Wintersemester 2017/18
Theorie A - Blatt 10

Prof. Dr. M. Mühlleitner, Dr. S. Liebler

Ausgabe: Mo, 18.12.17
Abgabe: Mo, 08.01.18
Besprechung: Fr, 12.01.18

Gesamtpunktzahl: **20P (25P)**

Übungsbetreuung: Stefan Liebler (stefan.liebler@kit.edu) (Raum: 12/03)
Beratungstutorium: Max Stadelmaier (maximilian.stadelmaier@student.kit.edu) (Raum: 12/12)

Vorleistungsanmeldung auf CAMPUS:
Gehen Sie bitte auf
`https://campus.studium.kit.edu/`
und melden Sie sich mit Ihrem Studierendenaccount zur Vorleistung mit Prüfungsnummer 7800024 an. Jede(r) Student(in), dessen/deren Prüfungsordnung/Modulhandbuch die Vorleistung vorschreibt, muss sich dort anmelden, auch wenn die Vorleistung ($\geq$ 50% auf Blatt 1-7, $\geq$ 50% auf Blatt 8-14, inkl. Sonderregelung) nicht erreicht werden sollte. Die Anmeldung ist möglich bis zum 09.02.2018 um 13:00 Uhr. Danach werden von unserer Seite Ihre Vorleistungsresultate auf CAMPUS eingetragen (bestanden/nicht bestanden). Wenn Sie die Vorleistung erfolgreich gemeistert haben, können Sie sich im Anschluss (zwischen dem 12.02.2018 und dem 21.02.2018) wiederum online auf CAMPUS für die erste Klausur am 27.02.2018 anmelden. Ihre Vorleistung bleibt auch für zukünftige Vorlesungen “Klassische Theoretische Physik I” gültig. Im neuen Jahr erfolgt eine Erinnerung bezüglich der Klausuranmeldung inkl. offizieller Ausschreibung.
Nochmal: Jede(r), der/die die Vorleistung nicht aus einem früheren Semester bereits erfolgreich in CAMPUS verbucht hat, muss sich zur Vorleistung online anmelden, sofern die Prüfungsordnung/Modulhandbuch des jeweiligen Studiengangs die Vorleistung vorschreibt!

Kommentare zu diesem Übungsblatt:
Dieses Blatt bietet Ihnen die Option 25 Punkte zu sammeln, es werden aber nur 20 Punkte auf der Sollseite angerechnet. Sie haben also die Möglichkeit mit diesem Blatt zu überpunkten. Die Aufgaben 4 und 5 sind typische Klausur-artige Aufgaben, die Stoff der letzten Wochen wieder aufgreifen. Versuchen Sie diese weitestgehend unabhängig zu bearbeiten. (In der Klausur wird Ihnen ein selbstbeschriebenes DINA-4 Blatt als Hilfsmittel zur Verfügung stehen.)

Wir wünschen frohe Weihnachten und ein erfolgreiches Jahr 2018!
Entspannen Sie ein paar Tage bevor Sie die TheoA im neuen Jahr wieder mit neuen (un)sinnigen Herausforderungen erwartet.

Aufgabe 1: Komplexe Zahlen - Einführung $\boxed{\textbf{7P}}$

Im Zusammenhang mit dem harmonischen Oszillator treten erstmals komplexe Zahlen auf. Wir möchten uns in dieser Aufgabe ein wenig mit komplexen Zahlen, deren Darstellung in kartesischer Form und in Polarform sowie deren Veranschaulichung in der komplexen Zahlenebene vertraut machen.

(a) $\boxed{\text{1.5P}}$ Geben Sie die nachfolgenden komplexen Zahlen in der kartesichen Form $z = x + iy$ und in der Polarform $z = re^{i\varphi}$ an und zeichen Sie diese in der komplexen Zahlenebene ein:
$$z_1 = 2e^{i2\pi/3} - 1, \qquad z_2 = \frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}, \qquad z_3 = (3 + 3\sqrt{3}i)^3$$

(b) $\boxed{\text{1.5P}}$ Lösen Sie die nachfolgenden Gleichungen sowohl im Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als auch im Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Überlegen Sie sich anschaulich in der komplexen Zahlenebene, warum die Lösungen in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ bisweilen unterschiedlich sind.
$$z_1^2 = 1, \qquad |z_2|^2 = 1, \qquad z_3^2 - 4z_3 + 5 = 0$$

(c) $\boxed{\text{1.5P}}$ Veranschaulichen Sie für $z \in \mathbb{C}$ die folgenden Gleichungen und Ungleichungen in der komplexen Zahlenebene:
$$z_1 z_1^* = 1, \qquad |z_2 - 1| \leq 3, \qquad z_3 + z_3^* \geq -1$$

Hinweis: Der Betrag im Komplexen ist $|z| = \sqrt{zz^*}$. Im Fallen von Ungleichungen ergeben sich Flächen in der komplexen Zahlenebene.

