Ausgabe: Mo, 08.01.18
Abgabe: Mo, 15.01.18
Besprechung: Fr, 19.01.18

Gesamtpunktzahl: **20P**

Übungsbetreuung: Stefan Liebler (stefan.liebler@kit.edu) (Raum: 12/03)
Beratungstutorium: Max Stadelmaier (maximilian.stadelmaier@student.kit.edu) (Raum: 12/12)

## Aufgabe 1: Harmonischer Oszillator - Schwingung mit Dämpfung **4P**

Gegeben sei die Schwingungsgleichung

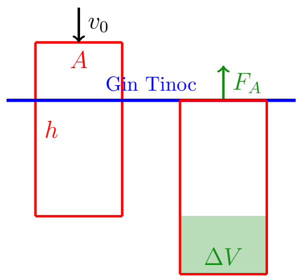
$$\ddot{y}(t) + 2b\dot{y}(t) + 16y(t) = 0 \qquad \text{mit } b > 0\,.$$

(a) 2P Bestimmen Sie die allgemeine Lösung durch einen Exponentialansatz. Für welche Werte von $b$ erhalten Sie eine schwach gedämpfte Schwingung, wann eine starke Dämpfung ohne Schwingung? Für welchen Wert erhalten Sie den aperiodischen Grenzfall?

(b) 2P Wie lautet die Lösung im aperiodischen Grenzfall für die Anfangswerte $y(0) = 1$ und $\dot{y}(0) = -1$? Skizzieren Sie auch den zeitlichen Verlauf der Bewegung. *Hinweis:* Da beim aperiodischen Grenzfall die Nullstelle zweiter Ordnung ist, braucht es einen leicht modifizierten Ansatz der allgemeinen Lösung, siehe Vorlesung.

## Aufgabe 2: Harmonischer Oszillator - Eiswürfel im Gin Tonic **5P**

Ein homogener quaderförmiger Eiswürfel der Masse $m$ mit Querschnittsfläche $A$ und Höhe $h$ taucht in einen Gin Tonic der Dichte $\rho$ zu zwei Drittel ein. Zur Zeit $t = 0$ wird der Eiswürfel kurz mit der Geschwindigkeit $v_0$ senkrecht nach unten angestoßen und schwingt sodann um die Gleichgewichtslage. *Hinweis:* Der Eiswürfel mit Lufteinschluss rotiere nicht und verliere weder an Masse noch an Form.




(a) 2P Stellen Sie die Differentialgleichung der Bewegung des Schwerpunkts in geeigneten Koordinaten auf, wobei die Rückstellkraft durch die Auftriebskraft $F_A = -\rho g \Delta V$ und die schwache Reibungskraft durch $F_R = -kv$ gegeben ist. Geben Sie außerdem die Anfangsbedingungen an. *Hinweis:* Die Gravitationskraft ist bereits Teil von $F_A$, welche je nach Lage des Eiswürfels das Vorzeichen ändert.

(b) 3P Lösen Sie die DGL und bestimmen Sie die Anfangsgeschwindigkeit des Eiswürfels so, dass er beim folgenden ersten Eintauchen komplett im Gin Tonic untertaucht. Die Reibung sei schwach, d.h. $k < 2\rho g A$. *Hinweis:* $\sin(\arctan x) = x/\sqrt{1+x^2}$ ist hilfreich.

## Aufgabe 3: Differentialgleichung - Partikuläre Lösung **5P**

Finden Sie die allgemeinen Lösungen der nachfolgenden inhomogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Machen Sie zuerst einen Exponentialansatz für die homogene Gleichung (mit verschwindender rechter Seite) und machen Sie dann einen Ansatz für eine spezielle/partikuläre Lösung. Die allgemeine Lösung ist die Summe der Lösung der homogenen Gleichung und der partikulären Lösung. *Hinweise:* Nutzen Sie die Erläuterungen nach Aufgabe 4. Da keine Anfangsbedingungen gegeben sind, verbleiben unbestimmte Konstanten in der homogenen Lösung. Konstanten der speziellen Lösung folgen durch Koeffizientenvergleich nach Einsetzen.

