Gesamtpunktzahl: **20P (25P)**

Übungsbetreuung: Stefan Liebler (stefan.liebler@kit.edu) (Raum: 12/03)
Beratungstutorium: Max Stadelmaier (maximilian.stadelmaier@student.kit.edu) (Raum: 12/12)

Aufgabe 4: Klausur-typische Aufgabe - Verständnisfragen **5P**

Beantworten Sie die nachfolgenden Fragen in wenigen Sätzen oder mit wenigen Formeln:

(a) 1P Für ein Kraftfeld gelte $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$ mit $\vec{r} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$. Wie steht $\vec{F}(\vec{r})$ in Bezug auf die Äquipotentiallinien $\phi(\vec{r})$ =const.? Warum wählt man ein negatives Vorzeichen?

(b) 1P Zeigen Sie mit Hilfe des Levi-Civita-Tensors, dass $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ ist, falls $\vec{a} = c\vec{b}$ mit $c \in \mathbb{R}$, $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$.

(c) 1P Wie berechnet sich für eine Bahnkurve $\vec{r}(t)$ der Tangenteneinheitsvektor und der Normaleneinheitsvektor? Wie erhalten Sie den Binormaleneinheitsvektor?

(d) 1P Wieviele Anfangsbedingungen sind notwendig, um eine Lösung der DGL $y''(x) = 5$ eindeutig zu bestimmen?

(e) 1P Was zeichnet ein Inertialsystem aus?

Lösung der Aufgabe 4

(a) Die Richtungspfeile des Kraftfeldes stehen senkrecht auf den Äquipotentiallinien. Das negative Vorzeichen garantiert, dass die Kraft in Richtung des minimalen Potentials wirkt.

(b) Für den Fall $\vec{a} = c\vec{b}$ gilt offenbar $(\vec{a} \times \vec{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k = c\epsilon_{ijk} b_j b_k$. Unter Berücksichtigung der Summation über j und k treten die Summanden $b_j b_k$ und $b_k b_j$ mit entgegengesetztem Vorzeichen auf. Somit entfällt die Summe.

(c) Für eine Bahnkurve $\vec{r}(t)$ mit Geschwindigkeit $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ sind der Tangenteneinheitsvektor $\vec{\tau}(t)$, der Normaleneinheitsvektor $\vec{n}(t)$ und der Binormaleneinheitsvektor $\vec{b}(t)$ gegeben durch:

$$\vec{\tau}(t) = \frac{\vec{v}(t)}{v(t)}, \qquad \vec{n}(t) = \frac{d\vec{\tau}(t)}{dt} \Big/ \left| \frac{d\vec{\tau}(t)}{dt} \right|, \qquad \vec{b}(t) = \vec{\tau}(t) \times \vec{n}(t)$$

(d) 2 Anfangsbedingungen, z.B. Werte von y' und y für ein festes x.

(e) In einem Inertialsystem bewegt sich ein Körper, auf den keine äußere Kraft wirkt, geradlinig und gleichförmig oder verharrt in Ruhe.

Aufgabe 5: Klausur-typische Aufgabe - Wegintegral **4P**

Gegeben sei das Kraftfeld ($\vec{r} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$)

$$\vec{F}(\vec{r}) = (by^2 - acx^2)\vec{e}_x + 2acxy\vec{e}_y + cz\vec{e}_z\,.$$

(a) $\boxed{1\text{P}}$ Welche Bedingung müssen Sie an die Konstanten a, b, c stellen, damit ein Potential $\phi(\vec{r})$ existiert, so dass $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$ gilt? *Hinweis:* Nutzen Sie die Bedingung, um b zu eliminieren.

(b) $\boxed{1\text{P}}$ Bestimmen Sie das zu $\vec{F}(\vec{r})$ zugehörige Potential $\phi(\vec{r})$ mit eliminierter Konstante b gemäß Teilaufgabe (a).

(c) $\boxed{2\text{P}}$ Bestimmen Sie die im Kraftfeld (mit eliminierter Konstante b) verrichtete Arbeit entlang des direkten Weges von $\vec{r}_1 = (0,0,0)^T$ nach $\vec{r}_2 = (1,1,0)^T$ und vergleichen Sie mit dem Potentialunterschied, den Sie mit Hilfe von Teilaufgabe (b) berechnen können.

Lösung der Aufgabe 5

(a) Eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung ist, dass die Rotation von $\vec{F}(\vec{r})$ verschwindet. Es gilt

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 2acy - b2y \end{pmatrix}.$$

Somit muss in jedem Fall $b = ac$ sein, damit ein Potential exisiteren kann. Den Beweis der Existenz des Potentials liefert dessen erfolgreiche Bestimmung in Teilaufgabe (b).

(b) Wir arbeiten nun mit $b = ac$ und somit mit dem Kraftfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = ac(y^2 - x^2)\vec{e}_x + 2acxy\vec{e}_y + cz\vec{e}_z \,.$$

Das Potential kann durch getrennte Integration über x, y und z ermittelt werden. Es ist

$$\int dx(-F_x) = -acy^2x + \frac{1}{3}acx^3 + C(y,z)$$
$$\int dy(-F_y) = -acy^2x + C(x,z), \qquad \int dz(-F_z) = -\frac{1}{2}cz^2 + C(x,z)\,.$$

Die Resultate lassen sich erfolgreich kombinieren und es ist somit

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{3}acx^3 - acxy^2 - \frac{1}{2}cz^2 + C\,.$$

Als Potentialunterschied zwischen $\vec{r}_1 = (0,0,0)^T$ nach $\vec{r}_2 = (1,1,0)^T$ folgt $\Delta\phi = \phi(0,0,0) - \phi(1,1,0) = 0 - \frac{1}{3}ac + ac = \frac{2}{3}ac.$

(c) Der direkte Weg von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$ lässt sich parametrisieren durch

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t, \qquad \dot{\vec{s}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad t \in [0,1]. \quad \text{Somit ist} \quad \vec{F}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2act^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt für die verrichtete Arbeit

$$W = \int_0^1 \vec{F} \cdot \dot{\vec{s}} dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2act^2 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 2act^2 dt = \frac{2}{3}act^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3}ac$$

Dies entspricht genau dem Potentialunterschied ermittelt in Teilaufgabe (b).