(d) $\boxed{\text{1.5P}}$ Für welche komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ ist der folgende Ausdruck rein reell?
$$A = \left(\frac{3+z}{3-z}\right)^2$$

Hinweis: Es ist die Gleichung $\mathrm{Im}(A) = 0$ zu lösen. Dazu sollte der Nenner durch Erweitern mit dem komplex Konjugierten reell gemacht werden und dann die Polarform für z benutzt werden.

(e) $\boxed{\text{1P}}$ Drücken Sie mit Hilfe von $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$ Sinus und Cosinus über die komplexe Exponentialfunktion aus und beweisen Sie damit $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$.

Aufgabe 2: Energieerhaltung - Silvesterrakete $\boxed{\textbf{3P}}$

Reduziert man die allgemeine Form der Gravitationskraft
$$\vec{F}(\vec{r}) = -G\frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$
im Falle der Erde auf ein eindimensionales Problem in z-Richtung, so erhält man nach Setzen von $G = \frac{gR^2}{M}$ die Relation
$$\vec{F}(z) = -mg\frac{R^2}{z^2}\vec{e}_z \qquad \text{mit} \quad z \geq R\,.$$

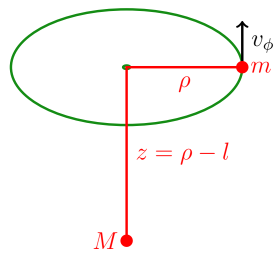
(a) $\boxed{\text{1P}}$ Bestimmen Sie das Potential $V(z)$, so dass $|\vec{F}(z)| = F(z) = -\frac{d}{dz}V(z)$.

(b) $\boxed{\text{1P}}$ Aufgrund der konservativen Kraft gilt Energieerhaltung. Formulieren Sie die Energieerhaltung für den Massenpunkt $m \ll M$, der anfänglich im Abstand $z(0) = h$ ruht ($\dot{z}(0) = 0$).

(c) $\boxed{\text{1P}}$ Die aus der Energieerhaltung erhaltene DGL liefert einen Zusammenhang zwischen $\dot{z}$ und z für einen Körper m (Massenpunkt). Bestimmen Sie die Fluchtgeschwindigkeit v_0 einer Silvesterrakete, die anfänglich auf der Erde bei $z = R$ mit $\dot{z} = v_0$ startet und im Unendlichen die Geschwindigkeit 0 erreichen soll, es also gerade so aus dem Potential der Erde schafft.

Aufgabe 3: Energie- und Drehimpulserhaltung - Weihnachtliche Rotation $\boxed{\textbf{6P}}$

Eine (punktförmige) Christbaumkugel der Masse m rotiere reibungsfrei auf einem Tisch um ein Loch, anfänglich im Abstand ρ_0. Die Kugel ist durch das Loch über einen Faden der Länge l mit einer zweiten Kugel der Masse M verbunden, die der Gewichtskraft der Erde unterliege. Anfänglich besitze die Kugel mit Masse m die rein tangentiale Geschwindigkeit v_ϕ. Die Kugel mit Masse M ruhe entsprechend zum Zeitpunkt $t = 0$.



(a) $\boxed{\text{2P}}$ Begründen Sie, warum Energie- und Drehimpulserhaltung gilt. Schreiben Sie die Gesamtenergie E und den Gesamtdrehimpuls $L = |\vec{L}|$ in Zylinderkoordinaten auf.

(b) $\boxed{\text{3P}}$ Unter Verwendung der Drehimpulserhaltung sollten Sie aus der Energieerhaltung die Gleichung

$$\dot{\rho} = \sqrt{\frac{2}{m+M}\left(E - U_{\text{eff}}(\rho)\right)} \quad \text{mit} \quad U_{\text{eff}}(\rho) = \frac{L^2}{2m\rho^2} + Mg(\rho - l)$$

erhalten. Bestimmen Sie mit Hilfe der Gleichung den minimalen ρ_{min} und maximalen Wert ρ_{max} von ρ. *Hinweis:* Was gilt an den Umkehrpunkten für $\dot{\rho}$?

(c) $\boxed{\text{1P}}$ Welche Bedingung an den Drehimpuls muss gelten, damit sich eine Kreisbahn der Christbaumkugel mit Masse m ergibt?

Aufgabe 4: Klausur-typische Aufgabe - Verständnisfragen $\boxed{\textbf{5P}}$

Beantworten Sie die nachfolgenden Fragen in wenigen Sätzen oder mit wenigen Formeln:

(a) $\boxed{\text{1P}}$ Für ein Kraftfeld gelte $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$ mit $\vec{r} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$? Wie steht $\vec{F}(\vec{r})$ in Bezug auf die Äquipotentiallinien $\phi(\vec{r})$ =const.? Warum wählt man ein negatives Vorzeichen?

