s}}, \sin\vartheta, 0, \cos\vartheta\right)$$
$$\epsilon_L^\mu(q_2) = \frac{\sqrt{s}}{2m_W}\left(\sqrt{1-\frac{4m_W^2}{s}}, -\sin\vartheta, 0, -\cos\vartheta\right),$$

gegeben sind. Dabei ist ϑ als Streuungswinkel zwischen dem einlaufenden Neutrino ν_e und dem auslaufenden W^+ im Schwerpunktsystem definiert.

Darüber hinaus ist eine explizite Darstellung eines Dirac-Fermions durch

$$u^+(p) = \frac{\not{p}+m}{\sqrt{(p^0+m)}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad u^-(p) = \frac{\not{p}+m}{\sqrt{(p^0+m)}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},$$
$$v^+(p) = \frac{\not{p}-m}{\sqrt{(p^0+m)}}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad v^-(p) = \frac{\not{p}-m}{\sqrt{(p^0+m)}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

gegeben, mit den Gamma-Matrizen in der Dirac-Darstellung

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix}\mathbb{1}_{2\times2} & 0\\ 0 & -\mathbb{1}_{2\times2}\end{pmatrix}, \qquad \gamma^k = \begin{pmatrix}0 & \sigma^k\\ -\sigma^k & 0\end{pmatrix}, \qquad \gamma^5 = \begin{pmatrix}0 & \mathbb{1}_{2\times2}\\ \mathbb{1}_{2\times2} & 0\end{pmatrix}$$

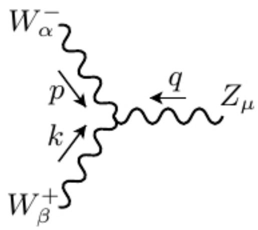
und den Pauli-Matrizen σ^k.

(d) $\boxed{3\text{ P}}$ Überprüfen Sie mit Hilfe dieser Darstellung, dass sich die beiden Streuungamplitude $M_{s,t}$ wie $\mathcal{M}_{s,t} \sim s$ im Limes $s \to \infty$ verhalten.

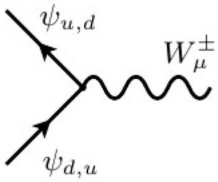
(e) $\boxed{2\text{ P}}$
Wie verhält sich die gesamte Amplitude $\mathcal{M}_t + \mathcal{M}_s$ im Grenzwert hoher Energien? Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

Hinweis: Eine detailierte Rechnung ohne vorherige Approximation ist optional und wird mit bis zu $\boxed{\text{10 Bonuspunkten}}$ bewertet. Die Rechnung kann mit Hilfe von Programmen wie z.B. Mathematica durchgeführt werden. In diesem Fall ist der ausgedruckte Code beizufügen.

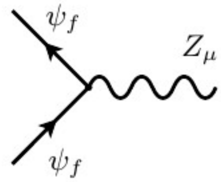
Feynmanregeln:



$$ig\cos\theta_W\left[g_{\alpha\beta}(p-k)_\mu + g_{\beta\mu}(k-q)_\alpha + g_{\mu\alpha}(q-p)_\beta\right]$$



$$i\frac{g}{\sqrt{2}}\gamma_\mu\frac{1-\gamma_5}{2}$$



$$i\frac{g}{\cos\theta_W}\gamma_\mu\left(g_V^f - g_A^f\gamma_5\right)$$

$$g_V^f = \tfrac{1}{2}\,I_3^f - Q_f\sin^2\vartheta_w \qquad g_A^f = \tfrac{1}{2}\,I_3^f$$