(a) $\boxed{\text{1P}}$ $y''(x) + 4y'(x) + 8y(x) = 4x^2 - 36x - 11$

(b) $\boxed{\text{2P}}$ $y''(x) + 4y(x) = 4\sin(2x)$

(c) $\boxed{\text{2P}}$ $y''(x) + 2y'(x) - 8y(x) = 4e^{2x} + 4x + 7$

**Aufgabe 4: Bahnkurve - Ballwurf mit Reibung** $\boxed{\textbf{6P}}$

Sehr ähnlich zu den Aufgaben 2 auf Blatt 1 und auf Blatt 5 betrachten wir wieder einen Wurf. Ein Ball mit Masse $m$ wird mit Geschwindigkeit $v_0$ unter einem Winkel $\alpha$ vom Ursprung des zweidimensionalen Koordinatensystems geworfen und fliegt entlang der Bahnkurve $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))^T$. Diesmal wirkt aber neben der Erdbeschleunigung $\vec{F}_g = -mg\vec{e}_y$ auch noch die zusätzliche Reibung $\vec{F}_R(t) = -k\dot{\vec{r}}$.

(a) $\boxed{\text{1P}}$ Stellen Sie die Differentialgleichungen der Bewegung auf. *Hinweis:* Die Gleichung in $y$-Richtung ist eine inhomogene DGL.

(b) $\boxed{\text{3P}}$ Lösen Sie die DGLen unter Beachtung der Anfangsbedingungen. *Hinweis:* Verfahren Sie wie in Aufgabe 3.

(c) $\boxed{\text{2P}}$ Wie hoch fliegt der Ball? Entwickeln Sie die maximale Höhe für kleine Werte von $k$ und vergleichen Sie mit dem Wurf ohne Reibung.

Für eine inhomogene Differentialgleichung der Form

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = s(x)$$

mit einer Störfunktion $s(x)$ empfehlen sich nachfolgende Ansätze für eine spezielle Lösung $y_p(x)$. Sollte das charakteristische Polynom der homogenen Gleichung eine $m$-fache Nullstelle haben, die mit dem Problemwert $\hat{\lambda}$ der Tabelle übereinstimmt, so ist der erweiterte Ansatz $\hat{y}_p(x)$ zu nutzen. Sollte die Störfunktion verschiedene Beiträge haben, lassen sich die nachfolgenden Ansätze addieren.
Beispiel für die Notwendigkeit von $\hat{y}_p(x)$: Für $y'(x) = 5$ ist die homogene Gleichung $y'(x) = 0$. Der Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ liefert das charakteristische Polynom $\lambda = 0$, also ist $\lambda = 0$ eine einfache Nullstelle am Problemwert der Tabelle. Daher liefert nur der Ansatz $\hat{y}_p(x) = Cx$ nach Einsetzen in die inhomogene DGL ($C = 5$) die triviale spezielle Lösung $\hat{y}_p(x) = 5x$.

| $s(x)$ | Ansatz $y_p(x)$ | $\hat{\lambda}$ | Ansatz $\hat{y}_p(x)$ |
|---|---|---|---|
| Konstante bzgl. $x$ | $C$ | $0$ | $Cx^m$ |
| Polynom in $x$ vom Grad $k$ | $\sum_{j=0}^k C_j x^j$ | $0$ | $x^m \sum_{j=0}^k C_j x^j$ |
| $e^{ax}$ | $Ce^{ax}$ | $a$ | $Cx^m e^{ax}$ |
| $\sin(bx)$ oder $\cos(bx)$ | $C_1\sin(bx) + C_2\cos(bx)$ | $bi$ | $x^m(C_1\sin(bx) + C_2\cos(bx))$ |
| $e^{ax}\sin(bx)$ oder $e^{ax}\cos(bx)$ | $e^{ax}(C_1\sin(bx) + C_2\cos(bx))$ | $a + bi$ | $x^m e^{ax}(C_1\sin(bx) + C_2\cos(bx))$ |

Wenn der Limes der Motivation gegen Null zu gehen scheint,
der Student voller Anstrengung fast weint,
wenn die Wut einem schon zu Kopfe steigt,
das Theo A-Blatt wieder seine volle Härte zeigt.

Jeden Montag gibt's ein neues Blatt.
Und große Frustration über Theo A.
Doch irgendwann lös ich es glatt.
Und merke, dass es doch ganz einfach war.