(b) $\boxed{\text{1P}}$ Zeigen Sie mit Hilfe des Levi-Civita-Tensors, dass $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ ist, falls $\vec{a} = c\vec{b}$ mit $c \in \mathbb{R}$, $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$.

(c) $\boxed{\text{1P}}$ Wie berechnet sich für eine Bahnkurve $\vec{r}(t)$ der Tangenteneinheitsvektor und der Normaleneinheitsvektor? Wie erhalten Sie den Binormaleneinheitsvektor?

(d) $\boxed{\text{1P}}$ Wieviele Anfangsbedingungen sind notwendig, um eine Lösung der DGL $y''(x) = 5$ eindeutig zu bestimmen?

(e) $\boxed{\text{1P}}$ Was zeichnet ein Inertialsystem aus?

Aufgabe 5: Klausur-typische Aufgabe - Wegintegral $\boxed{4P}$

Gegeben sei das Kraftfeld ($\vec{r} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$)

$$\vec{F}(\vec{r}) = (by^2 - acx^2)\vec{e}_x + 2acxy\vec{e}_y + cz\vec{e}_z\,.$$

(a) $\boxed{1P}$ Welche Bedingung müssen Sie an die Konstanten a, b, c stellen, damit ein Potential $\phi(\vec{r})$ existiert, so dass $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$ gilt? *Hinweis:* Nutzen Sie die Bedingung, um b zu eliminieren.

(b) $\boxed{1P}$ Bestimmen Sie das zu $\vec{F}(\vec{r})$ zugehörige Potential $\phi(\vec{r})$ mit eliminierter Konstante b gemäß Teilaufgabe (a).

(c) $\boxed{2P}$ Bestimmen Sie die im Kraftfeld (mit eliminierter Konstante b) verrichtete Arbeit entlang des direkten Weges von $\vec{r}_1 = (0, 0, 0)^T$ nach $\vec{r}_2 = (1, 1, 0)^T$ und vergleichen Sie mit dem Potentialunterschied, den Sie mit Hilfe von Teilaufgabe (b) berechnen können.

Des Sontags schöne Abendstund,
verbring ich mit der Theo Kund.
Ist man die Woche fleißig gewesen,
rieseln am Ende reichlich Spesen.
Doch sind des Lieblers Fragen schwer,
so spring ich jauchzend im Eck umher.
Voll Hoffung schau ich in die Theo-Gruppe,
bevor ich doch mein Blatt zerruppe.
Denn in der Gruppe steht nur Mist,
der mir letztlich nur die Zeit wegfrisst.
So steh ich morgens sehr erschlafft,
mit Lösungen in den Händen nur leicht aufgerafft,
im Zimmer mit großen Augenringen,
und muss mich zur Abgabe schon zwingen.
Denn die Abgabe ist recht früh,
und erfordert doch viel Müh.
Des Zettels schwere Last
nun zum Glück in den Kasten passt.
Doch hat all die Qual doch den Nutzen,
so werd ich als leichte Kost auch die Klausur verputzen.

Jeden Tag wach bis Eins.
Real life habe ich keins.
Aber ohne Scheiß,
Theo A ist richtig nice.

Übungsblätter is mir egal
Ungelöste Aufgaben is mir egal
Schlaflose Nächte is mir egal
Weinen jeden Tag is mir egal

Wenn holde Maid und junger Knab,
Stund um Stund und Tag um Tag,
Sich in Qualen vor den Blättern winden,
Frohlockt der Leiter unter Linden.
(Anmerkung: Der Ü-Leiter macht sonntags Ü-Blatt!)

In der Schule war's nicht schwer,
wollte wissen immer mehr.
Nach dem Abi dachte ich nach,
Welches Studium, welches Fach?
Nun sitze ich hier, verzweifel fast,
weil Nichts für mich zusammen passt!

Rechnen, weinen, Alles geben,
so sieht's aus - mein Theo-Leben.
Durch nasse Hosen, kaputte Brillen,
keine Zeit zum "einfach chillen".

Magst du Achterbahnen und Karusselle?
Alles zu finden in unsrer Studien-Hölle!
Müde bin ich, doch find keine Ruh,
mich stört noch immer der fliegende Schuh!

Hätt ich gewusst, wie Theo uns quält,
hätt ich's vermutlich trotzdem gewählt.
Trotz aller Plagen und Beschwerden,
ist's nicht toll, immer was neues zu lernen?!

Zum Schluss noch was für den Übungsleiter,
ich hoff mein Tutor gibt's auch wirklich weiter:
Die ganze Studenten-Quälerei,
finden doch nur Sadisten geil!