Wintersemester 2017/18
Theorie A - Blatt 1

Prof. Dr. M. Mühlleitner, Dr. S. Liebler

Ausgabe: Mo, 16.10.17
Abgabe: Mo, 23.10.17
Besprechung: Fr, 27.10.17

Gesamtpunktzahl: **20P**

Übungsbetreuung: Stefan Liebler (stefan.liebler@kit.edu) (Raum: 12/03)
Beratungstutorium: Max Stadelmaier (maximilian.stadelmaier@student.kit.edu) (Raum: 12/12)

Aufgabe 1: Differentiation - Fall mit Luftwiderstand **4P**

Wird beim freien Fall der Luftwiderstand in Form einer dem Quadrat der Fallgeschwindigkeit v proportionalen Reibungskraft kv^2 berücksichtigt, so erhält man die folgende funktionale Abhängigkeit der Fallgeschwindigkeit v vom Fallweg s:

$$v(s) = \sqrt{\frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{2ks}{m}}\right)} \qquad \text{mit} \quad s \geq 0\,.$$

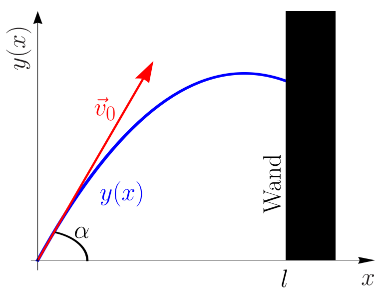
Hierbei bezeichnet m die Masse des fallenden Körpers, g die Erdbeschleunigung an der Erdoberfläche, und k sei ein Reibungskoeffizient.

(a) $\boxed{\text{2P}}$ Aufgrund der Abhängigkeit $s(t)$, also dem Zusammenhang zwischen Weg s und Zeit t, lässt sich die obige Funktion auch als Funktion von der Zeit t in der Form $v(s(t))$ darstellen. Zeigen Sie für die Beschleunigung $a(t) = \frac{dv}{dt}$ dann die Beziehung $a(s) = v\frac{dv}{ds}$. *Hinweis:* Nutzen Sie die Kettenregel.

(b) $\boxed{\text{2P}}$ Berechnen Sie nun $\frac{dv}{ds}$, und bestimmen Sie so $a(s)$. Fertigen Sie eine Skizze der Ortsabhängigkeit $a(s)$ an.

Aufgabe 2: Differentiation - Wasserstrahl **5P**

Bei einer Feuerwehrübung kommt eine Wasserspritze zum Einsatz, aus welcher der Wasserstrahl mit fester Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = |\vec{v}_0|$ austritt. Ziel der Aufgabe ist es, den Winkel α zwischen Boden und Wasserspritze so zu bestimmen, dass eine Wand in der Entfernung l möglichst weit oben getroffen wird. Dazu wähle man ein kartesisches Koordinatensystem, in welchem der Wasserstrahl bei $(0, 0)$ gemäß der Abbildung austritt.



(a) $\boxed{\text{1P}}$ In x-Richtung bewegt sich der Wasserstrahl mit konstanter Geschwindigkeit, in y-Richtung kommt zusätzlich der freie Fall hinzu, so dass gilt:

$$x(t) = v_0 \cos(\alpha)t, \qquad y(t) = v_0 \sin(\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Stellen Sie den Zusammenhang $y(x)$ auf, indem Sie die Zeitabhängigkeit t eliminieren. Es ergibt sich eine Parabel (Wurfparabel) als Bahnkurve.

(b) $\boxed{\text{2P}}$ Berechnen Sie nun die Höhe $h = y(l)$ bei der Wand, und fassen Sie h als Funktion des Winkels α auf, also $h(\alpha)$. Es gilt nun das Maximum der Funktion $h(\alpha)$ zu bestimmen.

Berechnen Sie hierzu die Ableitung $h'(\alpha) = \frac{dh(\alpha)}{d\alpha}$ bezüglich des Winkels α, für die Sie erhalten sollten:

$$h'(\alpha) = \frac{l}{v_0^2} \frac{v_0^2 \cos(\alpha) - gl \sin(\alpha)}{\cos^3(\alpha)} \, .$$

(c) $\boxed{\text{2P}}$ Bestimmen Sie den Winkel α_0, für den die Höhe $h(\alpha)$ maximal wird, und zeigen Sie $h_{max} = h(\alpha_0) = \frac{v_0^4 - g^2 l^2}{2 g v_0^2}$. Geben Sie für $g = 9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, $l = 15\mathrm{m}$ und $v_0 = 20 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ die Größen α_0 und h_{max} an.

Aufgabe 3: Differentiation - Taylorentwicklung **6P**

Die Taylorentwicklung einer Funktion ist ein wichtiges Hilfsmittel in der Physik. Wir beschränken uns in dieser Aufgabe auf Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dabei wird eine Funktion f um einen x-Wert x_0 durch ein Polynom approximiert. Dazu sei f bei $x = x_0$ n-mal differenzierbar und $f^{(k)}(x_0)$ sei die k-te Ableitung von f bei $x = x_0$, insbesondere schreiben wir $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$. Für $x \approx x_0$ ist dann

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \, .$$

Ist f bei x_0 unendlich oft differenzierbar, können wir $n \to \infty$ gehen lassen. Dies ergibt eine Taylorreihe. Für (viele, genauer analytische) Funktionen gilt die vorherige Relation dann exakt für alle x, für die die unendliche Summe auf der rechten Seite konvergiert. Bestimmen Sie für nachfolgende Funktionen die n-te Ableitung ($n \in \mathbb{N}$ beliebig), und geben Sie die Taylorreihe für $x_0 = 0$ an. Für welche Werte von x konvergieren die Taylorreihen? (Die letzte Frage wird nicht bewertet.)

(a) $\boxed{\text{2P}}$ $f(x) = e^x$.

(b) $\boxed{\text{2P}}$ $f(x) = \sin x$.

(c) $\boxed{\text{2P}}$ $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Aufgabe 4: Vektoren - Levi-Civita-Symbol **5P**

In kartesischen Koordinaten ist das Skalarprodukt zweier dreidimensionaler Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ durch $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i$ gegeben. Hierbei wird die Einsteinsche Summenkonvention verwendet, d.h. über doppelt auftretetende Indizes $i \in \{1, 2, 3\}$ wird summiert. Das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ hat folgende Komponenten $(\vec{a} \times \vec{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$. Hierbei kommt das total antisymmetrische Levi-Civita-Symbol ϵ_{ijk} mit $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ zur Anwendung, für welches gilt $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ikj} = -\epsilon_{kji}$ mit $\epsilon_{123} = +1$.

(a) $\boxed{\text{3P}}$ Zeigen Sie, dass $\epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$ gilt. Hierbei ist das Kronecker-Symbol definiert durch $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ und 0 für $i \neq j$.

(b) $\boxed{\text{1P}}$ Beweisen Sie unter Verwendung von ϵ_{ijk} die Beziehung
$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$.

(c) $\boxed{\text{1P}}$ Beweisen Sie unter Verwendung von ϵ_{ijk} die BAC-CAB-Regel
$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$.